

TRANSFORMADA DE ONDICULAS

Ilda Hernández y Alberto Cardona
INTEC (CONICET/UNL)
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina

RESUMEN

Se presenta una breve introducción al análisis multiresolución y su aplicación al diseño de algoritmos para la reconstrucción de funciones.

ABSTRACT

This communication is a short introduction to multiresolution analysis and its application to the design of algorithms. We construct the Haar, Battle-Lemarié and the Daubechies' wavelets and illustrate their use in the reconstruction of functions.

INTRODUCCION

Las ondículas son funciones elementales que permiten una representación simple y robusta de funciones más generales en forma de series de ondículas.

Si la función generadora es suficientemente regular, rápidamente decreciente en el infinito y oscilante se obtienen bases ortonormales de $L^2(\mathbf{R})$ (localizadas en tiempo y frecuencia) mediante dilataciones diádicas y traslaciones enteras de una única función. Es decir, dada $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, tal que

$$\left\{ 2\pi \int |\xi|^{-1} |\psi(\xi)|^2 d\xi \right\} < +\infty \quad (1)$$

se puede generar una familia $\{\psi_{j,k}(x) \text{ para } j, k \in \mathbf{Z}\} = \{2^{j/2} \psi(2^j x - k) \text{ para } j, k \in \mathbf{Z}\}$ base de $L^2(\mathbf{R})$. La transformada asociada puede escribirse como

$$(T^- f)(j, k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int \psi_{j,k}(x) f(x) dx \quad (2)$$

Ya que la familia $\{\psi_{j,k} \text{ para } j, k \in \mathbf{Z}\}$ es también base incondicional de otros espacios funcionales (tales como $L^p(\mathbf{R})$ con $1 < p < \infty$, Sobolev, Besov, etc), se obtienen para los mismos caracterizaciones que no eran posibles con la transformada de Fourier [8]. Por ejemplo, para los espacios $L^p(\mathbf{R})$ con $1 < p < \infty$ tenemos que:

$$f \in L^p(\mathbf{R}) \iff \left\{ \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \right\}^{1/2} \in L^p(\mathbf{R}) \quad (3)$$

Observe que la transformada de ondículas permite reconstruir f a partir de sus coeficientes $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$. Esto en general es falso para la transformada de Fourier.

Históricamente la primera base de ondículas es la de Haar (1909). En la década del 80, S. Mallat [6] e Y. Meyer [7] introducen el concepto de **Análisis Multiresolución**, técnica similar a la de los QMF (Quadratic Mirror Filters). Este nuevo enfoque permite generar métodos para construir ondículas de manera sistemática y además diseñar algoritmos rápidos para la transformada de ondículas.

EJEMPLO DE ANALISIS MULTIRESOLUCION: HAAR

Si consideramos el espacio

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbf{R}) : f(x) = a_k \text{ si } k \leq x < k+1, k \in \mathbf{Z}\} \quad (4)$$

entonces es claro que $\varphi = \chi_{[0,1)} \in V_0$ ($\chi_{[0,1)}(x)$ es la llamada *función característica*, que toma valor 1 en el $[0, 1)$ y 0 fuera de éste) y que

$$\{\varphi(x-k), k \in \mathbf{Z}\} = \{\chi_{[k, k+1)}, k \in \mathbf{Z}\} \quad (5)$$

es una base ortonormal de V_0 .

En general se tiene la familia $\{V_j, j \in \mathbf{Z}\}$ tal que

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbf{R}) : f(x) = a_k \text{ si } k \leq 2^j x < k+1, k \in \mathbf{Z}\} \quad (6)$$

para la cual existe

$$\begin{aligned} \{\varphi_{j,k}(x)\} &= \{2^{j/2} \varphi(2^j x - k), k \in \mathbf{Z}\} \longrightarrow \text{base de } V_j \\ \text{supp } \varphi_{j,k} &= 2^{-j}[k, k+1] \end{aligned} \quad (7)$$

Nótese que los espacios V_i están "encajados" uno en otro, verificando:

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset \dots \quad (8)$$

Observamos que la función φ , llamada **función de escala** o **función generadora**, admite, como elemento de V_1 , la siguiente descomposición

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \chi_{[0,1)}(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) + \chi_{[1/2,1)}(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{1,0}(x) + \varphi_{1,1}(x)) \end{aligned} \quad (9)$$

Análogamente,

$$\varphi_{j-1,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{j,2k}(x) + \varphi_{j,2k+1}(x)) \quad (10)$$

Es fácil probar que $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} V_m$. Pero la familia $\{\varphi_{j,k}$ para $j, k \in \mathbf{Z}\}$ no forma una base de $L^2(\mathbf{R})$. Se puede construir una base que conserve las propiedades de localización de $\varphi_{j,k}$ considerando los complementos $W_m = V_m - V_{m+1}$. Sea :

$$P_m : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow V_m \quad (11)$$

proyección ortogonal sobre V_m . Entonces,

$$P_m(f)(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{m,k}(f) \varphi_{m,k}(x) \quad (12)$$

con $c_{m,k}(f) = \langle \varphi_{m,k}, f \rangle$.

$$P_{m+1}(f) - P_m(f) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} [c_{m+1,2k}(f) - c_{m+1,2k+1}(f)] [\varphi_{m+1,2k}(x) - \varphi_{m+1,2k+1}(x)] \quad (13)$$

Luego, si definimos $\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$ tenemos que

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{j+1,k}(x) - \varphi_{j+1,k+1}(x)] \quad (14)$$

Por lo tanto,

$$P_{m+1}(f) - P_m(f) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{m,k}(f) \psi_{m,k}(x) = Q_m(f) \quad (15)$$

donde Q_m es la proyección sobre el complemento ortogonal de V_m en V_{m+1} .

Se verifica fácilmente que la familia $\{\psi_{j,k}$ con $k \in \mathbf{Z}\}$ es una base de $W_j = Q_j(L^2(\mathbf{R}))$, que $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} V_m$ y que la familia $\{\psi_{j,k}$ para $j, k \in \mathbf{Z}\}$ forma una base de $L^2(\mathbf{R})$.

Observamos que $Q_m(f)$ no es en este caso continua, aún cuando f sea muy regular. Esto significa que $Q_m(f)$ converge a f sólo en norma L^2 .

ALGORITMOS DE RECONSTRUCCION

En el marco del Análisis Multiresolución se pueden diseñar diversos algoritmos de reconstrucción. Los gráficos que siguen fueron obtenidos utilizando los algoritmos que describimos a continuación:

Algoritmo de Mallat

Sean $N = 2^n$ y $V_N =$ espacio de muestreo fijos. Sean $\{\varphi_{N,k}$ para $k \in \mathbf{Z}\}$ base de V_N y $\{\psi_{N,k}$ para $k \in \mathbf{Z}\}$ base de W_N . Sea $c_N = \{c_{N,k}\} \in l^2(\mathbf{Z})$ una sucesión de datos. Consideramos la siguiente función

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{N,k} \varphi_{N,k}(x)$$

Como $V_N = W_{N-1} \oplus V_{N-1}$ entonces

$$f(x) = g_{N-1}(x) + f_{N-1}(x) \quad (16)$$

con

$$\begin{aligned} g_{N-1}(x) &= Q_{N-1}f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{N-1,k} \psi_{N-1,k}(x) \in W_{N-1} \\ f_{N-1}(x) &= P_{N-1}f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{N-1,k} \varphi_{N-1,k}(x) \in V_{N-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Pero

$$c_{N-1,k} = \langle P_{N-1}(f), \varphi_{N-1,k} \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{N,k} \langle \varphi_{N,k}, \varphi_{N-1,k} \rangle = (Lc_N)_k \quad (18)$$

$$d_{N-1,k} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{N,k} \langle \varphi_{N,k}, \psi_{N-1,k} \rangle = (Hc_N)_k \quad (19)$$

Es decir que a partir de la sucesión de datos c_N se obtienen dos sucesiones $c_{N-1} = Gc_N$, versión suavizada de c_N , y $d_{N-1} = Hc_N$, que representa la diferencia en información entre c_N y c_{N-1} . Iterando el proceso se tiene que

$$c_{j-1} = Lc_j \quad d_{j-1} = Hc_j \quad j = N, N-1, \dots, 1 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^N Q_{N-j}(f) + P_0(f) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{N-j,k} \psi_{N-j,k}(x) \right) + \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{0,k} \psi_{0,k}(x) \end{aligned} \quad (21)$$

Observamos que, por construcción, los filtros L y H satisfacen

$$HL^* = I \quad LL^* = I \quad HH^* = I \quad L^*L + H^*H = I$$

Utilizamos este algoritmo para graficar las ondículas de Haar, Battle-Lemarié, Daubechies (cuatro y seis coeficientes) y sus derivadas (Figuras 1 a 4).

También se reconstruyeron las funciones seno (Fig. 5, 6 y 7) y pulso (Fig. 8, 9 y 10) en bases de Battle-Lemarié y Daubechies.

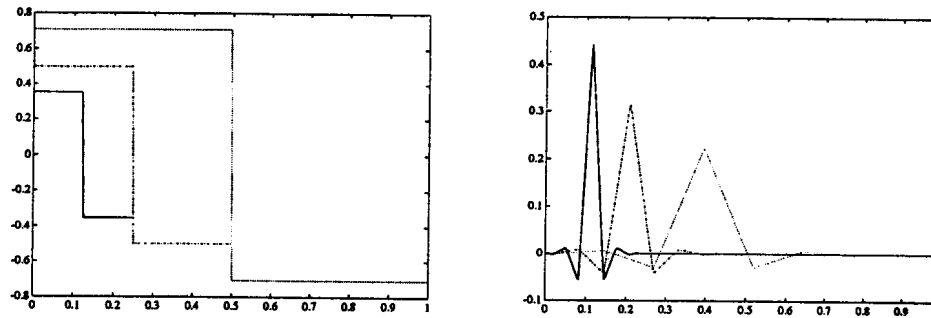


Figura 1: Ondícula de Haar (izquierda) y Battle-Lemarié (derecha), niveles 1, 2, 3

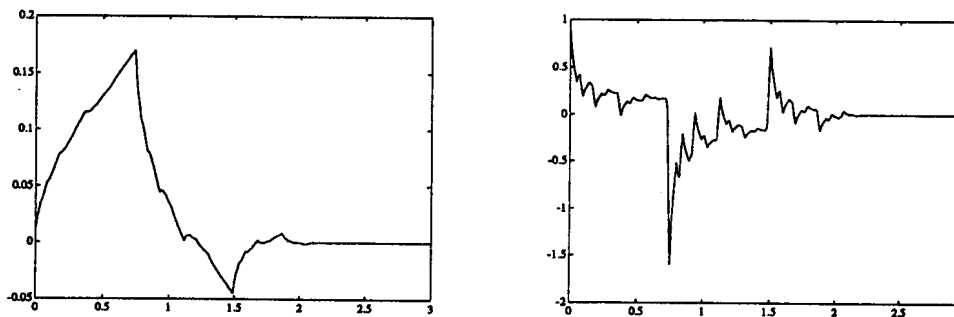


Figura 2: Función generadora de Daubechies ($N = 2$) y su derivada

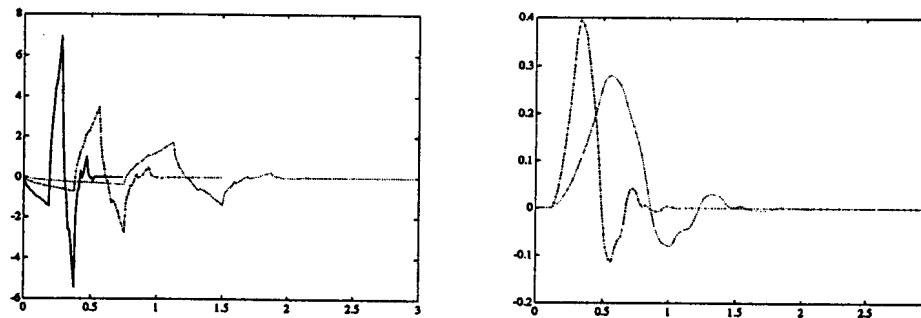


Figura 3: Ondícula de Daubechies: $N = 2$ (izquierda) y $N = 4$ (derecha)

Fórmula de recursión

Como en el caso de Haar, cualquier función generadora asociada a un análisis multiresolución satisface la ecuación de escala:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{1,k} \varphi_{1,k}(x) \tag{22}$$

En el caso de las ondículas de Daubechies conocemos los coeficientes $c_{1,k}$; sabemos además que son de

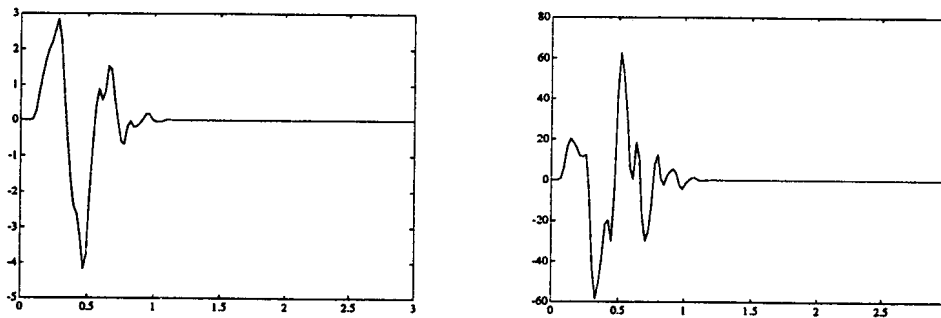


Figura 4: Derivada primera y segunda de la ondícula de Daubechies ($N = 4$)

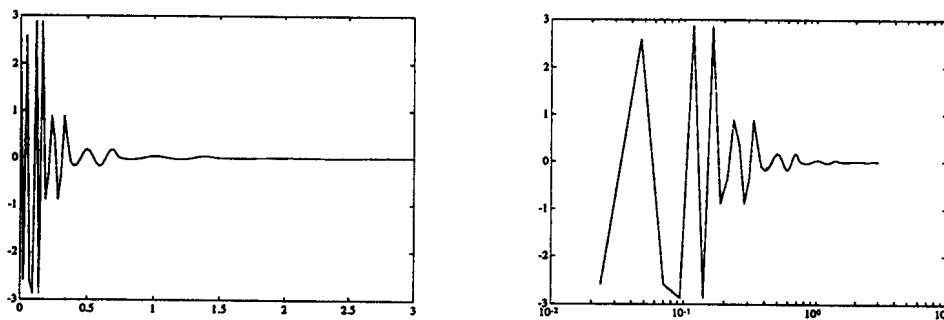


Figura 5: Transformada de $y = \sin(2\pi x/4)$

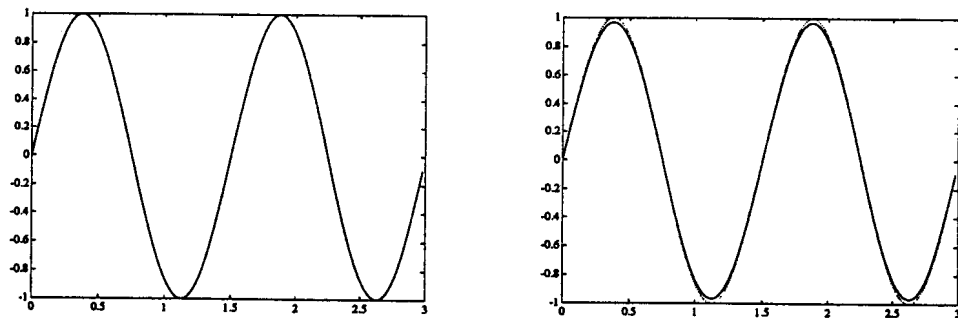


Figura 6: Reconstrucción de y : Daubechies $N = 2$ (izquierda) y Battle-Lemarié (derecha)

soporte compacto. Luego si se conocen los valores de φ en los enteros, utilizando la ecuación de escala, se pueden calcular exactamente los valores de φ en

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{k}{2^j}, \dots$$

para $j, k \in \mathbb{Z}$. Igual procedimiento se aplica a las derivadas. El gráfico de la Figura 11 se obtuvo de esta manera.

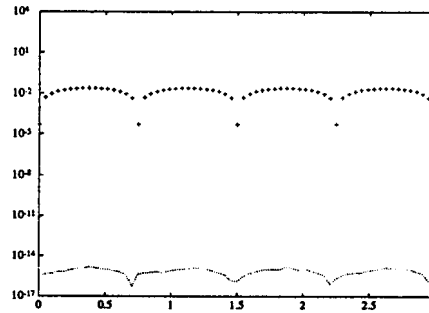


Figura 7: Errores: Daubechies ..., Battle-Lemarié +++

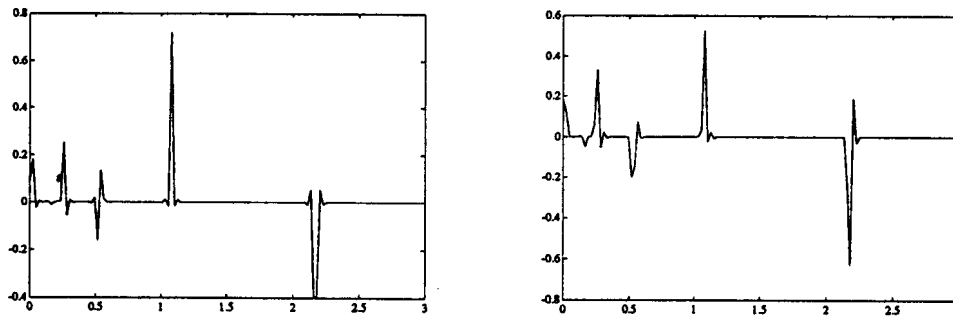


Figura 8: Transformada de y : Battle-Lemarié (izquierda) y Daubechies (derecha)

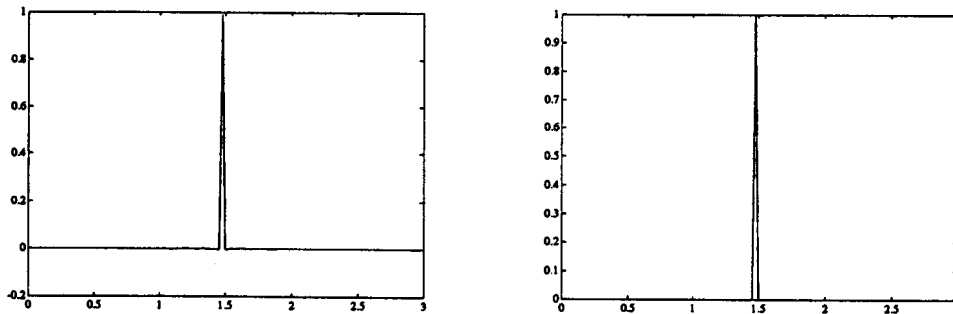


Figura 9: Reconstrucción de y : Battle-Lemarié (izquierda) y Daubechies (derecha)

Aproximaciones sucesivas

Este método se basa también en la ecuación de escala. Partiendo de una función φ_0 y los coeficientes $\{c_k\}$ de la ondícula de Daubechies D4 ($N = 2$) se obtuvieron los gráficos de la función generadora φ y la derivada de la ondícula ψ mediante iteraciones (Fig.12):

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{j-1}(2x - k) \tag{23}$$

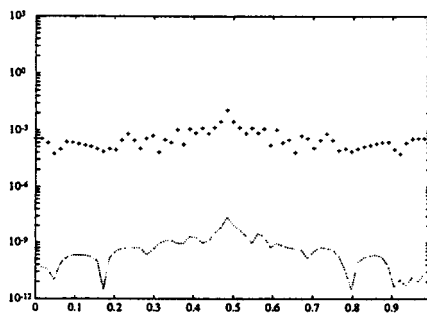


Figura 10: Errores: Daubechies ..., Battle-Lemarié +++

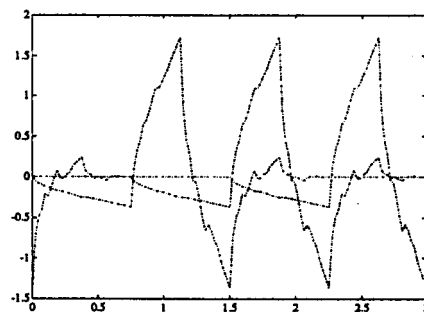


Figura 11: Ondícula de Daubechies ($n = 2$)

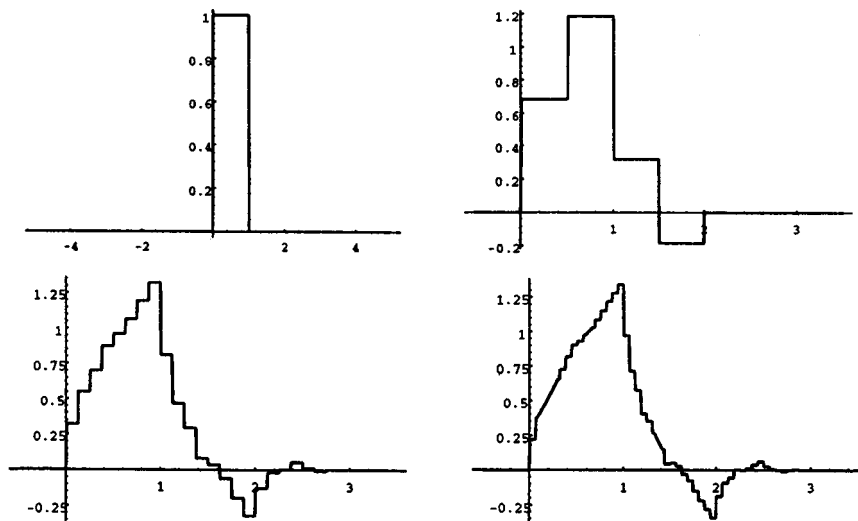


Figura 12: Reconstrucción de la función generadora de Daubechies $N = 2$ partiendo de φ_0 (izquierda)

COMENTARIOS FINALES

Las ondículas han sido usadas con muy buenos resultados en problemas de reconstrucción de imágenes [3] y procesamiento de señales [10]. Los primeros resultados en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales unidimensionales por métodos numéricos basados en ondículas son alentadores [4]. Beylkin et al. han diseñado algoritmos eficientes para la diagonalización e inversión de ciertas clases de matrices densas, usando el hecho de que los coeficientes $\{ \langle f, \psi_{j,k} \rangle \}$ decaen rápidamente en las regiones donde f es regular [1].

BIBLIOGRAFIA

1. Beylkin G., Coifman R. y Rokhlin V., *Fast Wavelet Transform*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 44, págs. 141-83.
2. Daubechies I., *Ten Lectures on Wavelets*, Notes for the CBMS Conference (Lowel), SIAM, Philadelphia, 1992.
3. Froment J. y Mallat S., *Second Generation Compact Image Coding with Wavelets*, en: *Wavelet: A Tutorial in Theory and Applications*, Ch. Chui (Ed.), págs. 655-678, Academic Press Inc., N.Y., (1992).
4. Glowinski R., Lawton W., Ravachol M. y Tenebaum E., *Wavelet Solution of Linear and Nonlinear Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems in One Space Dimension*, en: *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, SIAM, Philadelphia, 1990, págs. 55-120.
5. Lemarié P. y Meyer Y., *Ondelettes et Bases Hilbertiennes*, Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. 2 (1986), págs. 1-18.
6. Mallat S., *Multiresolution Approximation and Wavelet Orthonormal Bases of $L^2(\mathbb{R})$* , Transactions A.M.S., Vol. 315 (1989), págs. 1-18.
7. Meyer Y., *Constructions de Bases Orthonormées d'Ondelettes*, Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. 4 (1988), págs. 31-40.
8. Meyer Y., *Ondelettes et Opérateurs*, Vol. 1, Ed. Hermann, París, 1990.
9. Strang G., *Wavelets and Dilation Equations: A Brief Introduction*, SIAM Rev., Vol. 31 (1989), págs. 614-627.
10. Wickerhauser M. V., *Acoustic Signal Compression with Wavelet Packets*, en: *Wavelet: A Tutorial in Theory and Applications*, Ch. Chui (Ed.), págs. 679-722, Academic Press Inc., N.Y. (1992).