

RESOLUCION DE FLUJO POTENCIAL Y GENERACION DE MALLAS ALREDEDOR  
DE CASCADAS DE PERFILES POR TRANSFORMACION CONFORME

Mario A. Storti\*

*INTEC (CONICET-UNL), Güemes 3450, 3000-Santa Fe, Argentina*

**Resumen**

El flujo potencial alrededor de cascadas de perfiles, comúnmente encontradas en turbomaquinaria centrífuga o axial es resuelto por transformación conforme. La cascada es llevada por una serie de transformaciones a flujo alrededor de un círculo con una fuente y un sumidero puntuales. El proceso involucra una transformación de Theodorsen para llevar el exterior de un cuasi-círculo al exterior del círculo final. Este paso es el único numérico en el sentido de que involucra el cálculo de una serie de coeficientes que se hallan a través de un proceso iterativo. El método ha demostrado poseer convergencia espectral, es decir, mejor que cualquier potencia del número de coeficientes. Para cascadas con gran densidad de perfiles la convergencia del esquema iterativo para hallar los coeficientes se deteriora notablemente. En este trabajo se utiliza la mejora introducida por Moretti[1] para ampliar las posibilidades del método. Se presentan resultados obtenidos en cascadas para maquinaria axial y centrífuga. El método permite obtener también mallas de elementos finitos para análisis basados en la resolución de las ecuaciones de Euler o Navier Stokes.

**Summary**

In this work, potential flow around cascades for axial or centrifugal turbomachinery is solved by a conformal mapping method. The cascade is mapped via a chain of transformations to the exterior of a circle with point source and sink. The process involves a Theodorsen mapping to bring the exterior of a quasi-circle to the exterior of the final circle. This step is the only numerical one, in the sense that it requires a series of coefficients which are obtained via an iterative process. The method has shown to have spectral convergence, in the sense that the convergence is better than any finite power of the number of coefficients. For cascades with large density of profiles the convergence of the iterative algorithm to obtain the coefficients of the Theodorsen transformation is bad, and the range of application of the method is limited. To overcome this problem, the modification introduced by Moretti [1] to the original Theodorsen mapping has been implemented. Results for cascades in axial or centrifugal turbomachinery are presented. The resultant conformal mapping is useful also for the generation of good quality meshes around representative angular sectors of axial or centrifugal cascades for deeper analysis with Euler or Navier-Stokes codes.

---

\* Miembro de la Carrera del Investigador Científico del CONICET

## INTRODUCCION

En este trabajo se describe un método numérico para obtener la transformación conforme que mapea el exterior de una cascada de perfiles aerodinámicos en el exterior de un círculo. Las aplicaciones prácticas de esta transformación son dos: obtención de la solución potencial con muy buena precisión para referencia en la validación de códigos por métodos numéricos estándar (BEM potencial, FEM + ecuaciones de Euler o Navier-Stokes) y la generación de mallas de buena calidad alrededor de la geometría considerada. En todos los casos nos referimos a flujos estacionarios a altos  $Re$ . A continuación discutiremos la aplicabilidad y conveniencia del modelo de flujo ideal.

El modelo de flujo ideal es, por lejos el más fácil de resolver desde el punto de vista numérico. Permite obtener estimaciones bastante buenas de la distribución de presiones y sustentación cuando el flujo no se separa del cuerpo, que es el caso de perfiles alares a ángulos de ataque moderados. Como es bien sabido, es incapaz de predecir efectos viscosos como la fuerza de arrastre ("drag"), sin embargo acoplado a una formulación potencial para el flujo externo con un cálculo de capa límite los efectos viscosos pueden ser predichos con muy buena precisión. A  $Re$  muy altos, el esquema flujo potencial/capa límite sigue dando resultados buenos, mientras que un código de Navier-Stokes se deteriora notablemente en cuanto a convergencia. Para flujos con grandes zonas separadas a  $Re$  altos, por ejemplo flujo alrededor de una esfera, la formulación potencial puede ser todavía útil, resolviendo sólo el flujo fuera de la zona separada e imponiendo como condición de contorno sobre la interfase flujo externo/flujo separado la condición de presión constante, que es la teoría de *Helmholtz-Kirchoff*. La forma de esta superficie no se conoce a priori, y el problema debe ser iterado por algún método[2].

Para perfiles con bordes de fuga agudos en 3D, es necesario modelizar la capa vorticosa que se desprende del borde de fuga. Esto complica bastante la generación de mallas para todos los métodos numéricos estándar: FEM, FDM, o FVM. Un caso extremo es el de flujo alrededor de maquinaria rotante. Las mallas abrumadoramente simples que requiere el BEM en 3D comparado contra los otros métodos, pasa a complicarse ya que además de la cubrir con paneles los alábes y el eje, también debe cubrirse la capa vorticosa, que es una superficie de forma helicoidal cuya ubicación no se conoce a priori y debe ser encontrada mediante un proceso iterativo. Sin embargo los otros métodos tipo FEM/FDM potenciales se ven aún más perjudicados: la capa vorticosa debe coincidir con una superficie de caras interelementos y los nodos contenidos en ella poseen dos valores dependiendo del lado en el cual se encuentre el elemento conectado. Algunos investigadores han optado por resolver directamente las ecuaciones de Euler por el FEM para evitar la modelización de la capa vorticosa, sin embargo el costo computacional se incrementa drásticamente para igual grado de precisión. Según nuestro punto de vista el BEM resulta ser óptimo para este tipo de aplicaciones: cubre todo tipo de geometrías, requiere un mínimo esfuerzo de generación de mallas y es muy competitivo en cuanto a costo computacional.

Un escollo que hemos encontrado en la aplicación del BEM o la resolución directa de la ecuaciones de Euler en cascadas es la falta de soluciones analíticas o resultados de buena calidad contra los cuales comparar las soluciones numéricas en un amplio espectro de parámetros. El algoritmo descrito en este trabajo pretende superar este problema.

## DESCRIPCION DE LA TRANSFORMACION CONFORME UTILIZADA

Dentro de los métodos analíticos para la resolución de flujos potenciales, el método de la transformación conforme es uno de los más versátiles, en cuanto a la amplitud de geometrías que pueden contemplarse con el mismo. La base del método es bien conocida: dados dos planos complejos  $z = x + iy = f(w)$ ,  $w = u + iv$ ,  $f$  analítica y una función armónica  $\phi(x, y)$ , esto es, que satisface la ecuación de Laplace  $\Delta\phi = 0$ , entonces la función transformada  $\phi(u, v)$  también

es armónica. El método consiste entonces en hallar una serie de transformaciones que lleven el dominio en cuestión a uno más simple en el cual el problema tenga solución analítica. Básicamente, se utilizan mapeos definidos por transformaciones bilineales, potencias, logaritmos (y sus inversos), y las transformaciones de Joukowski y de Kármán-Trefftz.

Consideremos el caso de una cascada como la de la figura 1. Se trata de una serie de  $n_p$  álabes, todos de sección idéntica, dispuestos en forma radial alrededor del centro.  $R$  es la distancia del centro de cada perfil al centro del rotor,  $\gamma$  el ángulo de inclinación de la línea media de cada perfil con respecto a la dirección radial que pasa por el centro del mismo y  $c$  la cuerda del perfil. El caso de una cascada para flujo axial corresponde a hacer tender  $R \rightarrow \infty$  manteniendo la cuerda  $c$  y el espaciamiento  $s = 2\pi R/n_p$  constantes.

Sea  $z = x + iy$  el plano de la cascada. La primera transformación lleva la cascada radial a una cascada plana infinita con espaciamiento  $s = \pi$  según el eje imaginario, mediante la transformación:  $w_0 = (n_p/2) \log(z)$  para el caso centrífugo,  $w_0 = \pi z/s$  para el caso axial. En el caso centrífugo el centro del rotor  $z = 0$  es mapeado sobre el infinito aguas abajo:  $\Re\{w\} \rightarrow -\infty$ .

La segunda transformación:  $w_1 = \tanh(w - w_{0C})$  lleva el exterior de los perfiles al exterior de un único perfil en el plano  $w_1$ . Como la función  $\tanh$  es periódica de período  $i\pi$ , todos los puntos equivalentes en los perfiles en el plano  $w_0$  son mapeados sobre el mismo punto en  $w_1$ . El punto  $w_{0C}$  es elegido de forma de tener la menor distorsión posible del perfil y la experiencia aconseja ubicarlo lo más cerca posible del centro del mismo. El infinito aguas abajo y aguas arriba es mapeado sobre los puntos singulares  $w_{1SC} = -1$ ,  $w_{1SK} = 1$ . El campo homogéneo al infinito aguas abajo de la forma  $\phi \rightarrow \bar{v}_\infty w_0$ ,  $\Re\{w_0\} \rightarrow -\infty$  se transforma en una singularidad logarítmica de intensidad compleja  $v_\infty^{up} = v_x^{up} - iv_y^{up}$  en  $w_{1SC}$ . Similarmente el infinito aguas abajo se transforma en una singularidad de intensidad  $v_\infty^{down} = v_x^{down} - iv_y^{down}$ . Una curva cerrada que rodea  $w_{1SC}$  transforma en una curva abierta en el plano  $w_0$  que va desde un punto dado al punto equivalente en la banda inmediatamente superior. El infinito en  $w_1$  corresponde  $w_{0C} + i\pi/2$ , el punto medio entre dos perfiles contiguos. Como este punto no es singular puede demostrarse calculando la circulación alrededor de una curva que encierre al perfil y los dos puntos singulares que:  $v_x^{up} = v_x^{down}$  y  $v_y^{down} = v_y^{up} + \Gamma/\pi$ . Si el espaciamiento entre los perfiles es mucho mayor que la cuerda en  $w_0$  entonces el perfil casi no se distorsiona ante la transformación y sólo ocupa una pequeña región cerca del origen en  $w_1$ . Para espaciamientos más pequeños el perfil comienza a acercarse a los puntos singulares y a enroscarse alrededor de ellos formando perfiles esbeltos en forma de S.

Una transformación de Joukowski o de Kármán-Trefftz permite llevar el perfil en forma de S a una figura redondeada en el plano  $w_2$ . Para definir esta transformación deben definirse los dos puntos singulares que forman el extremo de la singularidad tipo corte que define la transformación. Como siempre uno de ellos coincide con el borde de fuga y el otro se halla dentro del perfil S cerca del borde de ataque. Al calcularse los puntos transformados en forma numérica debe tenerse cuidado de elegir la rama correcta de la transformación, manteniendo la singularidad dentro del perfil.

La forma redondeada obtenida es transformada por la expresión:

$$w_3 \exp \left\{ \sum_0^{\infty} a_j / w_3^j \right\} = \bar{w}_2 \quad (1)$$

donde  $\bar{w}_2 = (w_2 - w_{2C})/R_2$  y los coeficientes  $\{a_j\}$  y los valores de  $w_{2C}$  y  $R_2$  son elegidos de forma de que el contorno sea mapeado sobre un círculo  $|w_3| = 1$ . Esta transformación será descrita en detalle en la siguiente sección.

Finalmente una transformación bilineal de  $w_3$  a  $z$  permite llevar los puntos singulares  $SC$  y  $SK$  a  $z = \pm a$  manteniendo el círculo inalterado. El borde de fuga es mapeado sobre algún punto  $z_{BF}$  sobre el círculo.

### LA TRANSFORMACION DE THEODORSEN/MORETTI

Definimos:  $w_3 = e^{i\theta}$ ,  $\tilde{w}_2 = (w_2 - w_{2C})/R_2 = e^{i\phi+\xi}$ . La descripción del cuasicírculo viene dada por la relación  $\xi = \xi(\phi)$ . Computacionalmente, se parte del conocimiento de una serie de puntos  $\{z_j\}$  sobre el perfil y se va aplicando las transformaciones hasta llegar a los puntos transformados  $\{w_{2j}\}$  sobre el cuasicírculo. Esto es puesto en forma de pares de valores  $\{\phi_j, \xi_j\}$ , los cuales son utilizados para obtener una serie de coeficientes para algún método de interpolación para la curva  $\xi(\phi)$  (*splines*, u otros). Para pequeñas desviaciones los coeficientes  $\{a_j\}$  son del orden de la desviación del cuasicírculo con respecto al círculo, o sea de la desviación de  $\xi(\phi)$  con respecto a 0.

En el método original de Theodorsen [3], un cierto número de puntos  $N$  (usualmente  $N = 2^n$  para poder hacer uso de la FFT) equiespaciados, son elegidos sobre el círculo:  $\theta_j = 2\pi j/N$ . Valores de  $\xi$  son interpolados sobre los mismos ángulos  $\phi_j = \theta_j$ , y tomando logaritmo de la expresión (1):

$$\xi_j = \sum \{a'_k \cos k\theta_j + a''_k \sin k\theta_j\} \quad (2a)$$

$$\phi_j = \theta_j + \sum \{a''_k \cos k\theta_j - a'_k \sin k\theta_j\} \quad (2b)$$

donde  $a_k = a'_k + ia''_k$ . A partir de (2a) pueden obtenerse los coeficientes  $\{a_k\}$ . Nótese que esto puede ser implementado en forma muy eficiente a través de una Transformada Rápida de Fourier (FFT). Reemplazando estos coeficientes en (2b) se obtiene una nueva expresión para los  $\phi_j$  y el proceso se itera hasta satisfacer algún criterio de convergencia. La tasa de convergencia depende fuertemente de la amplitud de la desviación de  $\xi(\phi)$  más exactamente de la amplitud de  $d\xi/d\phi$ . Por esto  $w_{C2}$  es tomado como el centro de masa del cuasicírculo y  $R_2$  el radio equivalente (áquel que da la misma área).

Recientemente, Moretti [1] ha sugerido una modificación al método original que ha demostrado mejorar mucho la convergencia del esquema iterativo para la obtención de los coeficientes. La transformación del cuasicírculo al círculo es puesta como;

$$w_3 \exp(f(w_3)) = (1 - \alpha)\tilde{w}_2 + \alpha w_3 \quad (3)$$

Para  $\alpha = 0$  se recobra el método original de Theodorsen. Ahora el miembro derecho representa un nuevo cuasicírculo, intermedio entre el cuasicírculo y el círculo, a ser copiado por el desarrollo de Theodorsen que es el miembro izquierdo (ver figura 3). Para valores de  $\alpha$  cercanos a uno el cuasicírculo intermedio se aproxima mucho al círculo y la convergencia del método de Theodorsen se mejora notablemente. Sin embargo la posición de este cuasicírculo intermedio no es conocido a priori ya que no se conoce la relación entre  $\tilde{w}_2$  y  $w_3$  y dos niveles de iteración son necesarios. En el lazo interno una relación entre  $\tilde{w}_2$  y  $w_3$  es supuesta, la forma del cuasicírculo intermedio es hallada, e iteraciones a la Theodorsen son hechas para obtener los coeficientes del desarrollo del cuasicírculo intermedio. Una vez terminado el ciclo interno y conocidos los coeficientes, una nueva forma del cuasicírculo intermedio es calculada y el proceso ingresa nuevamente en el lazo interno. Como criterio de convergencia del lazo externo puede utilizarse la variación de los coeficientes del desarrollo, la variación del círculo intermedio, monitoreando al mismo tiempo la diferencia entre la imagen del círculo sobre el plano  $w_2$  y el cuasicírculo. Sin embargo esta última cantidad no puede

ser tomada como criterio de convergencia ya que para que se aproxime a cero se debe además aumentar el número de coeficientes y la precisión de la interpolación.

En cuanto a la convergencia del método hacia la solución exacta del continuo a medida que se aumenta el número de coeficientes, éste método puede encuadrarse, *prima facie*, dentro de los *métodos espectrales*. En los métodos tipo FEM o FDM, la convergencia está dada por la suavidad de la solución y por el orden de la aproximación. Así, para funciones infinitamente derivables, el orden de la convergencia puede aumentarse en forma ilimitada generando esquemas de mayor y mayor precisión. Los métodos espectrales pueden ser considerados como métodos de "orden infinito", es decir que, para problemas con soluciones infinitamente suaves, la convergencia es mejor que la de cualquier método de orden finito. En la práctica, se monitorea la amplitud de los coeficientes en la expansión. Obviamente, las funciones de la expansión deben ser perviamente normalizadas. En las figuras 1 y 2 puede observarse el comportamiento de los coeficientes en casos prácticos. Surge de ellos que los coeficientes decaen en forma exponencial  $\log(|a_n|) \propto n$ , es decir, mejor que cualquier potencia finita. Coeficientes de presión alrededor de una cascada de perfiles en flujo axial para diferentes espaciamientos puede observarse en la figura 4.

### GENERACION DE MALLAS PARA FEM CON CONDICIONES PERIODICAS

En la simulación de flujos alrededor de turbomaquinarias por métodos tipo FEM/FVM o FDM se puede ahorrar un considerable costo computacional si se tiene en cuenta la condición de periodicidad de la estructura. Para flujo estacionario las diferentes cantidades en puntos equivalentes satisfacen la relación:

$$p' = p, \rho' = \rho, v' = Rv \quad (4)$$

donde  $p, \rho, v$  son la presión, densidad y velocidad del fluido en un punto y las cantidades primadas indican evaluación en un punto equivalente (rotado un número entero de  $2\pi/n_p$  radianes alrededor del centro del rotor).  $R$  es la matriz de rotación que transforma vectores. En el caso de flujos noestacionarios el mismo principio de simetría es válido si se descarta la existencia de oscilaciones inestables noperiódicas.

A continuación describiremos como hacer uso de esta condición de simetría para reducir el costo computacional en el caso no-estacionario o estacionario resuelto por un método explícito. Una malla es generada para un sector representativo de la estructura como el  $ABCD$ A en la figura 5. Una malla completa alrededor de toda la estructura podría ser creada rotando sucesivamente el sector. En la figura un pequeño espacio angular ha sido dejado entre diferentes sectores para mayor claridad. En cada paso de tiempo los valores en los nodos interiores son incrementados según:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \Delta t \sum_e R_{e_j}^n$$

donde  $U_j^n$  es el vector de estado en el nodo  $j$ , paso de tiempo  $n$  y  $R_{e_j}^n$  es la contribución al residuo del nodo  $j$  de los flujos provenientes del elemento  $e$  conectado al nodo. Si a tiempo  $n\Delta t$  el vector de estado es periódico, es decir que los puntos equivalentes tienen vectores equivalentes (ec. (4)) entonces los flujos elementales también serán periódicos y sólo debe hacerse el cálculo sobre un sector representativo de la estructura. Por ejemplo para el nodo  $P$  que esta justo sobre un contorno inter-sectores, los flujos elementales que vienen de los dos elementos adyacentes del sector superior  $e_3, e_4$  son reemplazados por los flujos de los elementos equivalentes  $e'_3, e'_4$ . Debe tenerse en cuenta que las componentes 2 y 3, en el caso de Euler o Navier Stokes  $2D$ , tienen un carácter vectorial y deben ser rotadas, antes de ser agregadas al residuo del nodo  $P$ .

Este truco permite reducir el costo en un factor  $1/n_p$ , sin embargo impone una fuerte restricción sobre la malla a ser generada: debe ser periódica, es decir que para cada nodo  $P$  sobre el contorno intersectador debe existir uno sobre la posición equivalente  $P'$ . Usando la transformación conforme descrita anteriormente mallas periódicas de buena calidad pueden ser generadas en forma automática. Partiendo del plano  $w$  donde el perfil ha sido transformado en un círculo y las dos singularidades se hallan dispuesta simétricamente con respecto al mismo, una transformación de Joukowski adicional lleva el círculo a una placa. Los puntos singulares de la transformación se ubican en  $\pm w_{BF}$  donde  $w_{BF}$  es la imagen del borde de fuga en el plano  $w$ . La malla primaria es obtenida considerando dos juegos de líneas que dividen el dominio en elementos y cuyas intersecciones son los nodos. Usualmente se toman las líneas de corriente  $\psi = \text{cte}$  y las equipotenciales  $\phi = \text{cte}$  ( $\psi =$  función de corriente,  $\phi =$  función potencial). De esta manera se asegura la ortogonalidad de la malla. En este caso esto no es posible ya que el potencial es multivaluado y las mallas así generadas no satisfacen periodicidad. Las equipotenciales son reemplazadas por líneas de la forma  $v_x^{up} \phi - v_y^{up} \psi = \text{cte}$ . Estas líneas son paralelas al eje  $y$  en el infinito aguas arriba de cascadas axiales o circunferencias centradas en el origen en el caso de flujo radial. Obviamente se pierde el carácter de ortogonalidad de la malla pero, por el carácter de preservación de los ángulos ante transformaciones conformes, el máximo ángulo interior de los elementos es, en el límite de mallas infinitamente finas, constante e igual a  $90 \text{ deg} + \arctan(-v_y^{up}/v_x^{up})$ . Las coordenadas de los nodos se obtienen invirtiendo la expresión del potencial complejo, si es necesario en forma numérica. Una vez obtenida la malla primaria, alrededor de la placa plana, las coordenadas de los nodos van siendo antitransformados hasta llegar al plano original  $z$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Moretti, G.; *Orthogonal grids around difficult bodies*, AIAA Journal, vol 30, No 4, pp 933-938, (1992)
- [3] Theodorsen, Th. y Garrick, I.E.; *General potential theory of arbitrary wing sections*, NACA TR 452, 1933.
- [2]. Wrobel, L.C.; *A Simple and Efficient BEM Algorithm for Planar Cavity Flows*, I. J. Num. Meth. in Fluids, vol 14, pp. 529-537 (1992)

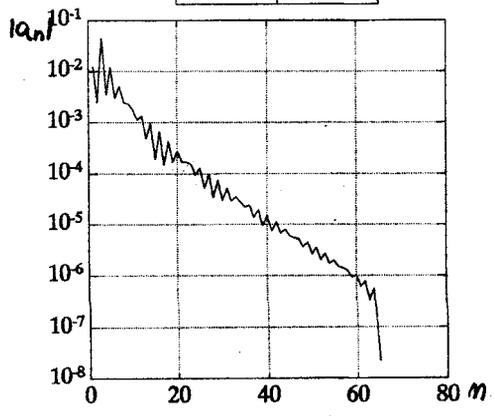
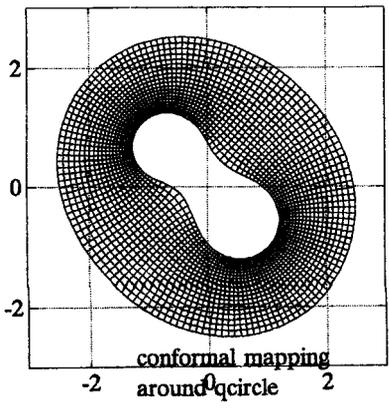
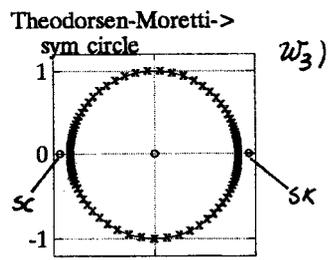
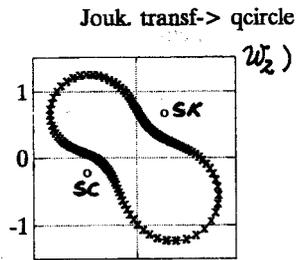
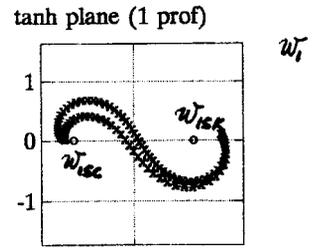
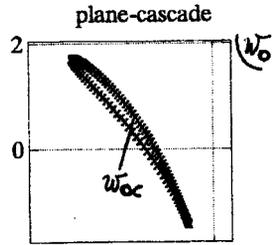
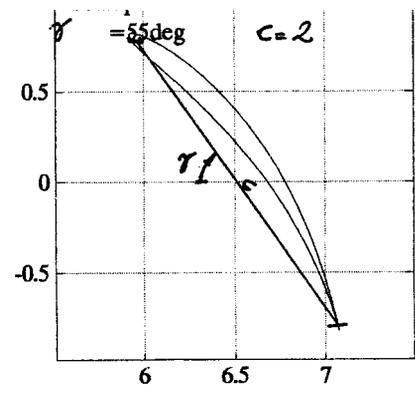
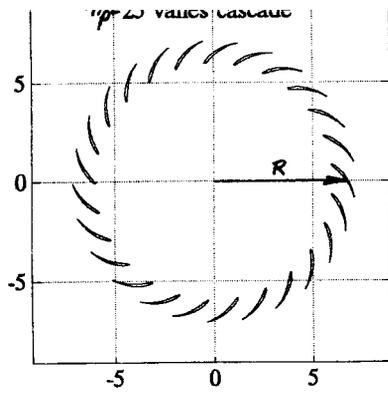


Figura 1: Descripción de la geometría y detalles de la transformación. Ejemplo 1

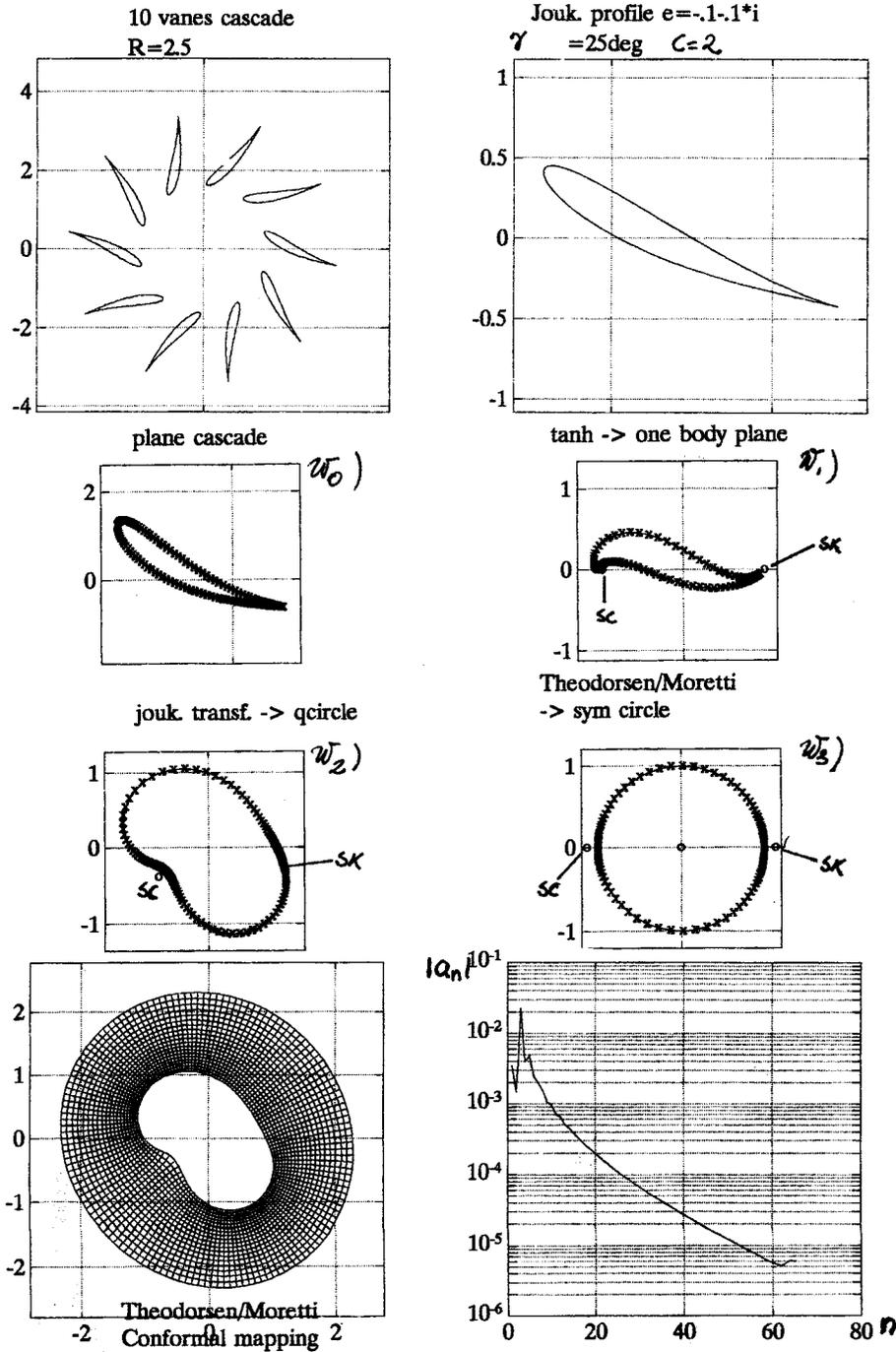


Figura 2: Descripción de la geometría y detalles de la transformación. Ejemplo 2

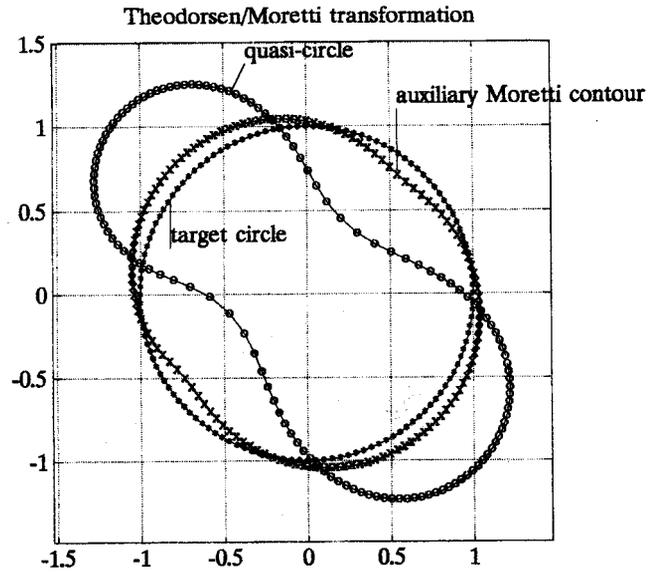


Figura 3: Método de Moretti

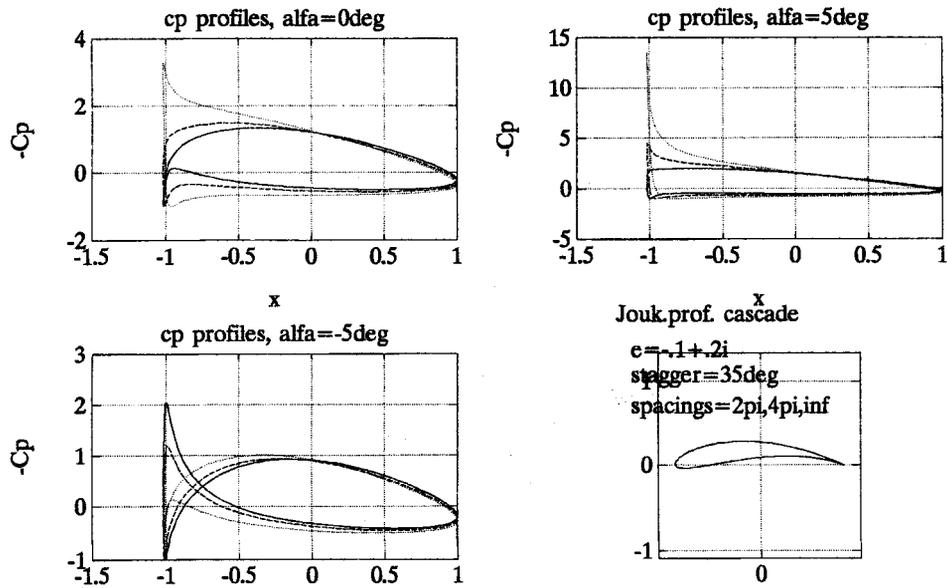


Figura 4: Curvas de presión sobre una cascada plana para diferentes espaciamientos y ángulos de incidencia

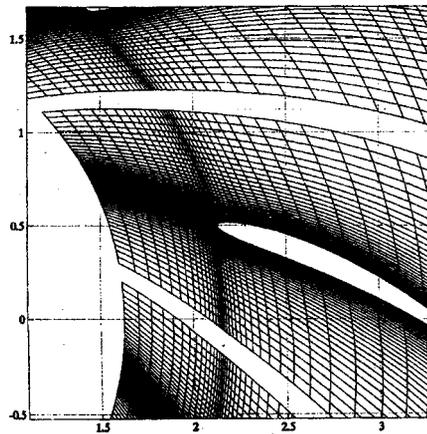
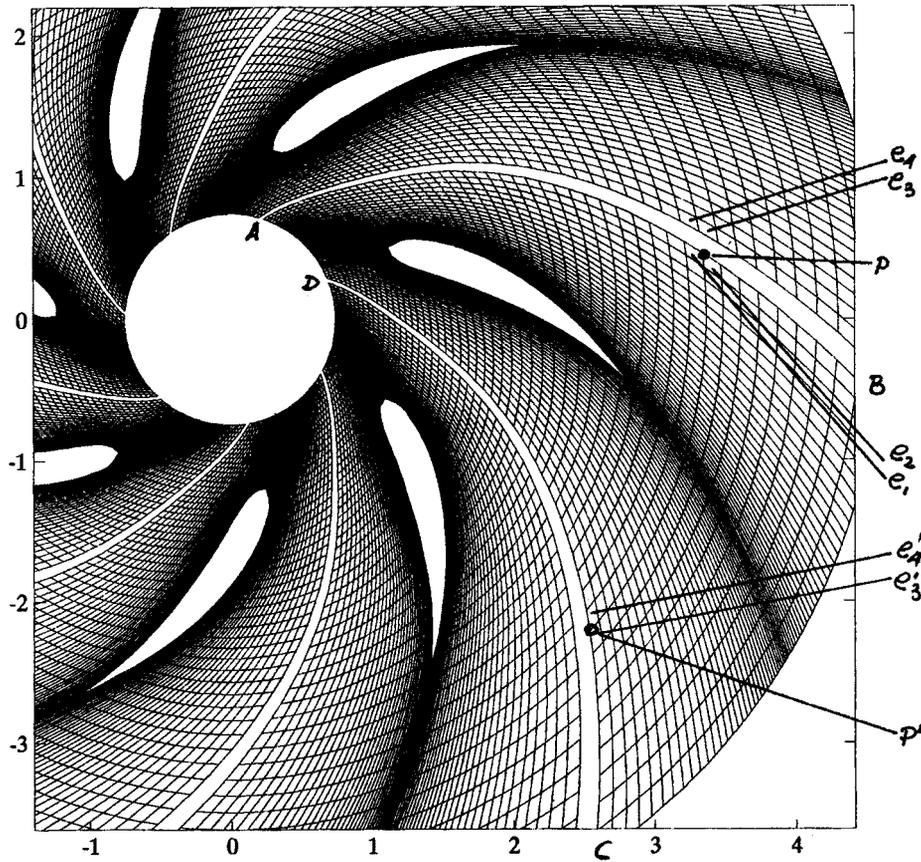


Figura 5: Mallas generadas