

APLICACION DE TECNICAS DE DUALIDAD
EN ELEMENTOS FINITOS

Marta B. Bergallo
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería Química
Universidad Nacional del Litoral
Santiago del Estero 2829, 3000 Santa Fe, Argentina

Pierre Beckers
Laboratorio de Técnicas Aeronáuticas y Espaciales
Universidad de Lieja
4000 Lieja, Bélgica

RESUMEN

Se aplican técnicas de dualidad para resolver un problema mixto de *Dirichlet-Neumann* para el operador Laplaciano en un dominio poligonal de \mathbb{R}^2 . Se presentan los principios variacionales de desplazamientos y de tensiones como el problema primal y su problema dual, respectivamente. Se proponen dos modelos de elementos finitos para obtener una solución aproximada a cada uno de ellos. A partir de estas dos soluciones se obtiene una aproximación a la solución del problema dado para la cual es posible estimar el error de discretización, que en ciertos casos se puede calcular en forma exacta.

ABSTRACT

Duality techniques are applied to solve a mixed Dirichlet-Neumann problem for the Laplacian operator on a polygonal domain in \mathbb{R}^2 . Displacement and stress variational principles are presented as the primal and dual problems, respectively. Two finite element models are proposed to solve each of the above problems. Based on both solutions an approximation to the problem solution is obtained as well as estimators to the discretization error. This error may be computed exactly in certain cases.

1. UN PROBLEMA CON CONDICIONES DE BORDE MIXTAS Y SU PROBLEMA DUAL

Se considera el problema siguiente:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{sobre } \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g & \text{sobre } \Gamma_n \end{cases} \quad (1)$$

y el problema de minimización asociado:

$$\begin{cases} \text{encontrar } \bar{u} \in u_0 + H_{\Gamma_d}^1(\Omega) \text{ tal que} \\ F(\bar{u}) = \min_{v \in u_0 + H_{\Gamma_d}^1(\Omega)} F(v) \end{cases} \quad (2)$$

donde:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio poligonal cuya frontera $\partial\Omega$ está dividida en dos partes: Γ_d y Γ_n , y la longitud de Γ_d debe ser positiva;

- $u_0 \in H^2(\Omega)$ es una función conocida y $u_0 + H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ es el conjunto de los *desplazamientos admisibles*, con

$$H_{\Gamma_d}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / u|_{\Gamma_d} = 0\}$$

un subespacio lineal y cerrado de $H^1(\Omega)$ y sobre el cual la semi-norma de $H^1(\Omega)$: $|\cdot|_{1,\Omega}$, es una norma equivalente a la norma usual del espacio [2];

- la funcional F , llamada *energía del sistema*, definida por

$$\begin{aligned} F(v) &= 1/2 a(v, v) - l(v) \\ &= 1/2 \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Gamma_n} g v \, ds \end{aligned}$$

es convexa y coerciva sobre $u_0 + H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ [1].

- $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ es una forma bilineal sobre $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, definida positiva, simétrica, definida por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

la cual es continua y coerciva sobre $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$;

- $l : H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ es una forma lineal y continua sobre $H^1(\Omega)$, definida por

$$l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_n} g v \, ds$$

con $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_n)$;

Bajo ciertas condiciones de regularidad [4] de la solución de (1), se puede demostrar que ambos problemas son equivalentes [1].

A partir de las hipótesis mencionadas, se puede asegurar que el problema de minimización (2), tiene solución única. La misma está caracterizada por

$$\begin{cases} \bar{u} \in u_0 + H_{\Gamma_d}^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_n} g v \, ds \quad \forall v \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega) \end{cases} \quad (3)$$

Partiendo del problema (2) considerado como *problema primal*, la teoría de dualidad en optimización convexa [3] permite hallar el correspondiente *problema dual*:

$$\begin{cases} \text{encontrar } \bar{p} \in H_{\Gamma_n}(\text{div}; f, g, \Omega) \text{ que verifica} \\ J(\bar{p}) = \min_{q \in H_{\Gamma_n}(\text{div}; f, g, \Omega)} 1/2 \int_{\Omega} q \cdot q \, dx - \int_{\Gamma_d} q \cdot \eta u_0 \, ds \end{cases} \quad (4)$$

donde

$$H_{\Gamma_n}(\text{div}; f, g, \Omega) = \{q \in H(\text{div}; \Omega) / \text{div } q + f = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } q \cdot \eta = g \text{ sobre } \Gamma_n\}$$

es el espacio de *tensiones estaticamente admisibles* y

$$H(\text{div}; \Omega) = \{q \in [L^2(\Omega)]^2 / \text{div } q \in L^2(\Omega)\}$$

es un espacio de Hilbert para la norma

$$\|q\|_{H(\text{div}; \Omega)} = (\|q\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } q\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Las soluciones de los problemas (2) y (4), primal y dual respectivamente, están relacionadas por la condición

$$\|\nabla \bar{u} - \bar{p}\|_{0,\Omega} = 0.$$

2. BREVE DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

2.1 Introducción

Se considera $\{\Omega_e\}_{e=1}^N$ una partición del dominio Ω en N subdominios triangulares, mutuamente disjuntos y abiertos, para la cual el ángulo mínimo de todos los triángulos está acotado inferiormente por una constante positiva. Supongamos también que cuando el lado de un triángulo coincide con $\partial\Omega$, estará completamente incluido en Γ_d o en Γ_n . Asociada a esta triangulación, existe una constante positiva h definida por

$$h = \max_{1 \leq i \leq N} h_e \quad \text{con} \quad h_e = \text{diam}(\Omega_e).$$

2.2 Modelo cinemáticamente admisible

Se trata de aproximar la solución del problema dado, en su forma variacional (3), mediante el método de elementos finitos [2]. Sea

$$H_h = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Omega_e} \in \mathcal{P}_1(\Omega_e), e = 1, \dots, N\}$$

el subespacio de $H^1(\Omega)$ de dimensión finita engendrado por una base C^0 de elementos finitos, definida por la partición $\{\Omega_e\}_{e=1}^N$ y donde $\mathcal{P}_m(\Omega)$ es el conjunto de todos los polinomios de grado a lo sumo m , definidos sobre Ω . Se define el espacio discreto correspondiente, de funciones "de prueba":

$$V_h = H_h \cap H_{\Gamma_d}^1(\Omega).$$

En este trabajo se considerará que $u_0 \in H_h$.

Para resolver (3), el método de elementos finitos cinemáticamente admisible consiste en

$$\begin{cases} \text{encontrar } u_h \in u_0 + V_h \text{ que satisface} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (5)$$

Generalmente la solución por elementos finitos u_h no coincide con la solución exacta \bar{u} . La diferencia $e_h = \bar{u} - u_h$, llamada *error en los desplazamientos*, verifica la condición de ortogonalidad siguiente:

$$a(e_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Por analogía, la solución por elementos finitos es también solución del problema variacional

$$F(u_h) = \min_{v_h \in u_0 + V_h} F(v_h)$$

lo que conduce al teorema de proyección en elementos finitos

$$a(e_h, e_h) = \min_{v_h \in u_0 + V_h} a(\bar{u} - v_h, \bar{u} - v_h).$$

2.3 Modelo estáticamente admisible

El modelo estáticamente admisible corresponde al *principio variacional de tensiones*, es decir al problema (4). Pero si fuese posible encontrar una solución particular $p_0 \in H_{\Gamma_n}(div; f, g, \Omega)$, dicho problema se reduce a

$$\begin{cases} \text{encontrar } p^* = \bar{p} - p_0 \in H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega) \text{ que verifica} \\ \int_{\Omega} p^* \cdot q \, dx = - \int_{\Omega} p_0 \cdot q \, dx + \int_{\Gamma_d} q \cdot \eta \, u_0 \, ds \quad \forall q \in H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega) \end{cases} \quad (6)$$

Para construir el espacio de funciones "de prueba", sean

$$H_h^* = \{q = (q_1, q_2) \in H(div; \Omega) / q_i|_{\Omega_e} \in \mathcal{P}_0(\Omega_e), e = 1, \dots, N, i = 1, 2\}$$

un subespacio de dimensión finita y V_h^* definido por

$$V_h^* = H_h^* \cap H_{\Gamma_n}(\text{div}; 0, 0, \Omega).$$

En este trabajo se considera $g|_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_n} \in \mathcal{P}_0(\partial\Omega_e \cap \Gamma_n)$, es decir que la función g puede ser constante a trozos sobre Γ_n .

Resolver (6) mediante el método de elementos finitos estaticamente admisible consiste en

$$\begin{cases} \text{encontrar } p_h^* \in V_h^* \text{ que satisface} \\ \int_{\Omega} p_h^* \cdot q_h \, dx = - \int_{\Omega} p_0 \cdot q_h \, dx + \int_{\Gamma_d} q_h \cdot \eta \, u_0 \, ds \quad \forall q_h \in V_h^* \end{cases} \quad (7)$$

En general, la solución por elementos finitos no coincide con la solución exacta, a menos que $p^* = \bar{p} - p_0 \in V_h^*$. La diferencia $e_h^* = \bar{p} - (p_h^* + p_0) = p^* - p_h^*$ es el error en las tensiones. Es fácil probar que el error e_h^* es ortogonal a todo elemento de V_h^* , es decir

$$\int_{\Omega} e_h^* \cdot q_h \, dx = 0 \quad \forall q_h \in V_h^*.$$

La solución p_h^* obtenida por elementos finitos, permite obtener una solución del problema de minimización en el subespacio V_h^* :

$$J(p_0 + p_h^*) = \min_{q_h \in p_0 + V_h^*} J(q_h).$$

Esto conduce al teorema de proyección en elementos finitos:

$$b(e_h^*, e_h^*) = \min_{q_h \in p_0 + V_h^*} b(\bar{p} - q_h, \bar{p} - q_h)$$

donde

$$b(p, q) = \int_{\Omega} p \cdot q \, dx.$$

3. TECNICAS DE DUALIDAD APLICADAS A LOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 Modelo cinematicamente admisible: condiciones esenciales homogéneas.

En la práctica, la condición de Dirichlet, llamada *condición esencial* en el principio variacional de desplazamientos son, a menudo, homogéneas. En ese caso la solución \bar{u} del problema (3) y la obtenida por elementos finitos u_h , pertenecen a los espacios $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ y V_h respectivamente. Por el teorema de ortogonalidad del error se obtiene:

$$a(e_h, e_h) = a(\bar{u}, \bar{u}) - a(u_h, u_h).$$

Es decir que para los casos en los cuales $u_0 = 0$ sobre Γ_d , la energía del error es igual al error de la energía. Como consecuencia, es posible obtener una cota inferior para la energía exacta:

$$a(\bar{u}, \bar{u}) \geq a(u_h, u_h).$$

3.2 Modelo cinematicamente admisible: condiciones naturales homogéneas.

Estos casos corresponden a aquellos problemas mixtos para los que la condición de Neumann es homogénea y la fuente interna f es nula. En el principio variacional de desplazamientos, esto corresponde a las *condiciones naturales homogéneas*. La forma lineal $l(\cdot)$ es nula. Así la funcional F a minimizar se reduce a $F(v) = 1/2a(v, v)$. De esta forma, siendo \bar{u} la solución exacta del problema de minimización (2) y $u_h \in u_0 + V_h \subset u_0 + H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$, se tiene

$$a(\bar{u}, \bar{u}) \leq a(u_h, u_h)$$

es decir, la relación inversa a aquella obtenida para las condiciones esenciales homogéneas.

3.3 Modelo estaticamente admisible: condiciones esenciales homogéneas.

En el principio variacional de tensiones, las condiciones esenciales corresponden a aquellas de las tracciones impuestas y de las fuerzas volumínicas f . Un caso particular para el problema (6) es aquél donde las condiciones esenciales son homogéneas, es decir $g = 0$ sobre Γ_n , $f = 0$ en Ω y la solución particular elegida será $p_0 \equiv 0$. En este caso, $\bar{p} = p^*$ pertenecen al espacio $H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega)$ y la solución p_h^* del problema (7) pertenece al espacio de funciones "test" V_h^* . Así, aplicando el teorema de ortogonalidad del error se obtiene

$$b(e_h^*, e_h^*) = b(\bar{p}, \bar{p}) - b(p_h^*, p_h^*)$$

es decir que en ese caso particular, la energía del error es igual al error de la energía. De esta forma resulta que

$$b(p_h^*, p_h^*) \leq b(\bar{p}, \bar{p}).$$

3.4 Modelo estaticamente admisible: condiciones naturales homogéneas.

En el principio variacional de tensiones, las condiciones naturales corresponden a aquéllas de los desplazamientos impuestos. A menudo en la práctica, éstas son homogéneas. En este caso la forma lineal

$$q \mapsto \int_{\Gamma_d} q \cdot \eta u_0 ds$$

es idénticamente nula para todas las $q \in H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega)$. De esta forma, la funcional J a minimizar se reduce a $J(q) = 1/2 \int_{\Omega} q \cdot q dx$ y siendo \bar{p} la solución exacta del problema (4) y $p_h^* \in H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega)$, se sigue que

$$b(p_0 + p_h^*, p_0 + p_h^*) \geq b(\bar{p}, \bar{p})$$

que no es otra cosa que la relación inversa de la obtenida para las condiciones esenciales homogéneas.

3.5 Una estimación para la energía exacta:

Es claro que las soluciones \bar{u} de (2) y \bar{p} de (4) verifican $a(\bar{u}, \bar{u}) = b(\bar{p}, \bar{p})$ estando ambas soluciones ligadas por la relación $\bar{p} = \nabla \bar{u}$ en $[L^2(\Omega)]^2$. Así en los casos particulares para los cuales la condición de Dirichlet es homogénea, la energía exacta está acotada tanto inferior como superiormente, obteniéndose

$$a(u_h, u_h) \leq a(\bar{u}, \bar{u}) = b(\bar{p}, \bar{p}) \leq b(p_0 + p_h^*, p_0 + p_h^*).$$

De la misma manera, en los problemas con condiciones de tipo Neumann (tracciones impuestas) y fuente interna f (ecuación de Laplace) nulas, se puede obtener una cota inferior y otra superior para la energía exacta, de la siguiente forma

$$b(p_h^*, p_h^*) \leq b(\bar{p}, \bar{p}) = a(\bar{u}, \bar{u}) \leq a(u_h, u_h)$$

recordando que la solución particular p_0 de la ecuación $div p + f = 0$ en Ω es nula. Se toma entonces como estimación de la energía exacta, la semisuma de las energías obtenidas por los modelos cinemático y estático de elementos finitos. Se obtiene finalmente

$$\left| a(\bar{u}, \bar{u}) - \frac{a_h + b_h}{2} \right| \leq \frac{|b_h - a_h|}{2}.$$

3.6 Condiciones de borde no homogéneas:

Para problemas con condiciones de borde no homogéneas, se pueden demostrar los siguientes resultados [1]:

Proposición (Propiedad de ortogonalidad de los campos): $\forall u \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ y $\forall p \in H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega)$, se tiene que

$$(\nabla u, p) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot p dx = 0.$$

Notar que, entonces, el único elemento $u \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ tal que $\nabla u \in H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega)$ es $u \equiv 0$.

Los campos $p \in H_{\Gamma_n}(div; f, g, \Omega)$ serán considerados como la suma de un campo particular $p_0 \in H_{\Gamma_n}(div; f, g, \Omega)$ y de un campo $p^* \in H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega)$.

La solución u de (1) es tal que su gradiente $s = \nabla u$ es la intersección de los conjuntos $\nabla u_0 + \{\nabla u : u \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega)\}$ y $p_0 + H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega)$.

Teorema: Sea u solución de (1) tal que $s = \nabla u \in H(div; \Omega)$. Sean $\nabla u_0 + \nabla u^* \in \nabla u_0 + \{\nabla u : u \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega)\}$ y $p_0 + p^* \in p_0 + H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega)$. Entonces

$$\left\| s - \frac{\nabla u_0 + \nabla u^* + p_0 + p^*}{2} \right\|_{0,\Omega} = 1/2 \|p_0 + p^* - \nabla u_0 - \nabla u^*\|_{0,\Omega}$$

Observaciones:

1. Las soluciones de los principios variacionales de desplazamientos y de tensiones, \bar{u} y \bar{p} respectivamente, son tales que $\nabla \bar{u} \in \nabla u_0 + \{\nabla u : u \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega)\}$ y $\bar{p} \in p_0 + H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega)$, estando relacionadas por la condición $\bar{p} = \nabla \bar{u}$ en $[L^2(\Omega)]^2$, relación que puede obtenerse también a partir del teorema anterior.
2. Las soluciones aproximadas dadas por los métodos de elementos finitos cinemática y estaticamente admisibles: u_h y p_h respectivamente, son tales que $\nabla u_h \in \nabla u_0 + \{\nabla u : u \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega)\}$ y $p_h \in p_0 + H_{\Gamma_n}(div; 0, 0, \Omega)$ y a partir del teorema anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| s - \frac{\nabla u_h + p_h}{2} \right\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{e=1}^N \left\| s - \frac{\nabla u_h + p_h}{2} \right\|_{0,\Omega_e}^2 \\ &= 1/4 \sum_{e=1}^N \|p_h - \nabla u_h\|_{0,\Omega_e}^2 = 1/4 \|p_h - \nabla u_h\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \left\| s - \frac{\nabla u_h + p_h}{2} \right\|_{0,\Omega}^2 &= 1/4 \|s - \nabla u_h\|_{0,\Omega}^2 + 1/4 \|s - p_h\|_{0,\Omega}^2 \\ &= 1/4 \|\nabla \bar{u} - \nabla u_h\|_{0,\Omega}^2 + 1/4 \|\bar{p} - p_h\|_{0,\Omega}^2 \\ &= 1/4 [a(e_h, e_h) + b(e_h^*, e_h^*)]. \end{aligned}$$

Tomando las soluciones aproximadas de la misma calidad, es decir $a(e_h, e_h) = O(h^k)$ y $b(e_h^*, e_h^*) = O(h^k)$, se obtiene el mismo orden de aproximación para la semisuma $\frac{\nabla u_h + p_h}{2}$.

4. DETALLES DE LA IMPLEMENTACION NUMERICA. EJEMPLOS.

4.1 Obtención de las soluciones aproximadas u_h y p_h

Las soluciones de los problemas (5) y (7) fueron obtenidas mediante el programa QUICK_SOLVER, desarrollado en el Servicio de Infografía del Laboratorio de Técnicas Aeronáuticas y Espaciales (LTAS) de la Universidad de Lieja, Bélgica. El mismo ha sido concebido para resolver problemas físicos utilizando métodos rápidos de resolución. Los datos son leídos a partir del archivo de salida del módulo BACON del programa SAMCEF [5].

Para la obtención de la solución $p_h = p_h^* + p_0$ del problema (7) se construyó un elemento de equilibrio cuyas características fueron descritas en 2.3. Este desarrollo consistió en construir una aproximación sobre cada triángulo, expresada como suma de una solución particular y una solución general del problema homogéneo. Por simplicidad, se desarrolló este elemento para los casos en los que f es constante en todo el dominio Ω .

4.2 Post-tratamiento

Una vez calculadas las soluciones de los modelos de Elementos Finitos cinemática y estaticamente admisibles, éstas fueron utilizadas para obtener los resultados deseados, a saber:

- los valores de las energías $a(u_h, u_h)$ y $b(p_h^* + p_0, p_h^* + p_0)$,
- el cálculo por elemento del ∇u_h y p_h^* a partir de los resultados obtenidos con el programa QUICK_SOLVER,
- el cálculo global del error al aproximar la solución del problema (1) con la semisuma $(\nabla u_h + p_h)/2$.

Este último punto se realiza teniendo en cuenta el resultado obtenido en 3.6 y sabiendo que

$$\|p_h - \nabla u_h\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{e=1}^N \|p_h - \nabla u_h\|_{0,\Omega_e}^2.$$

4.3 Ejemplos

Para cada problema se consideraron dos modelos de elementos finitos: un modelo cinemáticamente admisible que corresponde a una formulación en términos de los desplazamientos (temperaturas, potencial de velocidades, etc.) y un modelo estáticamente admisible que corresponde a una formulación en términos de las tensiones (flujos, etc.). Para cada ejemplo se da una primera figura con la definición del problema, las diferentes mallas utilizadas, los gráficos de las cotas para la energía exacta del problema, como así también del error global calculado.

Ejemplo 1

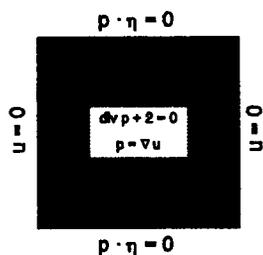


Fig. 1: Definición del problema

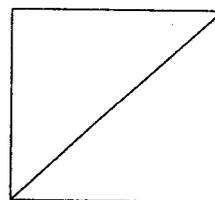


Fig. 2: Malla M1

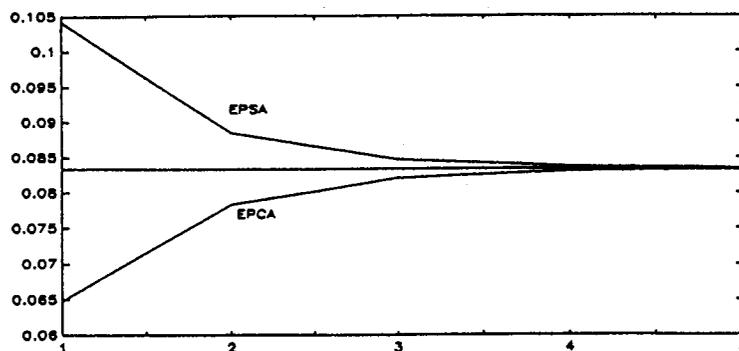


Fig. 3: Cotas para la energía exacta

La fig. 1 presenta la descripción del problema. Las mallas utilizadas en los ejemplos 1 y 2, se obtuvieron a partir de M1 (Fig. 2) por refinamiento uniforme. En el caso del ejemplo 1, ellas corresponden a un cuarto del dominio, dada la simetría del problema. En el caso del ejemplo 2, corresponden al dominio completo. En este ejemplo, la energía calculada a partir del modelo cinemático constituye una cota inferior para la energía exacta, y aquella calculada con el modelo estático, una cota superior (ver Fig. 3).

Ejemplo 2

La descripción del problema está dada en la Fig. 4. En este caso la relación entre las energías calculadas con los dos modelos y la exacta, es inversa con respecto a la presentada en el ejemplo anterior. Es decir, aquí la energía obtenida a partir del modelo cinemático es una cota superior de la energía exacta y aquella calculada con el modelo estático, una cota inferior (ver Fig. 5). La Fig. 6 corresponde a los errores globales calculados tanto para el ejemplo 1 como para el ejemplo 2.

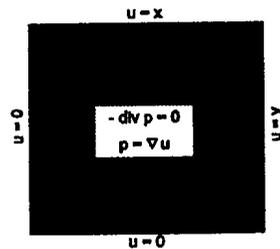


Fig. 4: Definición del problema

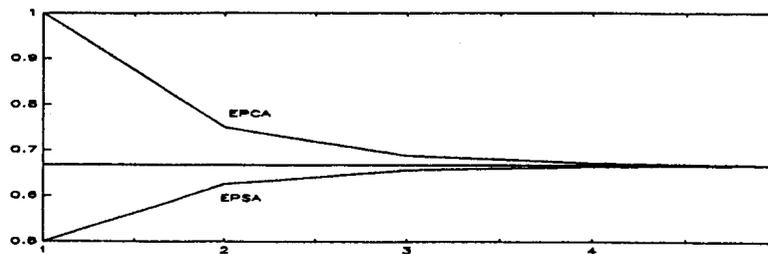


Fig. 5: Cotas para la energía exacta

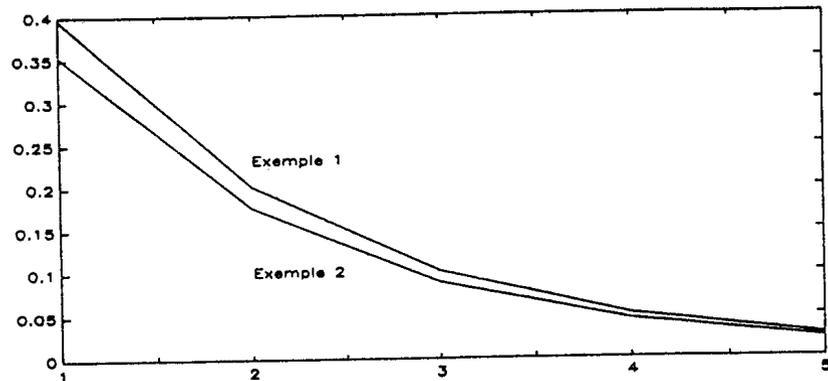


Fig. 6: Errores globales para Ejemplo 1 y Ejemplo 2

Ejemplo 3

El problema se encuentra descrito en la Fig. 7. Las mallas utilizadas en los ejemplos 3 y 4, son las que muestra la Fig. 8 y corresponden a la mitad inferior del dominio, dada la simetría de ambos problemas. Para este problema, la relación entre las energías calculadas con los dos modelos y la energía exacta, es la misma que la del ejemplo 1, como muestra la Fig. 9.

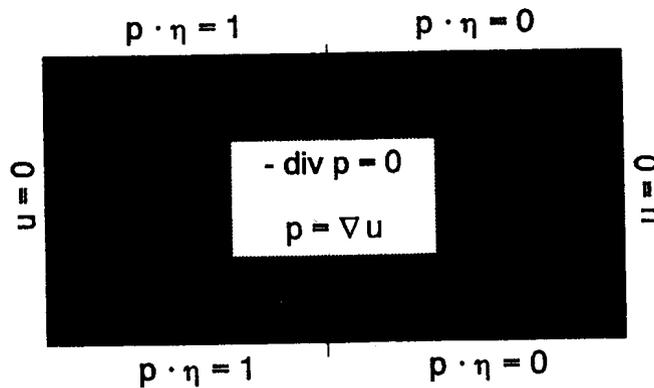


Fig. 7: Definición del problema

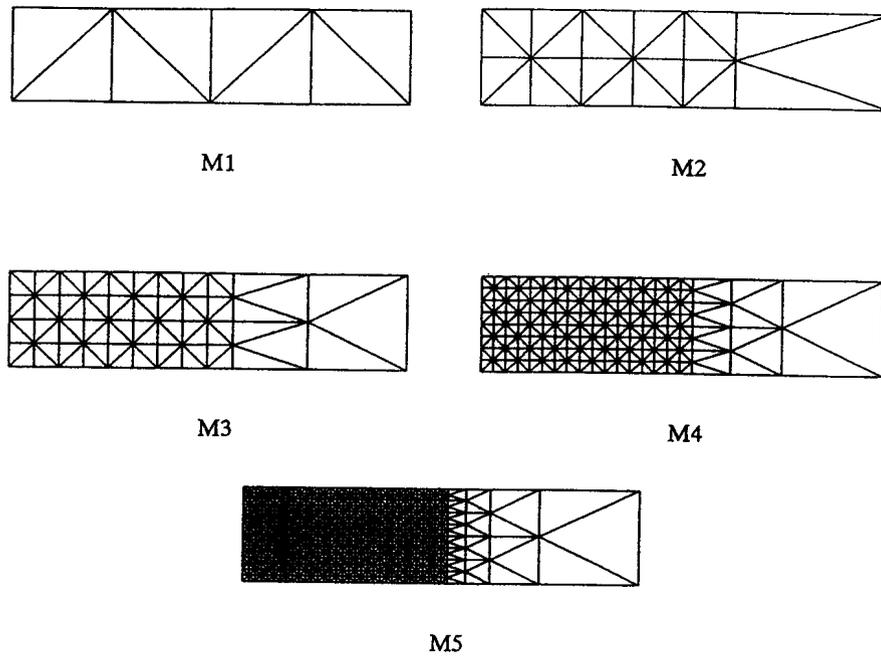


Fig. 8: Mallas corresp. a los ej. 3 y 4

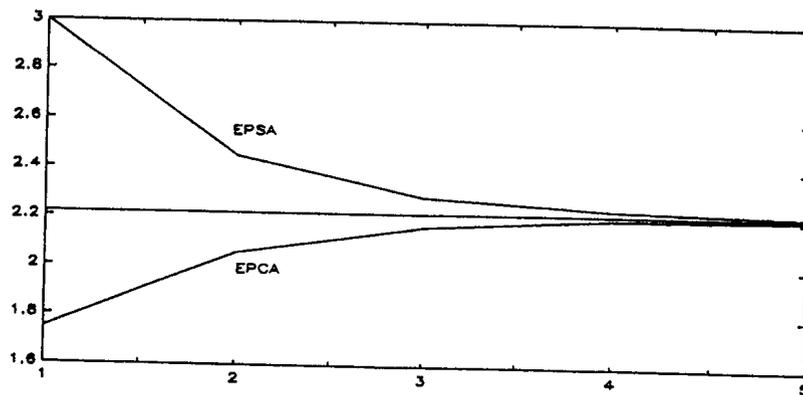


Fig. 9: Cotas para la energía exacta

Ejemplo 4

El problema es descrito en la Fig. 10. La Fig. 11 muestra las cotas para la energía exacta, dadas en la misma relación que en el ejemplo anterior.

La Fig. 12 corresponde a los errores globales obtenidos tanto para el ejemplo 3 como para el ejemplo 4 utilizando las mallas ya mencionadas (Fig. 8).

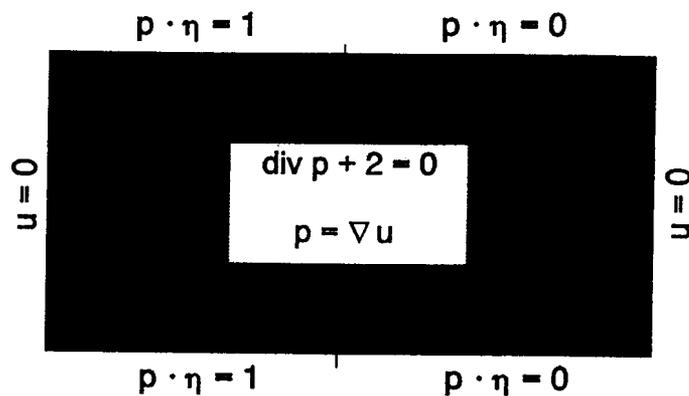


Fig. 10: Definición del problema

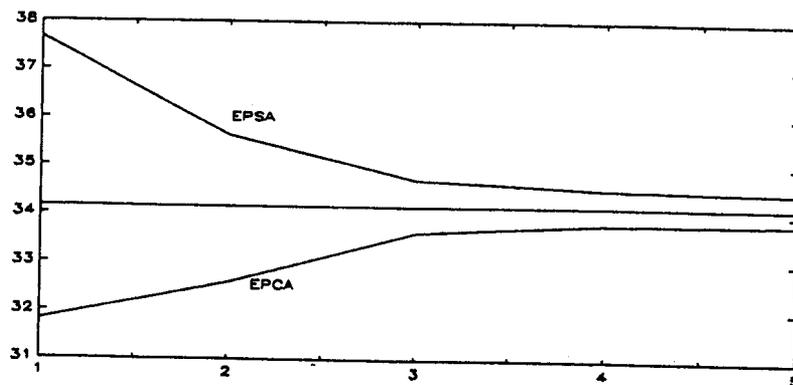


Fig. 11: Cotas para la energía exacta

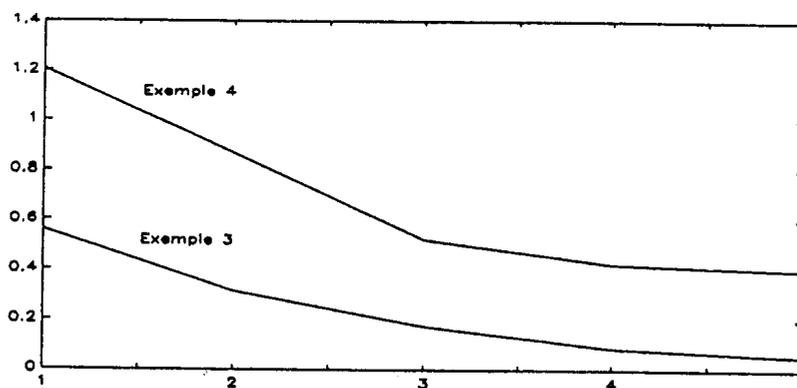


Fig. 12: Errores globales para los ejemplos 3 y 4

5. CONCLUSIONES

El método del análisis dual para obtener las cotas para la energía del problema, constituye una buena herramienta para controlar la calidad global de la solución por elementos finitos, que se aplica a problemas con condiciones de borde homogéneas. Para problemas con condiciones de borde no homogéneas, es posible obtener una aproximación de la solución exacta como la semisuma de los valores obtenidos por cada modelo, estimación que depende de las aproximaciones independientes e individuales de cada modelo. El error global cometido con esta aproximación puede ser calculado a partir de los resultados obtenidos con cada modelo. El cálculo se realiza a nivel de cada elemento, lo cual proporciona también una medida del error sobre cada uno de éstos.

REFERENCIAS

- [1] BERGALLO M., *Estimation de l'erreur de discretisation basée sur l'analyse duale en éléments finis*, Mémoire, Universidad de Lieja, 1993
- [2] CIARLET P.G., *The finite elements method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978
- [3] EKELAND I., TEMAM R., *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris, 1974
- [4] GRISVARD P., *Problèmes aux limites dans les polygones. Mode d'emploi*, E.D.P. Bull. Direction Etudes Recherche Ser. C Math. Inform., 1986, 1 et 3, pp 21-59
- [5] SAMCEF, *Manuel d'utilisation*, Universidad de Lieja