

**TRATAMENTO DO PROBLEMA DE CONTATO E ATRITO TRIDIMENSIONAL  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Eduardo BITTENCOURT, Guillermo J. CREUS  
Centro de Mecânica Aplicada e Computacional (CEMACOM)  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil (CPGEC)  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Av. Osvaldo Aranha, 99, 90050-210, Porto Alegre, RS, Brasil  
(Mail: bitten@vortex.ufrgs.br ou creus@vortex.ufrgs.br)

J. Ph. PONTHOT, Michel HOGGE  
Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales - Mécanique des  
Milieux Continus et Thermomécanique (LTAS-MC & T)  
Institut de Mécanique  
Université de Liège, Rue Ernest Solvay, 21, Liège, 4000 Bélgica

**RESUMO**

Neste trabalho um método para a simulação do problema de contato tridimensional é proposto. As leis constitutivas de atrito são integradas no tempo usando o método do retorno radial e a matriz de rigidez é derivada de forma consistente com este esquema. O passo mais crítico foi definir um adequado sistema de eixos tangente, que permite um procedimento simples e eficiente de cálculo da pressão de atrito. O algoritmo foi implementado no sistema METAFOR [1].

**ABSTRACT**

In this paper a method for the simulation of 3D contact problems with elasto-plastic materials and large deformations is proposed. The 3D constitutive laws for frictional contact are integrated in time using the return mapping method and the tangent stiffness matrix consistent with this scheme is derived. The most critical step is defining a correct tangent coordinate system that allows for a simple and efficient procedure for friction pressure calculation. The algorithm was implemented in the METAFOR system [1].

**INTRODUÇÃO**

No modelo que se está propondo, tem-se uma solução incremental das equações de equilíbrio. A configuração equilibrada num tempo  $t$  é tomada como configuração de referência para integração das leis constitutivas de contato no tempo  $t + \Delta t$ . As leis constitutivas são discutidas na primeira parte deste trabalho. A dedução da rigidez tangente é crítica pois dela vai depender a eficiência do método de solução de Newton-Raphson. Isto é visto na segunda parte do trabalho.

Ao longo do trabalho, será feita menção a dois diferentes sistemas de referência. Um local que é tangente à matriz de contato e outro global. Grandezas referidas ao primeiro serão identificadas por suas componentes  $n$  e  $\tau$ , enquanto que grandezas referidas no segundo serão identificadas pelas componentes  $x$  e  $y$ .

## LEIS CONSTITUTIVAS DE CONTATO EM TRÊS DIMENSÕES

O modelo constitutivo aqui empregado é aquele de Coulomb e é dado pela expressão (1):

$$f = || \underline{t}_T || - \mu | t_N | \leq 0 \quad (1)$$

onde  $|| \cdot ||$  indica a norma euclidiana,  $\mu$  o coeficiente de atrito estático,  $t_N$  e  $\underline{t}_T$  as pressões normais e tangenciais de contato, respectivamente.

Classicamente, segundo a lei de Coulomb, quando a norma das pressões tangenciais torna-se maior que o limite  $\mu |t_N|$ , inicia-se imediatamente o escorregamento entre as superfícies em contato. Este escorregamento é dito irreversível ou deslizante. Esta lei porém é modificada para ter em conta uma etapa reversível ou colante do escorregamento, verificada experimentalmente e que ocorre quando a norma das pressões tangenciais é inferior à este limite. Este comportamento é indicado na Fig. 1 abaixo:

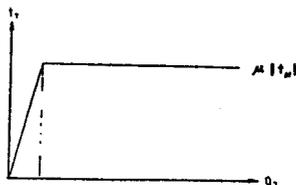


Fig. 1 - Relação pressão deslocamento para o caso de atrito

Assim pode-se decompor a taxa de deslocamento de contato em duas componentes:

$$\dot{g} = \dot{g}^{re} + \dot{g}^{ir} \quad (2)$$

onde  $\dot{g}^{re}$  é a parcela reversível e  $\dot{g}^{ir}$  a parte irreversível da taxa. Esta última terá três componentes, segundo a expressão (3):

$$\dot{g} = \begin{bmatrix} \dot{g}_{T1} \\ \dot{g}_{T2} \\ \dot{g}_N \end{bmatrix} \quad (3)$$

Para o caso do contato colante, tem-se apenas a parte reversível do

deslocamento. Então a relação pressão-deslocamento neste caso é linear e vale:

$$\dot{t} = K \dot{g}^{re} \quad (4)$$

onde,

$$K = \begin{bmatrix} K_T & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

Onde fisicamente  $K_N$  corresponde à rigidez da superfície à deslocamentos normais e  $K_T$  à deslocamentos tangenciais. (Esta última seria dada pela declividade da curva da Fig. (1)). Já para o contato deslizante, tem-se da equação (1) que:

$$f = 0 \quad (6)$$

Para o cálculo da relação pressão-deslocamento, uma analogia com plasticidade pode ser feita. Neste caso, em metais, normalmente assume-se uma plasticidade associada. Utilizada no cálculo do deslocamento, poder-se-ia dizer que sua parcela irreversível vale:

$$\dot{g}^{ir} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{t}} \quad (7)$$

onde  $\lambda$  é um escalar a ser determinado e,

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{T1}/||\underline{t}_T|| \\ t_{T2}/||\underline{t}_T|| \\ -\mu \end{bmatrix} \quad (8)$$

Porém o uso desta formulação leva a uma componente de deslocamento normal irreversível inconsistente do ponto de vista termodinâmico (ver [2]).

Um tipo de plasticidade não associada deve então ser utilizada. Assim a expressão (7) é substituída por:

$$\dot{g}^{ir} = \lambda \frac{\partial f^*}{\partial \underline{t}} \quad (9)$$

onde  $f^*$  é uma superfície de escorregamento modificada, dada pela expressão (10):

$$\frac{\partial f^*}{\partial \underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{T1}/||\underline{t}_T|| \\ t_{T2}/||\underline{t}_T|| \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Como em plasticidade, o escorregamento irreversível não pode ser expresso em termos de pressão e então, da relação constitutiva para o escorregamento reversível torna-se:

$$\dot{\underline{t}} = \underline{K} (\dot{\underline{g}} - \dot{\underline{g}}^{ir}) \quad (11)$$

Pode-se ainda formular uma condição de consistência: para um ponto em escorregamento irreversível, como  $f$  não pode ser maior que 0:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{t}} \dot{\underline{t}} = 0 \quad (12)$$

Substituindo-se (11) e (9) em (12), chega-se à uma expressão para  $\lambda$ , que será útil durante a integração das pressões, conforme será visto nos próximos parágrafos:

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{t}} \underline{K} \dot{\underline{g}}}{\frac{\partial f}{\partial \underline{t}} \underline{K} \frac{\partial f^*}{\partial \underline{t}}} \quad (13)$$

Para a integração temporal das pressões tangenciais, será utilizado o método do retorno radial [3]. Este método tem duas etapas: um preditor elástico e um corretor plástico. O preditor está definido na Eq. 14 e supõe que o escorregamento é totalmente reversível:

$$\underline{t}_T^e = \underline{t}_T^t + k_T \Delta \underline{g}_T \quad (14)$$

$\Delta \underline{g}_T$  corresponde ao deslocamento de um ponto ao longo de um passo incremental de integração. Ele é medido sobre o sistema local (plano tangente) da configuração atual do corpo. Se o ponto perde o contato,  $\underline{t}_T^t$  é zerada. Se  $f < 0$ , então o escorregamento é de fato reversível e o processo de integração está terminado. A pressão de atrito (ou tangencial) no tempo final  $t + \Delta t$  terá o mesmo valor do preditor elástico (Eq. 14). Em caso contrário aplica-se o corretor para trazer a pressão sobre a superfície de Coulomb:

$$\underline{t}_T^{t+\Delta t} = \underline{t}_T^e - \underline{t}_T^{corr} \quad (15)$$

A correção  $\underline{t}_T^{corr}$  valerá:

$$\underline{t}_T^{corr} = k_T \int_t^{t+\Delta t} \dot{\underline{g}}_T^{ir} dt \quad (16)$$

onde  $\dot{\underline{g}}_T^{ir}$  é dado pela expressão (7). Substituindo-se (7) em (16). Como a normal à superfície de escorregamento ( $\underline{t}_T / \|\underline{t}_T\|$ ) é constante entre  $t$  e  $t+\Delta t$ , vem que:

$$\underline{t}_T^{\text{corr}} = k_T \Delta \lambda \underline{t}_T^{\circ} / \|\underline{t}_T^{\circ}\| \quad (17)$$

onde  $\Delta \lambda$  vem da expressão (13). Têm-se, desta forma, todos elementos para o cálculo das pressões tangenciais, que valem:

$$\underline{t}_T^{t+\Delta t} = \mu t_N^{t+\Delta t} \underline{t}_T^{\circ} / \|\underline{t}_T^{\circ}\| \quad (18)$$

#### OBTENÇÃO DA MATRIZ TANGENTE DE CONTATO EM TRÊS DIMENSÕES

Durante a integração das pressões de contato pelo método do retorno radial, pode-se verificar que a pressão final é na verdade modificada por um fator de escala  $\beta$ .

$$\underline{t}_T^{t+\Delta t} = \beta \underline{t}_T^{\circ} \quad (19)$$

Para determinar o fator  $\beta$  basta substituir (19) dentro da função de escorregamento (1):

$$\beta = \frac{\mu |t_N|}{\|\underline{t}_T^{\circ}\|} \quad (20)$$

a expressão (19), pode-se reescrever a taxa de pressão de contato como:

$$d\underline{t}_T^{t+\Delta t} = d\beta \underline{t}_T^{\circ} + \beta d\underline{t}_T^{\circ} + dt_N \quad (21)$$

Da expressão (20), a taxa de  $\beta$  vale,

$$d\beta = \beta \left[ \frac{d(\mu |t_N|)}{\mu |t_N|} - \frac{d\|\underline{t}_T^{\circ}\|}{\|\underline{t}_T^{\circ}\|} \right] \quad (22)$$

Substituindo (22) em (21), chega-se à relação pressão-deslocamento:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} -k_T^* (t_{T1}/\|\underline{t}_T^{\circ}\|)^2 + k_T^* & -k_T^* t_{T1} t_{T2}/\|\underline{t}_T^{\circ}\| \|\underline{t}_T^{\circ}\| & \mu k_N t_{T1}/\|\underline{t}_T^{\circ}\| \\ -k_T^* t_{T1} t_{T2}/\|\underline{t}_T^{\circ}\| \|\underline{t}_T^{\circ}\| & -k_T^* (t_{T2}/\|\underline{t}_T^{\circ}\|)^2 + k_T^* & \mu k_N t_{T2}/\|\underline{t}_T^{\circ}\| \\ 0 & 0 & k_N \end{bmatrix} \quad (23)$$

onde  $k_T^* = k_T \beta$

Assim a relação pressão-deslocamento que deve ser empregada para o caso de atrito deslizante fica:

$$\underline{\dot{t}} = \underline{Y} \underline{\dot{g}} \quad (24)$$

A matriz da expressão (23) é consistente com o método do retorno radial e garante as boas características de convergência do método de

Newton Raphson.

No contexto dos elementos finitos, supor-se-á aqui a validade da chamada 'aproximação nodal'. Neste caso, as pressões são calculadas diretamente nos nós. Assim as forças de contato sobre o nó  $k$  são calculadas diretamente das pressões sobre este nó.

$$F_{k,i}^c = t_{k,i} \quad (25)$$

Para o cálculo da matriz tangente duas situações são possíveis : a) A matriz de contato é plana: Neste caso pode-se utilizar diretamente as expressões (6) e (23):

$$K_{xy_k}^c = K_{xy} \quad \text{ou} \quad K_{xy_k}^c = Y_{xy} \quad (26)$$

$$\text{onde } K_{xy} = \eta^T K \eta \quad \text{ou} \quad K_{xy} = \eta^T Y \eta \quad (27)$$

e  $\eta$  é uma matriz de rotação que será definida mais adiante. b) Para as matrizes de forma qualquer, utiliza-se uma matriz tangente numérica.

#### DEFINIÇÃO DE UM SISTEMA DE EIXOS LOCAIS

Para o caso bidimensional, a definição da direção normal à matriz permite a determinação imediata de um sistema de eixos local. No entanto, este não é mais o caso quando trabalha-se sobre o problema tridimensional; aqui o sistema de eixos não está inteiramente determinado, salvo o eixo ligado à direção normal. Mas os eixos tangentes à matriz são definidos de forma arbitrária. Para o cálculo destes eixos, duas situações são possíveis:

a) Primeira iteração onde há contato: Para obter um vetor tangente à matriz na projeção do nó escravo sobre a mesma (aqui denominado ponto  $P(\xi, n)$ ), calcula-se a posição de um novo ponto sobre a matriz cujas coordenadas reduzidas são  $(\xi + 0.01, n)$ . Define-se -desta maneira - um vetor tangente aproximadamente tangente à matriz, na projeção do nó escravo. Este vetor será chamado de  $t'_1$  (ver Fig. 2).

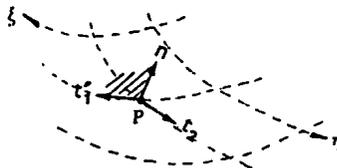


Fig. 2 - Definição de um eixo tangente  $t_2$  à superfície no nó.

Calcula-se um eixo ( $\underline{t}_2$ ) tangente fazendo um produto vetorial entre o vetor normal  $\underline{n}$  e o vetor  $\underline{t}_1'$ :

$$\underline{t}_2 = \underline{n} \times \underline{t}_1' \quad (28)$$

Após normalização, este vetor fornecerá um dos eixos tangentes procurados. O segundo eixo tangente é obtido do produto vetorial abaixo (ver também Fig. 2).

$$\underline{t}_1 = \underline{t}_2 \times \underline{n} \quad (29)$$

b) Para as outras iterações onde ocorre contato, o processo é o mesmo, salvo que o vetor aproximadamente tangente  $\underline{t}_1'$  é agora substituído pelo eixo tangente  $\underline{t}_1$  da iteração precedente. Ou seja, a equação (28) é substituída por:

$$\underline{t}_2^i = \underline{n} \times \underline{t}_1^{i-1} \quad (30)$$

onde o super-índice  $i$  identifica a iteração atual. Tem-se a garantia aqui que localmente o sistema de eixos não mudará ao longo do escorregamento do nó sobre a matriz. Uma vez definido o sistema de eixos local, pode-se determinar a matriz de rotação para os eixos globais, dada abaixo:

$$\underline{T}^T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & n_1 \\ t_{12} & t_{22} & n_2 \\ t_{13} & t_{23} & n_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

### APLICAÇÃO

Vai-se analisar aqui o caso proposto por Lee, Wagoner e Nakamashi [3], que consiste no embutimento de uma placa circular por um punção esférico cujas dimensões são dadas na Fig. 3(a).

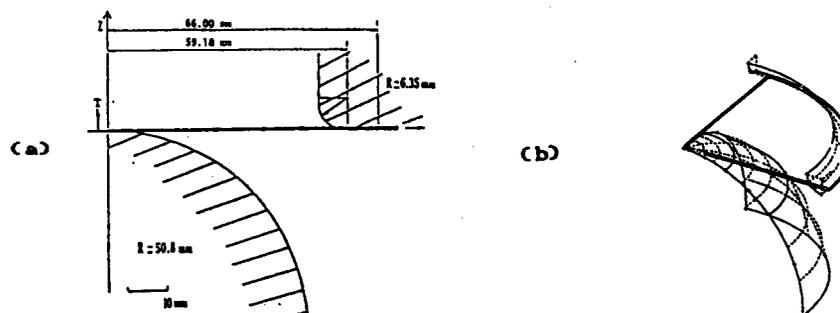


Fig. 3 (a) - Geometria do caso Wagoner  
(b) - Modelo empregado para o punção e matriz fixa.

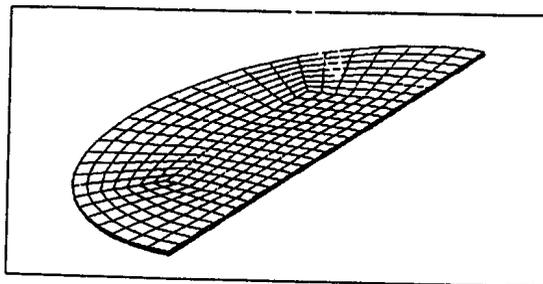
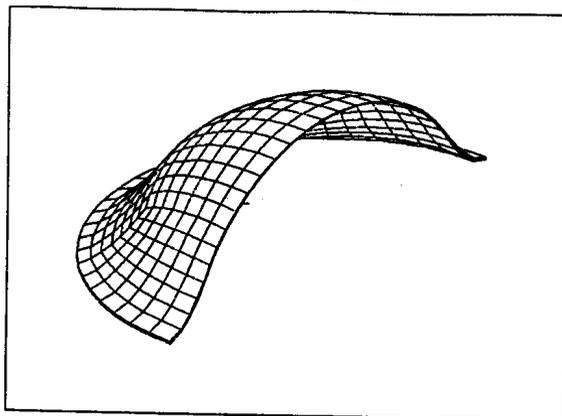


Fig. 4 - Malha inicial indeformada.

(a)



(b)

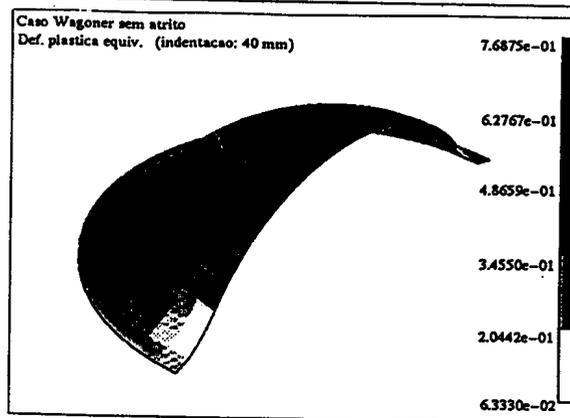


Fig. 5(a), (b) - Malha deformada e deformação plástica equivalente do caso sem atrito (indentação de 40 mm).

O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, valem, respectivamente  $E=69004$  MPa e  $\nu = 0.3$ . A tensão equivalente de von

Mises é dada por  $\bar{\sigma} = 589 (10^{-4} + \bar{\epsilon})^{0.216}$ . ( $\bar{\epsilon}$  é a deformação plástica equivalente). Somente uma quarta parte da estrutura, do punção e da matriz (fixa), foram discretizados, devido à simetria. Para modelização do punção, 3 superfícies do tipo Coons e uma plana foram empregadas (ver Fig. 3(b)). Para modelizar a matriz, tomou-se uma só superfície Coons. a malha empregada (duplicada por simetria) é mostrada na Fig. 4. Os 294 elementos empregados são isoparamétricos lineares tridimensionais de 8 nós. Dois exemplos foram analisados. O primeiro caso, sem atrito e com uma penalidade normal de  $1 \times 10^5$ . Nas Figs. 5(a) e (b), são fornecidas a malha deformada e os valores de deformação plástica equivalente. Pode-se concluir que a estricção da placa ocorrerá no centro da mesma.

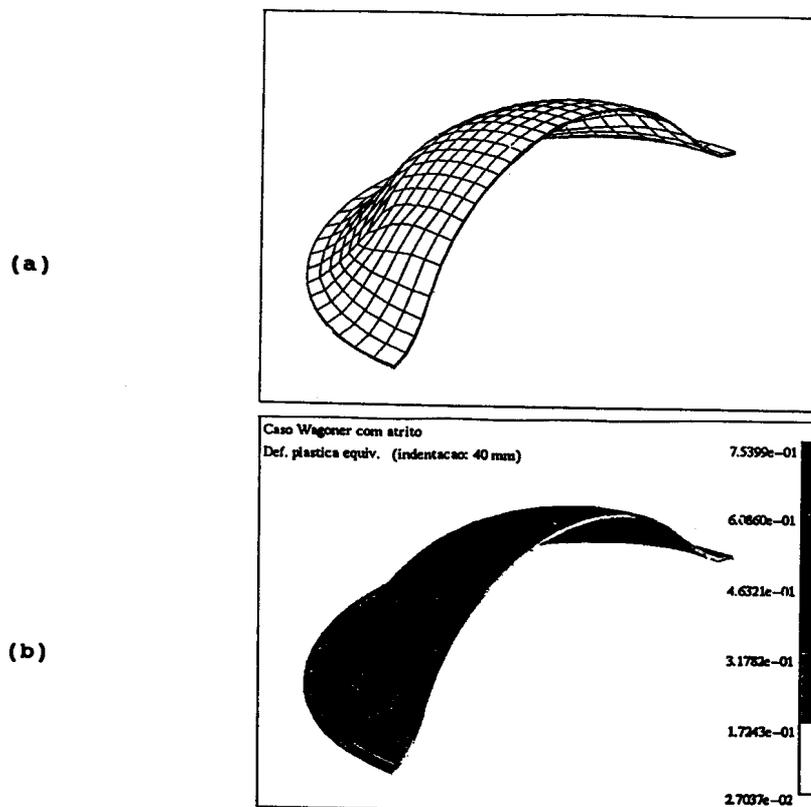


Fig. 6 (a), (b) - Malha deformada e deformação plástica equivalente do caso com atrito (indentação de 40 mm).

No segundo caso, o mesmo exemplo é analisado agora com atrito ( $K_r =$

$5 \times 10^3$  e  $\mu = 0.15$ ). Observa-se uma significativa alteração na distribuição da deformação plástica equivalente, com a estricção se deslocando do centro da placa em direção às bordas, conforme Fig. 6. As oscilações que observam-se nas deformações plásticas, tanto na Fig. 5 como 6, deve-se a efeitos de malha (ligação do domínio central quadrado da malha (Fig. 4) com os bordos de forma circular).

Finalmente na Fig. 7, os valores de força de conformação são fornecidos e observa-se um bom acordo com o relatório de Lee et all.

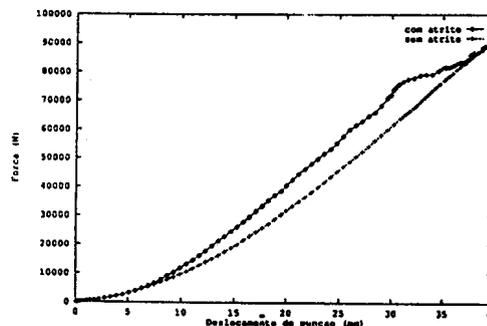


Fig. 7 - Força de conformação.

O número de iterações/etapas para o caso sem atrito foi de 101/226, enquanto que para o caso com atrito foi de 108/248.

#### CONCLUSÕES

A formulação apresentada permite tratar o contato tridimensional em grandes deformações em presença do atrito e considerando matrizes de formas quaisquer. A taxa de convergência obtida foi adequada ao que se espera do método de Newton-Raphson. A definição dos eixos locais (tangentes à matriz) que constitui o aspecto mais crítico deste trabalho demonstrou ser adequada e de fácil obtenção, como demonstra o exemplo deste trabalho e também outros casos indicados em [4].

#### REFERÊNCIAS

1. PONTHOT, J-P. & HOGGE, M., "The use of the Eulerian-Lagrangian FEM Metal Forming Including Contact and Adaptive Mesh", Proc. of ASME Winter Annual Meeting, 1991, págs. 1-6.
2. WRIGGERS, P., VU VAN, T. & STEIN, E., "Finite Element Formulation of Large Deformation Impact-Contact Problems with friction." Comp. & Structures, Vol. 37, 1990, págs. 319-331.
3. LEE, J. K., WAGONER, R. H. & NAKAMASHI, E., "A Benchmark test for sheet forming analysis." Report ERC/NSM-S-90-22, The Ohio State University, 1990.
4. BITTENCOURT, E. "Tratamento do Problema de Contato e Impacto em Grandes Deformações pelo Método dos Elementos Finitos". Tese de Doutorado, CEMACOM/CPGEC/UFRGS, 1994.