

PROCESOS ELASTOPLASTICOS CON GRANDES DEFORMACIONES. MODELO CONSTITUTIVO Y APLICACION A METALES

C. GARCIA GARINO

Instituto Tecnológico Universitario, Universidad Nacional de Cuyo
Centro Univeristario, Parque Gral. San Martín, 5500, Mendoza, Argentina

J. OLIVER

E. T. S. de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos
Gran Capitán s/n, E-08034, Barcelona, España

RESUMEN

En el trabajo se presenta un modelo constitutivo capaz de resolver problemas de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. Se desarrolla primero la formulación general y se trata luego el caso de los metales, en donde la novedad es la introducción *a posteriori* de la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas. En el trabajo se discute además la implementación numérica del modelo y se resuelven un problema de conformado de metales y un problema de impacto.

ABSTRACT

This paper describes a finite strain elastoplastic constitutive model. The general problem is derived in first term and then the case of metals is studied. In this last case the novelty is the introduction *a posteriori* of the small elastic strain hypothesis. The numerical implementation of the model in a computational code is discussed. A couple of applications are solved, studying a sheet metal forming as well as impact problems.

INTRODUCCION

La teoría de la Plasticidad constituye una herramienta fundamental para la simulación de procesos de deformación en sólidos, caracterizados por la aparición de *deformaciones irreversibles*. En la inmensa mayoría de los casos, el inicio de los fenómenos de plastificación se produce para pequeños valores de la deformación, pero el rango de deformaciones que debe ser considerado depende tanto del tipo de material como del proceso de deformación que se estudie. Así, en materiales frágiles (hormigón, cerámicas, rocas, etc...), la rotura se produce para pequeños valores de la deformación y el comportamiento plástico de interés puede ser modelado mediante modelos elastoplásticos con pequeñas deformaciones. La utilización de materiales más dúctiles, como el acero, en ciertas aplicaciones como las de la Ingeniería Civil limita, por consideraciones constructivas, el rango de deformaciones útiles o de servicio a pequeños valores, con lo que de nuevo pueden modelarse con la teoría de pequeñas deformaciones. En otros casos, sin embargo se utiliza un material dúctil en procesos en los que se producen grandes deformaciones; tal es el caso del acero en numerosas aplicaciones de la Ingeniería Mecánica (procesos de conformado de metales, análisis de problemas de impacto) cuya importancia hace necesaria la consideración no sólo de grandes desplazamientos sino también de grandes deformaciones en el sólido analizado.

La extensión de la Teoría de la Plasticidad en pequeñas deformaciones a los casos de deformaciones finitas se inicia, esencialmente, con los trabajos de Green y Naghdi [1] que han sido continuados hasta nuestros días por numerosos autores [2-5], configurando un entorno consistente en el que situar un modelo elastoplástico de grandes deformaciones.

En este trabajo se presenta un modelo de dicho tipo desarrollado por el primer autor en su tesis doctoral [6], que sigue, en líneas generales las propuestas de Simo, Ortiz y colaboradores [3-5] cuyas características más importantes son:

- Descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación. Esta hipótesis cumple el rol de la clásica descomposición aditiva de los tensores de deformación típica de la teoría de pequeñas deformaciones, que puede recobrase para el problema de grandes deformaciones mediante una adecuada definición de los tensores de deformación elásticos y plásticos (Simo y Ortiz [3])
- Utilización de una ecuación constitutiva hiperelástica para el cálculo de la respuesta elástica. Frente a otras alternativas, del tipo hipoelástico de amplia utilización en la práctica [7], la consideración de ecuaciones constitutivas hiperelásticas resulta plenamente consistente con la termodinámica de los sólidos deformables. Además presenta importantes ventajas de tipo computacional al ser la cinemática totalmente explícita [3], que se emplea sin necesidad de recurrir a costosos esquemas de integración [7].
- La novedad introducida en por el primer autor en su Tesis Doctoral [6], y discutida en otros trabajos previos de los autores [8-10], consiste en utilizar *a posteriori* la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas. Esta idea junto con el empleo de un algoritmo de integración de la ecuación constitutiva elastoplástica, del tipo predictor elástico-corrector plástico [3,11], permite la generalización del clásico algoritmo de retorno radial al caso con grandes deformaciones.

FORMULACION TEORICA

CINEMATICA

La cinemática del problema se define introduciendo la configuración intermedia, y que conduce a la clásica descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación F en sus componentes elástica y plástica [2]:

$$F = F^e F^p \tag{1}$$

La componente plástica del tensor de Cauchy-Green derecho se define mediante $C^p = F^{pT} F^p$ [1]. De manera análoga a la definición del tensor de Green Lagrange $E = \frac{1}{2}(C - G)$, se define su componente plástica $E^p = \frac{1}{2}(C^p - G)$, donde G es el tensor métrico en la configuración material. Luego en dicha configuración resulta la descomposición aditiva del tensor de Green Lagrange $E = E^e + E^p$ [1]. Calculando el push-forward ϕ_* [12] del tensor de Green-Lagrange, se obtienen expresiones semejantes de tensores espaciales en las configuraciones intermedia y deformada, ${}^i\Omega^e$ and ${}^i\Omega$, respectivamente, como se resume en la Tabla 1 [6]. En la figura 1 se esquematizan estas relaciones.

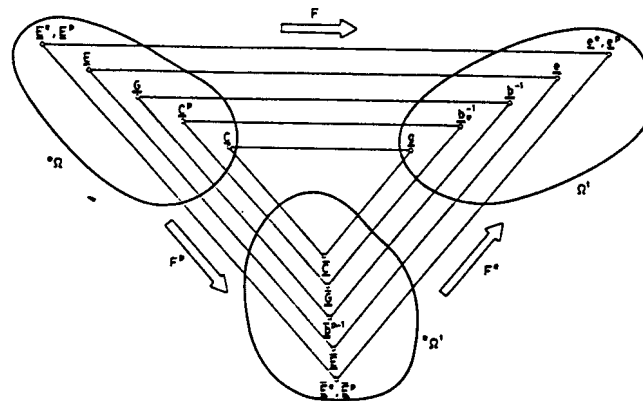


Figura 1 : Cinemática del continuo elastoplástico

En la configuración intermedia ${}^i\Omega^e$ se definen los tensores de deformación \bar{E} , \bar{E}^e y \bar{E}^p . El tensor de Almansi e y sus componentes elástica y plástica e^e y e^p , se definen en la configuración deformada ${}^i\Omega$. La componente elástica del tensor de Almansi se define como $e^e = \frac{1}{2}(g - b^{e-1})$, donde g es el

tensor métrico espacial, y el tensor de Finger elástico se calcula mediante $\mathbf{b}^{e-1} = \mathbf{F}^{e-T} \mathbf{F}^{e-1}$. Los tensores velocidad de deformación $\bar{\mathbf{D}}$ y \mathbf{d} en las configuraciones intermedia y deformada ${}^t\Omega^e$ y ${}^t\Omega$, respectivamente, se obtienen calculando las derivadas de derivadas de Lie L_v [12] de los tensores de deformación.

Tabla 1 : Cinemática del continuo elastoplástico

${}^o\Omega$	${}^t\Omega^e$	${}^t\Omega$
$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$	$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}^e + \bar{\mathbf{E}}^p$	$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p$
$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p$	$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{D}}^e + \bar{\mathbf{D}}^p$	$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$

ECUACION CONSTITUTIVA

En este punto se formula el modelo constitutivo capaz de describir el comportamiento de sólidos elastoplásticos con grandes deformaciones. El desarrollo del modelo cumple con los postulados de la mecánica no lineal de los medios continuos, y en consecuencia debe satisfacer el Principio de Objetividad, Simetría Material, la Segunda Ley de la termodinámica, etc. Además el modelo se desarrolla en el contexto de la Teoría de la Plasticidad con variables internas.

Funciones de Energía Libre, Fluencia y Potencial Plástico. Variables Internas.

La definición del modelo parte, de manera consistente con la cinemática adoptada, de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$. Consecuentemente el modelo se escribe en la configuración intermedia. Para ello se propone la siguiente función de energía libre:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \hat{\alpha}) \quad (2)$$

en donde $\hat{\alpha}$ es un conjunto de variables internas que tiene en cuenta la distribución de defectos en la red cristalina o *dislocaciones* [13-14] y sus movimientos, que gobiernan la propiedad del material que se conoce más ingenierilmente como *endurecimiento*. Teniendo en cuenta la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación puede escribirse $\mathbf{F}^e = \mathbf{F}^e(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p)$, y la ecuación (2) admite el siguiente caso particular:

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}(\mathbf{F}^e, \hat{\alpha}) \quad (3)$$

La introducción de la hipótesis de elasticidad desacoplada [15] permite expresar a la energía libre como la suma de dos componentes:

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}^e + \hat{\Psi}^p = \hat{\Psi}^e(\mathbf{F}^e) + \hat{\Psi}^p(\hat{\alpha}) \quad (4)$$

La sustentación física de esta hipótesis se basa en que los niveles de energía necesarios para distorsionar la red cristalina, que es la responsable de la deformación elástica, son diferentes de los niveles de energía necesarios para el deslizamiento intercrystalino.

Las funciones de Potencial y Fluencia Plásticas se escriben en el espacio de deformaciones. Con el fin de satisfacer el principio de equipresencia la función potencial se define empleando los mismos argumentos de la función de energía libre y así resultan:

$$\hat{G} = \hat{G}(\mathbf{F}^e, \hat{\alpha}) \quad \hat{F} = \hat{F}(\mathbf{F}^e, \hat{\alpha}) \quad (5)$$

En el contexto de la descomposición multiplicativa la regla de flujo se define mediante la evolución de la componente plástica del tensor gradiente de la deformación \mathbf{F}^p . El tensor gradiente de velocidad plástico $\mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1}$ tiene una interpretación física muy clara como puede verse, entre otros

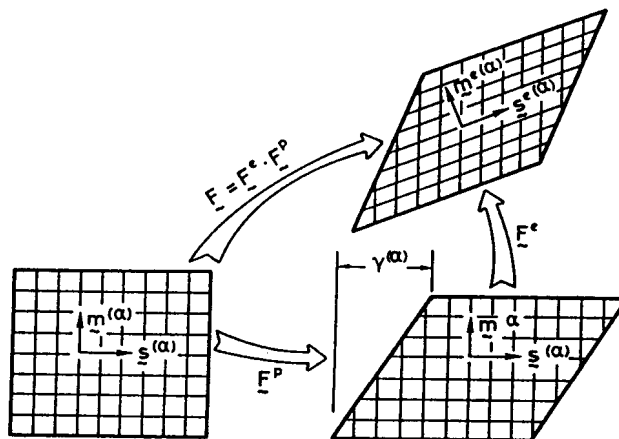


Figura 2 Cinemática de un sólido cristalino

autores, en los trabajos de Asaro [13] y Kroner y Todosiu [14]. La figura 2, según Asaro [13], ilustra la cinemática de un sólido cristalino, y la deformación debida un deslizamiento cristalográfico.

El movimiento del cristal puede expresarse en función del vector unitario s^i que indica la dirección del deslizamiento y de su recíproco m^i , para cada sistema elemental. La velocidad de deformación plástica, o velocidad de deslizamiento de las *dislocaciones* puede expresarse en función de la velocidad de deslizamiento de cada sistema elemental $\dot{\gamma}^i$ mediante:

$$L^p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}^i s^i \otimes m^i \quad (6)$$

El tensor gradiente de velocidad plástico admite la descomposición en una componente simétrica, el tensor velocidad de deformación plástica intermedia \bar{D}^p y una componente antisimétrica llamada velocidad de rotación plástica W^p . Una simplificación usual en este caso consiste en despreciar la componente antisimétrica de la regla de flujo, es decir imponer $W^p = 0$, y la ecuación (6) queda:

$$L^p \cong \bar{D}^p \quad (7)$$

Esta hipótesis simplificativa tiene el inconveniente de que la regla de flujo define la posición de la configuración intermedia salvo una rotación. Como el trabajo se reduce a modelos isotropos esta simplificación no acarrea inconvenientes, ya que los mismos son independientes de las rotaciones. La regla de flujo se relacionará posteriormente con la función potencial plástico y con la ecuación constitutiva. Las leyes que gobiernan el cambio o la evolución de las variables internas $\dot{\alpha}$ se definen en función de la regla de flujo mediante un conjunto de tensores H adecuados:

$$\dot{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} H(F^e, \alpha) \cdot \bar{D}^p \quad (8)$$

Las leyes de evolución de las variables internas se indican genéricamente mediante $(\dot{\cdot})$. Las variables internas pueden ser escalares, con lo cual la derivada material resulta objetiva, o tensores de segundo orden, para los cuales resulta deseable que la ley de evolución sea una derivada objetiva. Una manera

de conseguir este propósito es emplear la derivada plástica de Lie $L_v^p(\cdot)$ en la configuración intermedia, o la derivada de Lie $L_v(\cdot)$ en la configuración deformada. Si se sigue este camino, entonces se acepta implícitamente la existencia de una variable interna tensorial Λ definida en la configuración original con una ley de evolución del tipo $\dot{\Lambda} = H(F^p, \Lambda)$ [16,17]. Las variables internas tensoriales Λ y el tensor H , deben definirse respetando la física del problema.

A los elementos del modelo constitutivo definidos anteriormente hay que imponerles la restricción que surge del principio de Objetividad [18, 19], y las ecuaciones (4-5) se reescriben [6]:

$$\dot{\Psi}^e(F^e) = \Psi^e(\bar{E}^e) \quad (9)$$

$$\bar{G} = \bar{G}(\bar{E}^e, \bar{\Lambda}) \quad (10)$$

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{E}^e, \bar{\Lambda}) \quad (11)$$

La hipótesis de elasticidad desacoplada permite escribir el llamado Segundo tensor de Tensiones de Piola-Kirchhoff en la configuración intermedia \bar{S} en función de la componente elástica del tensor de deformación en la configuración intermedia: $\bar{S} = \bar{S}(\bar{E}^e)$. De esta manera la función potencial se puede escribir en el espacio de tensiones como:

$$\bar{G} = \bar{G}(\bar{S}(\bar{E}^e), \bar{\Lambda}) \quad \bar{F} = \bar{F}(\bar{S}(\bar{E}^e), \bar{\Lambda}) \quad (12)$$

La regla de flujo dada por la ecuación (7), puede escribirse en función del potencial plástico definida por la ecuación (10.b) mediante:

$$\bar{D}^p \propto \frac{\partial \bar{G}(\bar{S}, \bar{\Lambda})}{\partial \bar{S}} \quad (13)$$

que a su vez permite reexpresar la ley de evolución de las variables internas $\bar{\Lambda}$ mediante:

$$\dot{\bar{\Lambda}} \propto H(\bar{S}, \bar{\Lambda}) \bar{D}^p \quad (14)$$

Si la variable interna $\bar{\Lambda}$ tiene carácter tensorial su ley de evolución viene dada por $L_v^p(\Lambda)$.

Cálculo de las tensiones y la Disipación Plástica.

Empleando la noción de hiperelasticidad [20] las tensiones se calculan a partir del Potencial definido por la ecuación (9) según:

$$\bar{S} = \rho_o \frac{\partial \Psi^e(\bar{E}^e)}{\partial \bar{E}^e} \quad (15)$$

El tensor de elasticidad tangente en la configuración intermedia resulta a partir de la ecuación (15):

$$\bar{A}^e = \rho_o \frac{\partial^2 \Psi^e(\bar{E}^e)}{\partial \bar{E}^e \otimes \partial \bar{E}^e} \quad (16)$$

Observación 1 Es importante destacar que los resultados dados por las ecuaciones (15-16) se han obtenido imponiendo a la expresión general dada por las ecuaciones (1) o (2):

- Hipótesis de Elasticidad desacoplada
- Restricción de Objetividad

La restricción debida a la simetría material debe cumplirse para modelar correctamente el material que se estudia, pero no constituye una restricción constitutiva para los resultados obtenidos. Sin embargo la simplificación consistente en despreciar la velocidad de rotación plástica, restringe los materiales admisibles al caso isótropo.

Imponiendo la condición de consistencia plástica de manera objetiva, para lo cual se emplea la derivada plástica de Lie resulta, se obtiene el tensor tangente elastoplástico [6]:

$$L_v^p(\bar{S}) = \left[\bar{A}^e - \frac{\left\{ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{S}} : \bar{A}^e \right\} \otimes \left\{ \bar{A}^e : \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}} \right\}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{S}} : \bar{A}^e : \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}} + H} \right] : \bar{D} \quad L_v^p(\bar{S}) = \bar{A} : \bar{D} \quad (17)$$

Finalmente queda por verificar que el modelo cumple con la segunda Ley de la Termodinámica. Para ello se escribe en la configuración intermedia la desigualdad de Clausius:

$$\bar{S} : \bar{D} - \rho_o \dot{\bar{\Psi}} \geq 0 \quad (18)$$

y de acuerdo con la hipótesis de elasticidad desacoplada resulta:

$$\bar{S} : \bar{D} - \rho_o \left(\dot{\bar{\Psi}}^e(\bar{E}^e) + \dot{\bar{\Psi}}^p(\bar{\Lambda}) \right) \geq 0 \quad (19)$$

Teniendo en cuenta la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformaciones en la configuración intermedia $\bar{D} = \bar{D}^e + \bar{D}^p$ (ver figura 1) la ecuación (19) se descompone en una igualdad dada por la ecuación (15) y una desigualdad que caracteriza la disipación plástica \mathcal{D}^p como:

$$\bar{S} : \bar{D}^e - \rho_o \dot{\bar{\Psi}}^e(\bar{E}^e) = 0 \quad (20)$$

$$\mathcal{D}^p \stackrel{\text{def}}{=} \bar{S} : \bar{D}^p - \rho_o \dot{\bar{\Psi}}^p(\bar{\Lambda}) \geq 0 \quad (21)$$

Este resultado muestra que la ecuación constitutiva verifica o *satisface* la Segunda ley de la termodinámica. Sin embargo el resultado que refleja la ecuación (20) se justifica en base a consideraciones de equilibrio de energía [20], con lo que basta cumplir con la Primera Ley. En los últimos años muchos autores obtienen la ecuación (20) utilizando directamente la desigualdad de Clausius-Duhem, que puede considerarse como una forma alternativa de realizar el cálculo.

La ecuación (21) define la disipación plástica \mathcal{D}^p en la configuración intermedia. La derivada material $\dot{\bar{\Psi}}^p(\bar{\Lambda})$ puede expresarse en función del conjunto de las fuerzas termodinámicas $\bar{P} = \{\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n\}$, conjugadas a las variables internas $\bar{\Lambda}$ mediante: $\dot{\bar{\Psi}}^p(\bar{\Lambda}) = \bar{P} : \dot{\bar{\Lambda}}$, y la disipación resulta:

$$\mathcal{D}^p \stackrel{\text{def}}{=} \bar{S} : \bar{D}^p + \bar{P} : \dot{\bar{\Lambda}} \geq 0 \quad (22)$$

A partir de las definiciones de los elementos que caracterizan el modelo, y luego de imponer las restricciones y simplificaciones antes mencionadas, en el Cuadro 1 se resume la expresión del modelo en la configuración intermedia.

$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{E}^e + \bar{E}^p \\ \bar{S} &= \rho_o \frac{\partial \Psi^e(\bar{E}^e)}{\partial \bar{E}^e} \\ \dot{\gamma} &\geq 0 \quad \bar{F} \leq 0 \quad \dot{\gamma} \bar{F} = 0 \\ \bar{D}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}} \\ \mathcal{D}^p &= \bar{S} : \bar{D}^p + \bar{P} : \dot{\bar{\Lambda}} \geq 0 \end{aligned}$

Cuadro 1 Expresión del Modelo en la Configuración Intermedia.

Expresión del Modelo en la Configuración Deformada

En este punto se deduce la expresión espacial del modelo a partir de los resultados obtenidos en la configuración Intermedia. Con este motivo se emplea la fórmula de Doyle-Ericksen [21].

Para obtener el tensor de tensiones de Kirchhoff en la configuración deformada se parte de la función de energía libre dada por la ecuación (9), que se expresa en función de argumentos espaciales mediante:

$$\bar{\Psi}^e(\bar{E}^e) = \bar{\Psi}^e(\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{e}^e \cdot \mathbf{F}^e) = \bar{\psi}^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e) \quad (23)$$

teniendo en cuenta que mediante la la regla de la cadena resulta:

$$\frac{\partial \bar{\psi}^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} = \mathbf{F}^e \cdot \frac{\partial \bar{\Psi}^e(\bar{E}^e)}{\partial \bar{E}^e} \cdot \mathbf{F}^{eT} \quad (24)$$

El push-forward elástico de la ecuación (15) $\tau = \phi_*^e \bar{S}$ permite obtener, teniendo en cuenta la ecuación (24):

$$\tau = \phi_*^e \bar{S} = 2 \rho_o \mathbf{F}^{eT} \cdot \frac{\partial \bar{\Psi}^e(\bar{E}^e)}{\partial \bar{E}^e} \cdot \mathbf{F}^{eT} = 2 \rho_o \frac{\partial \bar{\psi}^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (25)$$

con lo que se ha obtenido un resultado alternativo al dado por la ecuación (15), solo que expresado en función del tensor elástico de Almansi \mathbf{e}^e , en la configuración deformada. Calculando el push-forward elástico de la ecuación (16) se obtiene el tensor de elasticidad tangente espacial $\mathbf{a}^e = \phi_*^e \mathbf{A}^e$:

$$\mathbf{a}^e = \rho_o \frac{\partial^2 \bar{\psi}^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e)}{\partial \mathbf{e}^e \otimes \partial \mathbf{e}^e} \quad (26)$$

El empleo de la fórmula de Doyle-Ericksen obliga a incluir a la componente elástica \mathbf{F}^e como argumento de la energía libre, que resulta entonces una forma particular. Para satisfacer el Principio de Equipresencia es necesario también incluir a \mathbf{F}^e como argumento de las funciones de Potencial Plástico y de Fluencia, además de la tensiones τ y de las variables internas α . Luego se define:

$$g \stackrel{\text{def}}{=} g(\tau, \alpha, \mathbf{F}^e) \quad (27)$$

$$f \stackrel{\text{def}}{=} f(\tau, \alpha, \mathbf{F}^e) \quad (28)$$

Este requisito puede interpretarse a partir de la regla de flujo. Para ello recordando que $\frac{\partial g}{\partial \tau} \propto d^p$ y que $\frac{\partial G}{\partial \bar{S}} \propto \bar{D}^p$, imponiendo que el multiplicador $\dot{\gamma}$ sea el mismo en las dos configuraciones y teniendo en cuenta, que las componentes plástica del tensor velocidad de deformación en las configuraciones intermedia y deformada satisfacen la relación $d^p = \phi_*^e \bar{D}^p$ resulta:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \phi_*^e \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}} \quad (29)$$

En la deducción del calculo del tensor de tensiones de Kirchhoff mediante la formula de Doyle-Ericksen, no se ha tenido en cuenta la restricción que significa la simetría material. En este caso la dependendencia de \mathbf{F}^e se debe tener en cuenta mediante $\mathbf{F}^{e*} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{Q}$, con $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$, donde \mathcal{G} es el grupo de simetría del sólido. Si el sólido es isótropo resulta $\mathcal{G} = \Theta$, donde Θ es el grupo ortogonal completo. Luego, a partir de la descomposición multiplicativa $\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e \cdot \mathbf{R}^e$, y haciendo $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{eT}$, la dependencia de \mathbf{F}^e se expresa a mediante el tensor de estiramiento izquierdo \mathbf{V}^e , o bien mediante otro tensor simétrico derivado del mismo como el tensor izquierdo de Cauchy-Green elástico \mathbf{b}^{*e} , o bien mediante el tensor de Finger Izquierdo \mathbf{b}^{e-1} . De esta manera la función de energía libre y las funciones de fluencia y potencial plástico resultan:

$$\psi = \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e-1}) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}^{e-1}) \quad (30)$$

$$g = g(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}^{e-1}) \quad (31)$$

$$f = f(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}^{e-1}) \quad (32)$$

El tensor de tensiones de Kirchhoff y el tensor de elasticidad tangente se escriben en este caso:

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e-1})}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (33)$$

$$\mathbf{a}^e = \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e-1})}{\partial \mathbf{e}^e \otimes \partial \mathbf{e}^e} \quad (34)$$

Observación 2 Es importante destacar que los resultados expresados por las ecuaciones (30-34) se han obtenido a partir de la expresión general dada por la ecuaciones (1) o (2), empleando las siguientes restricciones o hipótesis:

- Elasticidad desacoplada
- Objetividad
- Formula de Doyle-Ericksen
- Simetría Material

La expresión espacial del tensor tangente elastoplástico \mathbf{a} se obtiene calculando el push-forward elástico de la ecuación (17), con lo que se obtiene en la configuración espacial ${}^t\Omega$:

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = \left[\mathbf{a}^e - \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{a}^e \right\} \otimes \left\{ \mathbf{a}^e : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right\}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{a}^e : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} + H} \right] : \mathbf{d} \quad L_v(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{a} : \mathbf{d} \quad (35)$$

La disipación plástica se obtiene mediante un razonamiento análogo al de la configuración material, y en este caso se expresa mediante:

$$\mathcal{D}^p \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p + \mathbf{p} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (36)$$

donde $\mathbf{p} = \phi_*^e \bar{\mathbf{P}}$ resultan las fuerzas termodinámicas conjugadas a las variables internas espaciales $\boldsymbol{\alpha} = \phi_*^e \bar{\boldsymbol{\Lambda}}$.

La expresión espacial del modelo se resume en el Cuadro 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \\ \boldsymbol{\tau} &= \frac{\partial \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e-1})}{\partial \mathbf{e}^e} \\ \dot{\gamma} &\geq 0 \quad f \leq 0 \quad \dot{\gamma} f = 0 \\ \mathbf{d}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \\ \mathcal{D}^p &= \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p + \mathbf{p} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \end{aligned}$$

Cuadro 2 Expresión del Modelo en la Configuración Deformada

APLICACION AL CASO DE METALES

Para muchos materiales de interés práctico, como los metales, las deformaciones elásticas son pequeñas, el tensor F^e se aproxima a la unidad, y los tensores b^{e-1} y b^{*e} tienden al tensor métrico espacial g . Para este caso la distinción entre las configuraciones intermedia y deformada carece de importancia. En las ecuaciones (30-34) ya no hace falta incluir el tensor b^{e-1} , o el tensor b^{*e} .

Además, como las deformaciones elásticas son pequeñas, es suficiente con caracterizar la componente elástica de la función de energía libre mediante una función cuadrática del tensor elástico de Almansi e^e y de las constantes del material λ y μ según:

$$\psi^e = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{1}{2} \lambda \operatorname{tr}(e^e)^2 + \mu (e^e : e^e) \right] \quad (37)$$

que ha sido empleada por los autores [8-10] como una alternativa a los modelos neohookeanos utilizados por otros autores [3-5].

El modelo es asociado, y para este caso resultan, en la configuración deformada Ω^e , $g = f$, y la regla de flujo es proporcional a la normal al criterio de fluencia en el espacio de tensiones de Kirchhoff. Se adopta para caracterizar la plasticidad un Modelo de Von Mises o $J2$ [19], y el invariante $J2$ se escribe como:

$$J2 = \operatorname{tr} \left(\tau'^{ij} \tau'^{kl} g_{ik} g_{jl} \right) \quad (38)$$

en donde se ha simplificado la expresión general al reemplazar a b^{e-1} por g y el criterio de fluencia resulta:

$$f(\tau, \bar{e}^p) = \sqrt{J2(\tau)} - \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_y(\bar{e}^p) \quad (39)$$

El endurecimiento adoptado en este caso es isótropo, y la componente plástica de la función de energía libre que gobierna el endurecimiento resulta una función de la deformación plástica efectiva \bar{e}^p :

$$\psi^p = \psi^p(\bar{e}^p) \quad (40)$$

donde la deformación plástica efectiva es un escalar que se define mediante: $\bar{e}^p = d^p : d^p$.

En este trabajo se emplean dos tipos de endurecimiento. El caso más sencillo modela endurecimiento isótropo lineal, y para este caso la tensión de fluencia uniaxial viene dada por:

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + H \bar{e}^p \quad (41)$$

en donde H es el parámetro de endurecimiento.

Para este caso la componente plástica de la energía libre resulta:

$$\psi^p = \frac{1}{2} H \bar{e}_p^2 \quad (42)$$

y es inmediato observar que la fuerza termodinámica conjugada de \bar{e}^p es la tensión de fluencia σ_y .

Además del caso descrito se emplea una función de endurecimiento no lineal:

$$\sigma_y = a(b + c \bar{e}^p)^n \quad (43)$$

en el que a , b , c y n son constantes que dependen del material.

Para este caso la componente plástica de la energía libre se escribe:

$$\psi^p = \frac{a}{c(n+1)} (b + c \bar{e}^p)^{n+1} \quad (44)$$

Debe mencionarse que este modelo, en ausencia de plasticidad, es capaz de modelar problemas con grandes desplazamientos pero pequeñas deformaciones. Esta limitación se debe al tipo de función de elegida para modelar la energía libre elástica ψ^e . Este hecho no invalida de ninguna manera la formulación general ya que las simplificaciones se han introducido *a posteriori*, luego de obtener las expresiones generales del modelo, y no como una hipótesis de partida.

IMPLEMENTACION NUMERICA

Dada una configuración conocida ${}^t\Omega$, definida por el tensor gradiente de la deformación tF , y las variables ${}^te^e$ y ${}^t\alpha$. Ante un incremento de desplazamientos $\Delta\mathbf{u}$ que definen el tensor gradiente de deformación incremental $f = (I + \text{Grad } \mathbf{u})$ resulta una configuración deformada ${}^{t+\Delta t}\Omega$, que se caracteriza mediante el tensor gradiente de la deformación ${}^{t+\Delta t}F = f {}^tF$. El problema consiste en actualizar las variables del problemas, verificando el modelo constitutivo, para la nueva configuración ${}^{t+\Delta t}\Omega$. Para ello se emplea un algoritmo predictor corrector [11].

PREDICTOR ELASTICO

Para este problema las variables plásticas no cambian (${}^{t+\Delta t}F^p{}^{TR} = {}^tF^p$). La componente elástica (*predictora*) del tensor gradiente de la deformación se calcula mediante:

$${}^{t+\Delta t}F^e{}^{TR} = {}^{t+\Delta t}F ({}^{t+\Delta t}F^p{}^{TR})^{-1} = f {}^tF ({}^tF^p)^{-1} = f {}^te^e \quad (45)$$

El predictor del tensor elástico de Finger ${}^{t+\Delta t}b^e-1{}^{TR}$ resulta:

$${}^{t+\Delta t}b^e-1{}^{TR} = {}^{t+\Delta t}F^e-T {}^{t+\Delta t}F^e-1 = f^{-T} {}^tb^e-1 f^{-1} \quad (46)$$

Luego las tensiones predictoras σ^{TR} se calculan a partir de la ec (37) en función del predictor del tensor elástico de Almansi ${}^{t+\Delta t}e^e{}^{TR} = \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t}g - {}^{t+\Delta t}b^e-1{}^{TR})$

Es importante destacar que el problema elástico se basa en el cálculo de una expresión exacta (definición del tensor de Almansi), con lo que se evitan costosas integraciones numéricas típicas de los modelos hipoeelásticos.

PROBLEMA PLASTICO

En este caso la configuración deformada permanece fija y las variables internas se actualizan para satisfacer la ecuación constitutiva. Para este problema Simo [5] ha propuesto integrar el flujo plástico en la configuración original:

$$\dot{C}^p = 2 \phi^* d^p = 2 \lambda \phi^* \mathbf{n} = 2 \lambda N \quad (47)$$

donde ϕ^* indica el operador pull-back [12] y $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$. Integrando la ecuación (47) mediante un esquema de Euler implícito resulta:

$${}^{t+\Delta t}C^p - {}^tC^p = 2 \lambda^{t+\Delta t} N \quad (48)$$

Calculando el push-forward de esta expresión se obtiene [6]:

$${}^{t+\Delta t}b^e-1 = {}^{t+\Delta t}b^e-1{}^{TR} + 2 \lambda^{t+\Delta t} \mathbf{n} \quad (49)$$

El factor $2 \lambda^{t+\Delta t} \mathbf{n}$ se calcula mediante el uso del algoritmo de retorno radial. Si la función de endurecimiento es lineal como en la ecuación (41), este algoritmo conduce a una expresión cerrada. Si la función de endurecimiento es no lineal, como la dada por la ecuación (43), entonces se debe resolver una ecuación no lineal *escalar* para calcular el multiplicador γ , como se muestra detalladamente en [6].

APLICACIONES

ESTIRAMIENTO DE UNA LÁMINA CIRCULAR CON PUNZÓN CILÍNDRICO

En este problema se estudia el estiramiento de una lámina circular mediante un punzón cilíndrico, como se muestra en la figura 3. La geometría del problema ha sido propuesta por Saran et al [22], y los datos del material son los del problema anterior. Se ha empleado una malla uniforme de 50 elementos Q4/P0 a lo largo de la lámina y 3 elementos a través del espesor. El problema se resuelve empleando una interface no friccional, y además considerando el rozamiento con $\mu = 0.15$.

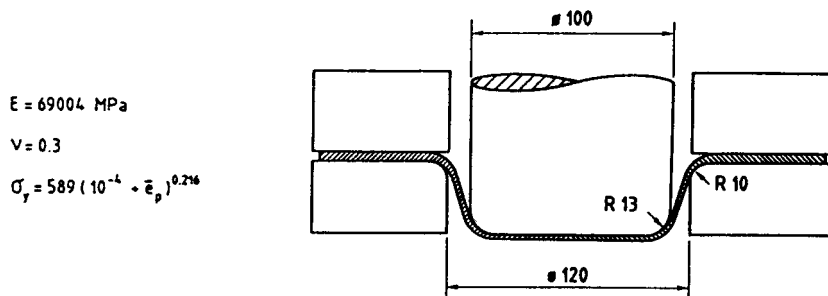


Figura 3 Estiramiento de una lámina circular con un punzón cilíndrico: Geometría y datos del material.

La influencia de la fricción se ilustra comparando los perfiles de deformación plástica correspondiente a la fila inferior de nudos de la malla efectiva para ambas interfaces. En la figura 4 puede notarse que para el caso sin fricción aparece un ligero pico en los valores de deformación plástica efectiva debajo de la esquina del punzón. Para el caso friccional el máximo en los valores de la deformación plástica efectiva aparece netamente destacado.

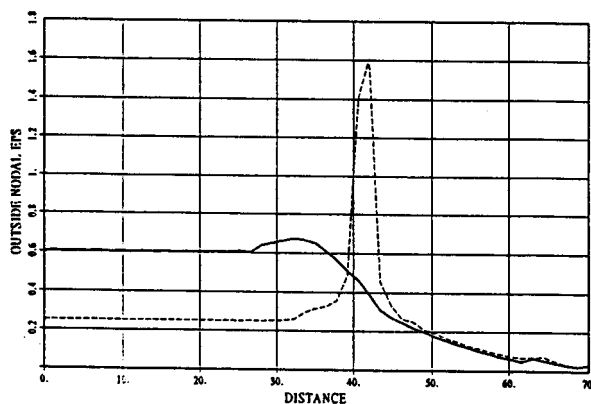


Figura 4 Estiramiento de una lámina circular con un punzón cilíndrico: Perfiles de deformación plástica efectiva.

En la figura 5 se muestra la lámina deformada para 30 mm de embutición, a la que se le ha superpuesto las isolíneas de igual deformación plástica efectiva. En la figura superior se muestra el caso sin rozamiento y en la inferior el problema con $\mu = 0.15$. Como puede verse comparando dichas figuras el espesor que tiene la pieza refleja la distribución de la deformación plástica efectiva.

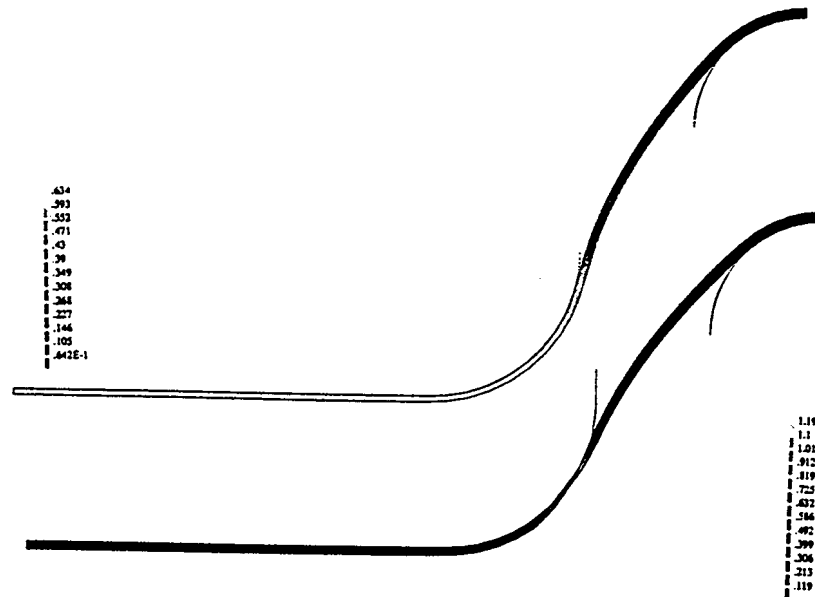


Figura 5 Estiramiento de una lámina circular con un punzón cilíndrico: deformada de la lámina y contorno de deformación plástica efectiva. Figura superior $\mu = 0$, figura inferior $\mu = 0.15$.

IMPACTO DE UNA BARRA CILINDRICA CONTRA UNA PARED RIGIDA

En este caso se estudia el impacto de una barra circular sometida a una velocidad inicial de 227 m/seg contra una pared rígida. La barra posee una longitud y radio iniciales de 32.4 y 3.2 mm respectivamente. Las propiedades del material son las del cobre: $E = 117GPa$, $\nu = 0.35$, $\sigma_y = 0.4GPa$, y $H = 0.1GPa$. La barra ha sido modelada con 216 elementos Q4/P0, 6 en sentido radial y 36 en sentido longitudinal. Las condiciones de contorno en la pared rígida se han simulado mediante el empleo de apoyos deslizantes. El transitorio que se estudia transcurre en $80 \mu s$, momento en que la barra se despega. Para modelar el transitorio se han empleado 8000 pasos de tiempo constantes.

En la figura 6 se muestra, en la misma escala, la barra original y sus deformadas para diferentes etapas del transitorio.

El problema también se ha analizado para el caso tridimensional, empleando en este caso 972 elementos sólidos 3D Q8/P0, hexaédrico lineal con presión constante. Debido a la simetría del problema sólo se ha modelado un cuarto de la barra. Los resultados obtenidos son indistinguibles de los obtenidos para el caso bidimensional mediante el uso de elementos axilsimétricos.

Los resultados obtenidos muestran una excelente concordancia con los disponibles en la literatura, lo que se ilustra en la tabla 2, en la que se comparan los valores de la altura y radio finales, así como

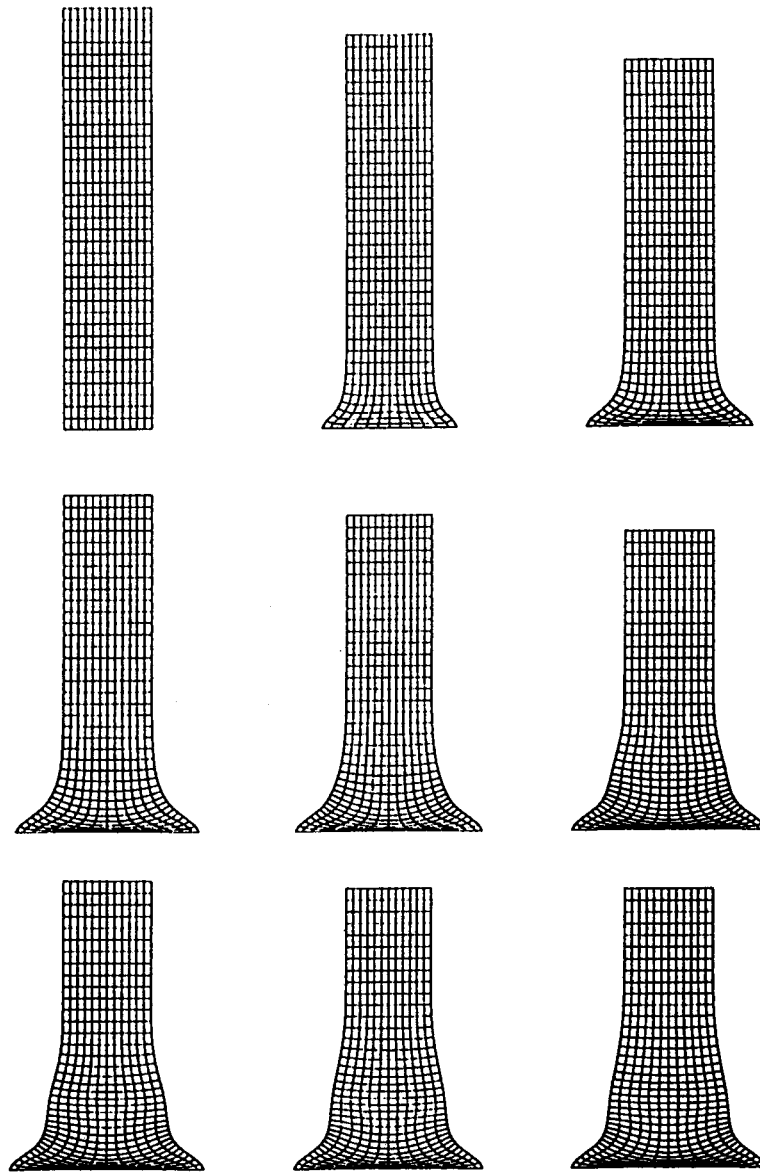


Figura 6 Impacto de una barra cilíndrica: Barra deformada para diferentes instantes de tiempo.

la máxima deformación plástica efectiva para distintos códigos.

Tabla 2 Impacto de la barra: comparación de resultados

CODIGO	Radio final	Long. final	Max. $\bar{\epsilon}_p$
Este trabajo 2D	7.11	21.47	3.09
Este trabajo 3D	7.11	21.47	3.09
NIKE2D [23]	7.07	21.47	2.97
DYNA2D [24]	7.13	21.47	3.05
DYNA3D [25]	7.03	21.47	2.96
LIU [26]	7.15	21.42	
PONTHOT [27]	7.12	21.43	3.13
MARC [28]	7.12	21.43	3.13

CONCLUSIONES

En el trabajo se han presentado los elementos de un modelo constitutivo capaz de tratar sólidos sometidos a grandes deformaciones. El modelo resulta totalmente consistente con la Mecánica de los medios continuos, y su deducción se ha hecho de manera general. El caso particular de los metales se trata de forma novedosa introduciendo a posteriori la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas.

La implementación numérica, que se basa en un algoritmo predictor corrector, y emplea el algoritmo de retorno radial para el paso corrector. Es muy sencilla para implementar en cualquier código de elementos finitos no lineal, y resulta eficiente en términos de costo computacional

El modelo ha sido ensayado mediante problemas no lineales complejos tanto en régimen estático como dinámico. En algunos casos estos ejemplos incluyen efectos de contacto y fricción. En todos estos problemas se han obtenido excelentes resultados, y otros casos pueden consultarse en otros trabajos de los autores citados en el paper.

En resumen, puede concluirse que a partir de un modelo constitutivo riguroso, y la introducción de una serie de simplificaciones adecuadas, se ha obtenido una herramienta computacional robusta y eficiente.

REFERENCIAS

- [1] Green A. E. and Nagdhi P. M., *A general theory of elastic plastic continuum*, *Archs. Ration. Mech. Analysis*, 18, 251:281, 1965
- [2] Lee E. H., *Elastic-Plastic deformation at finite strains*, *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, pp. 1- 6, 1969.
- [3] Simo J. C. and Ortiz M., *A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, Vol. 49, pp. 221- 245, 1985.
- [4] Simo J.C.: *A Framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I Continuum Formulation*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66, pp. 199- 219, 1988.
- [4] Simo J.C., *A Framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part II* - *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, Vol. 66, pp. 199-219, 1988 and Vol 68 pp. 1-31, 1988.
- [6] García Garino C., *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*, Tesis doctoral E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 1993.
- [7] Hughes T.J.R., *Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate-Independent Deviatoric Plasticity*, en *Theoretical Foundations for large-scale Computations for Nonlinear Material Behaviour*, S.Nemat-Nasser, R.J.Asaro and G.A.Hegemier, editores, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Holanda, 1984.
- [8] García Garino C. and Oliver J., *A numerical model for elastoplastic large strain problems*. *Funda-*

- mentals and applications*, in Computational Plasticity, R. Owen et al Ed., Pineridge Press-CIMNE, Vol 1, 117:129, 1992.
- [9] García Garino, C. y Oliver, J.: *Use of a frictional finite strain elastoplastic model for the simulation of sheet metal forming processes*, in Numerical Methods in Engineering 92, Hirsch Ch. et al (Ed.), pp. 185-192, 1992.
 - [10] García Garino, C. y Oliver, J., *Use of a large strain elastoplastic model for simulation of metal forming processes*, in Chenot J.L. (Ed.), Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Sophia-Antipolis, pp. 467-472, (1992).
 - [11] Simo J.C. y Hughes, T.J.R.: *General Return Mapping Algorithms for rate-independent Plasticity*, en Constitutive Equations for Engineering Materials: Theory and Applications, Desai C. S., Ed., Elsevier, 1987.
 - [12] Marsden J.E. and Hughes T.J.R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
 - [13] Asaro R.J.: *Crystal Plasticity*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 1-12, 1984.
 - [14] Kroner E. y Teodosiu C.: *Lattice defect approach to plasticity and viscoplasticity*, in Problems of Plasticity, Sawczuk A. Ed., pp 45-88, Noordhoff International Publishing, 1974.
 - [15] Lubliner J.: *On the thermodynamic foundations of non-linear solids mechanics.*, International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 7, pp. 237-254, 1972.
 - [16] Eve R.A., Gultop T. y Reddy B.D.: *An Internal variable finite-strain theory within the framework of Convex Analysis*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol XLVIII, no. 4, pp. 625-643, 1990.
 - [17] Pinsky P.M., Ortiz M. y Taylor R.L. *Operator Split methods in the numerical solution of the finite deformation elastoplastic dynamic problem*, Computer and Structures, Vol. 17, no. 3, pp. 345-359, 1983.
 - [18] Malvern L.E.: *Introduccion to Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
 - [19] Lubliner J.: *Plasticity Theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1990.
 - [20] Desai S.C. y Siriwardane H.J., *Constitutive Laws For Engineering Materials*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1984.
 - [21] Doyle T.C. y Ericksen J.L.: *Nonlinear Elasticity*, in Advances in Applied Mechanics, Vol. 4, 1956.
 - [22] Saran M., Schedin E., Samuelsson A., Melander A. and Gustafsson C., *Computational and Experimental Modeling of Stretch Forming Operations*. Publication 90:2, Chalmers University, Goteborg, 1990.
 - [23] Hallquist J.O.: *NIKE2D - A vectorized Implicit, Finite deformation Finite element code for Analyzing the Static and Dynamic response of 2-D Solids with interactive Rezoning and graphics*, Report UCID-19677, Rev 1, Lawrence Livermore National Laboratory, 1986
 - [24] Hallquist J.O.: *User's Manual for DYNA2D - An explicit Two-dimensional Hydrodynamic Finite element code with Interactive rezoning*, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, report UCID-18756, Rev. 1, 1982.
 - [25] Hallquist J.O.: *Theoretical Manual for DYNA3D*, Report UCID-19041, Lawrence Livermore Laboratory, Junio 1982.
 - [26] Liu W.K., Chang H., Chen H. y Belytschko T.: *Arbitrary Lagrangian Eulerian Petrov-Galerkin Finite elements for Nonlinear Continua*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 68, pp. 259-310, 1988.
 - [27] Ponthot J.Ph. *The use of the eulerian lagrangian formulation including contact applications to forming simulations via FEM*, Proc. del congreso NUMIFORM 92, Balkema.
 - [28] Kamoulakos A.: *A Simple Benchmark for Impact*, Finite Elements News, pp. 31-35, NAFEMS, UK, Julio 1990.