Mecánica Computacional Volúmen XIII
Compilado por M. Vénere
Bariloche, setiembre de 1992

SENSIBILIDAD DE SEGUNDO ORDEN EN PROBLEMAS DE VIBRACIONES E INESTABILIDAD ESTRUCTURAL

Luis A. Godoy
Departamento de Estructuras, FCEF y N
Universidad Nacional de Córdoba, y CONICET
Casilla de Correos 916, 5000 Córdoba, Argentina

Edgardo O. Taroco
Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC/CNPq
Rua Lauro Müller, 455, 22290 Rio de Janeiro - RJ, Brasil

Raúl A. Feijóo
Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC/CNPq
Rua Lauro Müller, 455, 22290 Rio de Janeiro - RJ, Brasil

ABSTRACT

This paper presents a pertubation approach for the first and second order sensitivity of eigenvalue problems, as they arise in buckling and vibration of structural systems. A particular feature introduced in the formulation is the dependence of all matrices defining the problem, not only on the design parameter, but also on the precritical state. This means that the displacement sensitivity of the fundamental path (in buckling problems) or a prestressed state (in vibration problems) are introduced in the analysis. Two techniques are considered in this work: first, the direct method; and second, the adjoint method. First and second order sensitivity equations for eigenvalues and eigenvectors are derived, and it is shown that second order sensitivity of eigenvalue does not require of a new adjoint problem to be solved.

RESUMEN

Se presenta un procedimiento de perturbación para sensibilidad de primer y segundo orden en problemas de valores propios, tal como aparecen en inestabilidad y vibraciones de sistemas estructurales. Un aspecto particular introducido en la formulación es la dependencia de todas las matrices que definen el problema, no sólo con el parametro de diseño, sino también con el estado precrítico. Esto implica introducir la sensibilidad de la trayectoria fundamental en problemas de pandeo; o un estado de pretensión en problemas de vibraciones. Se han considerado dos técnicas: el método directo y el adjunto. Se derivan las ecuaciones de sensibilidad de primero y segundo orden para valores y vectores propios, y se muestra que para encontrar sensibilidad de segundo orden del valor propio no se requiere resolver un problema adjunto nuevo.

INTRODUCCION

En un análisis de sensibilidad se estudia de qué manera cambia la respuesta de un sistema cuando se modifican parámetros que definen características del sistema. En el caso de estructuras, la respuesta del sistema puede estar caracterizada por desplazamientos, tensiones, frecuencias naturales, cargas críticas, etc. Los parámetros considerados son variables de diseño, como el espesor de una lámina, la forma, etc. Un estado del arte de análisis de sensibilidad en estructuras, puede encontrarse en el texto de *Haug, Choi y Komkov (1986)* [1]. En el presente trabajo se consideran respuestas expresadas a través de cargas críticas de inestabilidad, o eventualmente frecuencias naturales. La forma matemática que permite modelar estos problemas son ecuaciones de vectores y valores propios.

La sensibilidad de cargas críticas ante cambios en parametros de diseño ha sido estudiada por *Mroz y colaboradores* [2] en una serie de trabajos. Un avance importante en esta área ha sido la formulación del método adjunto *(Dems y Mroz, 1983)* [3]. El método ha sido extendido a variaciones en la forma y en las condiciones de contorno *(Mroz, 1987)* [4] y problemas termoelásticos *(Dems, 1987)* [5]. Un resumen de las contribuciones de este grupo puede encontrarse en el trabajo de *Mroz (1991)* [6]. El análisis de sensibilidad tiene muchas aplicaciones; entre ellas, está siendo usado en el contexto de mecánica de fracturas *(Taroco, 1990)* [7] y modelado de imperfecciones *(Godoy, 1990)* [8].

Este trabajo se refiere a sensibilidad de primero y segundo orden de problemas de valores propios, como los que surgen en determinación de cargas críticas y frecuencias naturales. Se usa la técnica de perturbaciones de sistemas discretos *(Godoy et. al., 1990)* [9] para explicitar la dependencia de las variables de respuesta con el parámetro del sistema con respecto al cual se busca la sensibilidad. Dos técnicas se han considerado: el método directo y el metodo adjunto, con el objeto de comparar las posibilidades de ambos en el análisis.

DEFINICION DEL PROBLEMA ESTUDIADO

Consideraremos un sistema en estado crítico, dado por la condición

$$[K + \lambda\ K_G]X = 0 \qquad (1)$$

donde K y K_G son matrices simétricas, λ es el autovalor y X es el autovector. El vector X se supone que está normalizado en la forma

$$X^T\ K_G\ X = 1. \qquad (2)$$

Previo el estado crítico, las variables de respuesta se designan a traves de un vector a, que cumple con la condición

$$L\,a - f = 0 \qquad (3)$$

donde L es una matriz simétrica. Para distinguir entre el estado crítico (1) y estados no críticos del sistema, hemos distinguido entre los vectores a y X.

Estudiaremos la sensibilidad del problema (1) frente a cambios en un parámetro τ del sistema. En particular, supondremos las dependencias seguientes:

$$\begin{aligned} K &= K\,[a(\tau),\tau] \\ K_G &= K_G[a(\tau),\tau] \\ L &= L\,[a(\tau),\tau] \\ f &= f\,(\tau) \end{aligned} \qquad (4)$$

Por ejemplo, en un problema de mecánica de sólidos, la ec.(3) puede representar la condición de equilibrio del sistema, que se satisface sobre la trayectoria fundamental que parte desde el origen, siendo f un vector de cargas; a los desplazamientos y L la matriz de rigidez. La condición (1) representa el estado crítico, karacterizado por la carga crítica de pandeo, λ, y el modo crítico de inestabilidad, X. K_G es la denominada matriz de carga-geometría; y K es la matriz de rigidez. En general, K coincide con L, pero en este trabajo se distinguirá entre ambas por motivos de generalidad. El parámetro τ puede ser alguna propiedad con respecto a la cual interesa la sensibilidad del estado crítico; por ejemplo, módulos del material, espesor de una estructura delgada, etc.

Interesa encontrar la sensibilidad de X y λ frente a cambios en τ.

FORMULACION DEL PROBLEMA USANDO LA TECNICA DE PERTURBACIONES

La solución del problema será parametrizada a traves de una expansion de a, X, λ en función de τ. Para ello, expresamos

$$\begin{aligned} a &= a(\tau) = a^{(0)} + \tau a^{(1)} + \tfrac{1}{2}\tau^2 a^{(2)} + \cdots \\ X &= X(\tau) = X^{(0)} + \tau X^{(1)} + \tfrac{1}{2}\tau^2 X^{(2)} + \cdots \\ \lambda &= \lambda(\tau) = \lambda^{(0)} + \tau\lambda^{(1)} + \tfrac{1}{2}\tau^2\lambda^{(2)} + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

donde $(\quad)^{(n)} \equiv \frac{\partial^n(\;)}{\partial\tau^n}$

Substituyendo las (5) en las ec. (1-3) se obtienen las ecuaciones en función de τ, τ^2, τ^3, etc. Agrupando términos con iguales exponentes de τ, surgen las ecuaciones de perturbación de orden cero, 1, 2, 3, etc, que son evaluadas en $\tau = 0$.

Ecuaciones de Perturbación de Orden Cero

Los términos independientes de τ dan origen a las tres ecuaciones siguientes, evaluadas en $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} [K_0 + \lambda^{(0)} K_{G0}]X^{(0)} &= 0 \\ X^{(0)^T} K_{G0}\, X^{(0)} &= 1 \\ L_0\, a^{(0)} - f_0 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

donde las matrices L_0, K_0, K_{G0} y f_0 surgen de la expansión de las matrices L, K, K_G, f en la forma

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \left(\tfrac{\partial L}{\partial a}a^{(1)} + L_1\right)\tau + \cdots \\ K &= K_0 + \left(\tfrac{\partial K}{\partial a}a^{(1)} + K_1\right)\tau + \cdots \\ K_G &= K_{G0} + \left(\tfrac{\partial K_G}{\partial a}a^{(1)} + K_{G1}\right)\tau + \cdots \\ f &= f_0 + f\,\tau + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

donde

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv \tfrac{\partial L}{\partial \tau} \quad ; \quad K_1 = \tfrac{\partial K}{\partial \tau} \\ K_{G1} &\equiv \tfrac{\partial K_G}{\partial \tau} \quad ; \quad f_1 = \tfrac{\partial f}{\partial \tau} \end{aligned} \tag{8}$$

Ecuaciones de Perturbación de Primer Orden

Los términos asociados a τ conducen a:

$$\begin{aligned}
&[K_0 + \lambda^{(0)} K_{G0}]X^{(1)} + \lambda^{(1)} K_{G0} X^{(0)} \\
&\quad + \left[[\tfrac{\partial K_0}{\partial a} a^{(1)}] + \lambda^{(0)}[\tfrac{\partial K_{G0}}{\partial a} a^{(1)}]\right] X^{(0)} = -\left[K_1 + \lambda^{(0)} K_{G1}\right] X^{(0)} = -v^{(0)} \\
&2X^{(0)^T} K_{G0} X^{(1)} + X^{(0)^T}\left[\tfrac{\partial K_{G0}}{\partial a} a^{(1)}\right] X^{(0)} = -X^{(0)^T} K_{G1} X^{(0)} = -w^{(0)} \\
&L_0 a^{(1)} + \left[\tfrac{\partial L_0}{\partial a} a^{(1)}\right] a^{(0)} = -L_1 a^{(0)} + f_1 = -u^{(0)}
\end{aligned} \tag{9}$$

En el segundo miembro de cada ecuación se han agrupado los terminos que dependen de incógnitas del sistema de orden cero; mientras que el primer miembro tiene las incógnitas de orden 1, o sea $a^{(1)}$, $X^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$. En un problema en el que existen n componentes de los vectores a, X, el número de incógnitas de las (9) es $(2n+1)$.

Ecuaciónes de Perturbación de Segundo Orden

Las ecuaciónes de perturbación de orden dos resultan similares a las (9) en su forma, y son:

$$\begin{aligned}
&[K_0 + \lambda^{(0)} K_{G0}]X^{(2)} + \lambda^{(2)} K_{G0} X^{(0)} + \\
&\quad + \left[[\tfrac{\partial K_0}{\partial a} a^{(2)}] + \lambda^{(0)}[\tfrac{\partial K_{G0}}{\partial a} a^{(2)}]\right] X^{(0)} = -v^{(1)} \\
&2X^{(0)^T} K_{G0} X^{(2)} + X^{(0)^T}\left[\tfrac{\partial K_{G0}}{\partial a} a^{(2)}\right] X^{(0)} = -w^{(1)} \\
&[L_0 + L_0^*] a^{(2)} = -u^{(1)}
\end{aligned} \tag{10}$$

donde

$$\begin{aligned}
v^{(1)} &= 2\left[K_1 + \lambda^{(0)} K_{G1}\right] X^{(1)} + \left[K_2 + \lambda^{(0)} K_{G2}\right] X^{(0)} \\
&\quad + 2\lambda^{(1)}\left\{K_{G0} X^{(1)} + K_{G1} X^{(0)} + K_{G0}^* a^{(1)}\right\} \\
&\quad + \left[[\tfrac{\partial^2 K_0}{\partial a^2} a^{(1)} a^{(1)}] + \lambda^{(0)}[\tfrac{\partial^2 K_{G0}}{\partial a^2} a^{(1)} a^{(1)}]\right] X^{(0)} \\
&\quad + 2\left[[\tfrac{\partial K_0}{\partial a} a^{(1)} + \tfrac{\partial K_1}{\partial a} a^{(1)}] + \lambda^{(0)}[\tfrac{\partial K_{G0}}{\partial a} a^{(1)} + \tfrac{\partial K_{G1}}{\partial a} a^{(1)}]\right] X^{(1)} \\
w^{(1)} &= X^{(0)^T}\left[K_{G2} + 2\tfrac{\partial K_{G1}}{\partial a} a^{(1)}\right] X^{(0)} \\
&\quad + 4X^{(0)^T}\left[K_{G1} + \tfrac{\partial K_{G0}}{\partial a} a^{(1)}\right] X^{(1)} + 2X^{(1)^T} K_{G0} X^{(1)} \\
u^{(1)} &= L_2 a^{(0)} + \left[2L_1 + 2\tfrac{\partial L_0}{\partial a} a^{(1)} + \tfrac{\partial L_1}{\partial a} a^{(0)}\right] a^{(1)} \\
&\quad + \left[\tfrac{\partial^2 L_0}{\partial a^2} a^{(1)} a^{(1)}\right] a^{(0)} - f_2
\end{aligned} \tag{11}$$

En las (10) hemos usado la notación

$$\begin{aligned}
L_0^* &\equiv \tfrac{\partial L_0}{\partial a} a^{(0)} \\
K_0^* &\equiv \tfrac{\partial K_0}{\partial a} X^{(0)} \\
K_{G0}^* &\equiv \tfrac{\partial K_{G0}}{\partial a} X^{(0)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Ecuaciones de Perturbación de Orden Superior

Siguiendo el procedimiento de esta sección es posible expresar las ecuaciones de perturbación de orden r como

$$\begin{aligned}
&\left[K_0 + \lambda^{(0)} K_{G0}\right] X^{(r)} + \left[[\tfrac{\partial K_0}{\partial a} a^{(r)}] + \lambda^{(0)}[\tfrac{\partial K_{G0}}{\partial a} a^{(r)}]\right] X^{(0)} \\
&+ \lambda^{(r)} K_{G0} X^{(0)} = -v^{(r-1)}
\end{aligned}$$

$$2X^{(0)^T}K_{G0}X^{(r)} + X^{(0)^T}\left[\frac{\partial K_{G0}}{\partial a}a^{(r)}\right]X^{(0)} = -w^{(r-1)}$$
$$[L_0 + L_0^*]\,a^{(r)} = -u^{(r-1)} \tag{13}$$

donde $u^{(r-1)}$, $v^{(r-1)}$ son vectores, y $w^{(r-1)}$ es un escalar, que dependen de la solución de los sistemas de perturbación de orden igual o menor a $(r-1)$.

SOLUCIÓN POR EL METODO DIRECTO

Primeramente se resuelven las (6), para encontrar la solución $X^{(0)}$, $a^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$, correspondientes a $\tau = 0$. Veremos la solución para las ecuaciones de perturbación siguientes.

Solución de las Ecuaciones de Primer Orden

La tercera de las ecuaciones (9) sólo depende de $a^{(1)}$, y puede ser reescrita como

$$[L_0 + L_0^*]\,a^{(1)} = -\left\{L_1 a^{(0)} - f_1\right\} \tag{14}$$

Dado que L_0 y L_0^* son no singulares, puedo evaluar $a^{(1)}$.

La primera de las (9) depende de $X^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$. Además, la matriz $[K_0 + \lambda^{(0)}K_{G0}]$ es singular. Se puede emplear el mecanismo de contracción (ver, por ejemplo, *Thompson y Hunt, 1973*) premultiplicando por $X^{(0)^T}$. Resulta así:

$$\underbrace{X^{(0)^T}[K_0 + \lambda^{(0)}K_{G0}]}_{=0}X^{(1)} + X^{(0)^T}\lambda^{(1)}K_{G0}X^{(0)} =$$
$$= -X^{(0)^T}\left[K_1 + \lambda^{(0)}K_{G1}\right]X^{(0)} - X^{(0)^T}\left[\frac{\partial K_0}{\partial a}a^{(1)} + \lambda^{(0)}\frac{\partial K_{G0}}{\partial a}a^{(1)}\right]X^{(0)} \tag{15}$$

Siendo $[K_0 + \lambda^{(0)}K_{G0}]$ una matriz simétrica, el primer término puede escribir-se como la (6.a) y se anula. Despejando $\lambda^{(1)}$ queda:

$$\boxed{\lambda^{(1)} = -\frac{X^{(0)^T}\left[K_1+\lambda^{(0)}K_{G1}\right]X^{(0)} + X^{(0)^T}\left[K_0^* + \lambda^{(0)}K_{G0}^*\right]a^{(1)}}{\underbrace{X^{(0)^T}K_{G0}X^{(0)}}_{=1}}} \tag{16}$$

Resta encontrar $X^{(1)}$, para lo cual se dispone de la ecuación sin contraer, ec. (9.b). En forma compacta, éstas pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
[K_0 + \lambda^{(0)}K_{G0}]\,X^{(1)} = -g^{(1)} = &+\left[K_0^* + \lambda^{(0)}K_{G0}^*\right]a^{(1)} \\
&+\left[K_1 + \lambda^{(0)}K_{G1} + \lambda^{(1)}K_{G0}\right]X^{(0)} \\
X^{(0)^T}K_{G0}X^{(1)} = -b^{(1)} = &+\tfrac{1}{2}X^{(0)^T}K_{G1}X^{(0)} \\
&+\tfrac{1}{2}X^{(0)^T}K_{G0}a^{(1)}
\end{aligned} \tag{17}$$

donde $g^{(1)}$ es un vector de dimensión n; y $b^{(1)}$ es un escalar.

Se expresa la solución $X^{(1)}$ como

$$X^{(1)} = \widehat{X}^{(1)} + \alpha^{(1)}X^{(0)} \tag{18}$$

o sea, la suma de una solución particular $\widehat{X}^{(1)}$ más la solución del sistema homogeneo, $X^{(0)}$, multiplicada por una constante a determinarse. Reemplazando la (18) en la (17.a) se tiene:

$$\left[K_0 + \lambda^{(0)} K_{G0}\right] \widehat{X}^{(1)} = -g^{(1)} \tag{19}$$

Como éste es un sistema de rango deficiente, debe elegirse una condición de normalización para $\widehat{X}^{(1)}$, que puede ser

$$\widehat{X}^{(1)T} K_{G0} \widehat{X}^{(1)} = 1 \tag{20}$$

o bien elegir una componente de $\widehat{X}^{(1)}$ y eliminar la ecuación correspondiente en (19).

Calculado $\widehat{X}^{(1)}$, se reemplaza la (18) en la (17.b):

$$X^{(0)^T} K_{G0} \widehat{X}^{(1)} + \alpha^{(1)} \underbrace{X^{(0)^T} K_{G0} X^{(0)}}_{=1} = -b^{(1)}$$

De aquí es posible encontrar la constante $\alpha^{(1)}$ como

$$\alpha^{(1)} = -b^{(1)} - X^{(0)^T} K_{G0} \widehat{X}^{(1)} \tag{21}$$

Solución de las Ecuaciones de Segundo Orden

Consideraremos ahora la solución de las ec. (10), de segundo orden. De la tercera de las (10) es posible obtener

$$a^{(2)} = -\left[L_0 + L_0^*\right]^{-1} \; u^{(1)} \tag{22}$$

Nuevamente es necesario recurrir al mecanismo de contracción para la solución de la ecuación de autovalores (10.a). Para ello se premultiplica la (10.a) por $X^{(0)^T}$, obteniendose la siguiente condición escalar:

$$\underbrace{X^{(0)^T} \left[K_0 + \lambda^{(0)} K_{G0}\right]}_{=0} X^{(2)} + X^{(0)^T} \lambda^{(2)} K_{G0} X^{(0)} =$$
$$= -X^{(0)^T} v^{(1)} - X^{(0)^T} \left\{ \left[\frac{\partial K_0}{\partial a} a^{(2)}\right] + \lambda^{(0)} \left[\frac{\partial K_{G0}}{\partial a} a^{(2)}\right] \right\} X^{(0)}$$

de donde

$$\boxed{\lambda^{(2)} = -\frac{X^{(0)^T} v^{(1)} + X^{(0)^T} \left[K_0^* + \lambda^{(0)} K_{G0}^*\right] a^{(2)}}{\underbrace{X^{(0)^T} K_{G0} X^{(0)}}_{=1}}} \tag{23}$$

que es la sensibilidad de segundo orden del autovalor.

Para la sensibilidad de segundo orden del autovector se disponde de la ecuación sin contraer (10.a) y de la condición de normalización (10.b). En forma compacta, pueden escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \left[K_0 + \lambda^{(0)} K_{G0}\right] X^{(2)} &= -g^{(2)} \\ X^{(0)^T} K_{G0} X^{(2)} &= -b^{(2)} \end{aligned} \tag{24}$$

donde

$$\begin{aligned} g^{(2)} &= v^{(1)} + \left[K_0^* + \lambda^{(0)} K_{G0}^*\right] a^{(2)} \\ &\qquad + \lambda^{(2)} K_{G0} X^{(0)} \\ b^{(2)} &= \tfrac{1}{2} \omega^{(1)} + \tfrac{1}{2} X^{(0)^T} K_{G0}^* a^{(2)} \end{aligned} \tag{25}$$

Notese que $g^{(2)}$ es un vector, y $b^{(2)}$ un escalar.

Se escribe el vector $X^{(2)}$ en la forma

$$X^{(2)} = \widehat{X}^{(2)} + \alpha^{(2)} X^{(0)} \tag{26}$$

similar a la ec. (18). Reemplazando la (26) en la (24.a) se tiene

$$\left[K_0 + \lambda^{(0)} K_{G0}\right] \widehat{X}^{(2)} = -g^{(2)} \tag{27}$$

que es un sistema de rango deficiente. Puede elegirse la condición

$$\widehat{X}^{(2)T} K_{G0} \widehat{X}^{(2)} = 1 \tag{28}$$

Calculado $\widehat{X}^{(2)}$, se reemplaza la (26) en la (24.b) y resulta:

$$X^{(0)^T} K_{G0} \widehat{X}^{(2)} + \alpha^{(2)} = -b^{(2)}$$

de donde

$$\alpha^{(2)} = -b^{(2)} - X^{(0)^T} K_{G0} X^{(2)} \tag{29}$$

Usando un procedimiento similar, es posible calcular sensibilidades de orden superior.

En el procedimiento directo, la solución de $\lambda^{(1)}$ requiere previamente haber calculado $a^{(1)}$. De la misma manera, para encontrar $\lambda^{(2)}$ se necesita contar con $a^{(2)}$. En casos que sólo se requiera la sensibilidad del autovalor λ, sería deseable contar con un método que no requiera la solución de $a^{(1)}$ y $a^{(2)}$ como paso previo; el método adjunto logra ese objetivo y será discutido en la sección siguiente.

SOLUCION POR EL METODO ADJUNTO

Esta técnica ha sido desarrollada para problemas de sensibilidad de primer orden por *Mroz y colaboradores* [2], y trata de evitar el cálculo de $a^{(1)}$ en la determinación de $\lambda^{(1)}$, o sea, intenta evitar calcular la sensibilidad de la trayectoria fundamental como paso previo a analizar la sensibilidad del estado crítico.

Consideremos multiplicadores de Lagrange μ sobre la condición de equilibrio (3), a fin de incluirla en las ecuaciones contraidas. Se tiene así

$$\mu \{L \;\; a - f\} = 0 \tag{30}$$

Se expandirá el vector de multiplicadores de Lagrange en función de τ, en la forma de series de potenciales (5):

$$\mu = \mu(\tau) = \mu^{(0)} + \tau\mu^{(1)} + \tfrac{1}{2}\tau^2\mu^{(2)} + \cdots \tag{31}$$

Substituyendo las (5), (7) y (31) en la (30) se llega a ecuaciones escalares de perturbación. La ecuación de orden cero resulta

$$\mu^{(0)} \underbrace{\left\{L_0 a^{(0)} - f_0\right\}}_{=0} = 0$$

que no provee ninguna información acerca de $\mu^{(0)}$.

Solución de las Ecuaciones de Primer Orden

La ecuación de perturbación de primer orden que surge de la (30) es

$$\mu^{(1)T}\underbrace{\left\{L_0 a^{(0)} - f^{(0)}\right\}}_{=0} + \mu^{(0)T}\left\{L_1 a^{(0)} + L_0 a^{(1)} - f_1\right\}$$
$$+\mu^{(0)T} L_0^* a^{(1)} = 0$$

Aumentamos la ecuación contraída de primer orden (15), ya vista en el método directo, para obtener

$$X^{(0)^T}\left[K_1 + \lambda^{(0)} K_{G1} + \lambda^{(1)} K_{G0}\right] X^{(0)} + \mu^{(0)T}\left\{L_1 a^{(0)} - f_1\right\}$$
$$+a^{(1)T}\left\{\left[L_0 + L_0^*\right]\mu^{(0)} + \left[K_0^* + \lambda^{(0)} K_{G0}^*\right] X^{(0)}\right\} = 0 \tag{32}$$

Las incógnitas de la (32) son $(2n+1)$: los valores de $\lambda^{(1)}$, $a^{(1)}$ y $\mu^{(0)}$. Pero buscaremos que los multiplicadores de Lagrange $\mu^{(0)}$ sean tales que verifiquen la nulidad del término que multiplica a $a^{(1)}$. Para ello, se determinan los multiplicadores $\mu^{(0)}$ de modo de satisfacer

$$\boxed{\left[L_0 + L_0^*\right]\mu^{(0)} = -\left[K_0^* + \lambda^{(0)} K_{G0}^*\right] X^{(0)}} \tag{33}$$

Se denomina sistema adjunto al de la ecuación (33), en el que la matriz $[L_0 + L_0^*]$ coincide con la de la ecuación (14), y es una modificación de la matriz de rigidez lineal en un problema de mecanica de solidos. El miembro de la derecha es un vector que se calcula con la solución del problema de orden cero. Como se ha supuesto anteriormente, es posible encontrar la solución de la (33) para obtener $\mu^{(0)}$.

La ecuación (32) se reduce ahora a sus dos primeros miembros, y tiene por incógnita a $\lambda^{(1)}$. Se obtiene así

$$\boxed{\lambda^{(1)} = -\frac{X^{(0)^T}\left[K_1 + \lambda^{(0)} K_{G1}\right] X^{(0)} + \mu^{(0)T}\left\{L_1 a^{(0)} - f_1\right\}}{\underbrace{X^{(0)^T} K_{G0} X^{(0)}}_{=1}}} \tag{34}$$

que es la correspondiente a la ec. (16) en el método directo.

Ambas expresiones, la (16) y la (34), sólo se diferencian en el segundo término del numerador. Es fácil demostrar que las dos ecuaciones son equivalentes.

Nótese que en el método adjunto no se ha precisado, hasta el momento, del cálculo de la sensibilidad de la respuesta de la trayectoria fundamental, $a^{(1)}$. Pero para calcular la sensibilidad del autovector, se debe seguir el procedimiento indicado por las ec. (17) a (21), y para ello es necesario contar con $g^{(1)}$ y $b^{(1)}$, que dependen de $a^{(1)}$. Por lo tanto, el procedimiento sigue calculando $a^{(1)}$ de la (14), y $X^{(1)}$ como en el metodo directo.

Solución de las Ecuaciones de Segundo Orden

De la condición (30), se obtiene la ecuación de perturbación de segundo orden y se aumenta con ella la ecuación contraída de segundo orden que se obtuvo en el método directo. Se llega así a la ecuación escalar seguiente:

$$X^{(0)^T}\lambda^{(2)}K_{G0}X^{(0)} + a^{(2)T}\underbrace{\left\{[L_0 + L_0^*]\,\mu^{(0)} + \left[K_0^* + \lambda^{(0)}K_{G0}^*\right]X^{(0)}\right\}}_{=0}$$
$$= -X^{(0)^T}v^{(1)} - \overline{Z}^{(1)} \qquad (35)$$

donde

$$\begin{aligned}\overline{Z}^{(1)} &= \mu^{(1)T}\left\{L_1 a^{(0)} + L_0^* a^{(1)} + L_0 a^{(1)} - f_1\right\}\\ &+\mu^{(0)T}\left\{L_2 a^{(0)} + 2L_1 a^{(1)} - f_2\right\}\\ &+2\mu^{(0)T}\left\{\left[\tfrac{\partial L_1}{\partial a}a^{(0)} + \tfrac{\partial L_0}{\partial a}a^{(1)}\right]a^{(1)}\right\}\\ &+\mu^{(0)T}\left\{\left[\tfrac{\partial^2 L_0}{\partial a^2}a^{(1)}a^{(1)}\right]a^{(0)}\right\}\end{aligned} \qquad (36)$$

Para eliminar el cálculo de $a^{(2)}$ de la (35) es necesario anular el término que multiplica a $a^{(2)}$, definiendo-lo como un problema adjunto. Lo notable es que dicho problema adjunto es el mismo que se calculó en sensibilidad de primer orden, y por lo tanto el multiplicador de $a^{(2)}$ se anula automaticamente. De modo que el cálculo de $\lambda^{(2)}$ no requiere la solución de un nuevo problema adjunto. Resulta así :

$$\boxed{\lambda^{(2)} = -\frac{X^{(0)^T}v^{(1)} + \mu^{(0)T}Z^{(1)}}{\underbrace{X^{(0)^T}K_{G0}X^{(0)}}_{=1}}} \qquad (37)$$

donde

$$\begin{aligned}Z^{(1)} &= L_2 a^{(0)} + 2L_1 a^{(1)} - f_2 + 2\left[\tfrac{\partial L_1}{\partial a}a^{(0)} + \tfrac{\partial L_0}{\partial a}a^{(1)}\right]a^{(1)}\\ &+\left[\tfrac{\partial^2 L_0}{\partial a^2}a^{(1)}a^{(1)}\right]a^{(0)}\end{aligned} \qquad (38)$$

Nótese que en la ec. (31) se expandió el vector de multiplicadores de Lagrange μ teniendo en cuenta que podría ser necesario más de un sistema adjunto en la solución de problemas de sensibilidad de orden superior. Pero el presente análisis ha mostrado que basta resolver el problema adjunto de sensibilidad de primer orden, dado que en el de segundo orden se llega al mismo sistema adjunto. Algo similar ocurre con sistemas de orden superior. La expansión (31) no es, por lo tanto, necesaria, y puede considerarse

$$\mu^{(0)} = \mu \qquad ; \qquad \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \cdots = 0 \qquad (39)$$

que justifica la simplificación de $\overline{Z}^{(1)}$ a $Z^{(1)}$.

CONCLUSIONES

Se ha estudiado la sensbilidad frente a variaciones en el parametro τ de diseño, de sistemas caracterizados por la forma discreta

$$[K(a(\tau),\tau) + \lambda(\tau)K_G(a(\tau),\tau)]X(\tau) = 0 \qquad (a)$$

donde X es normalizado de la forma

$$X^T(\tau)K_G(a(\tau),\tau)X(\tau) = 1 \qquad (b)$$

y a cumple con la condición

$$L(a(\tau),\tau)\cdot a(\tau)-f(\tau)=0. \qquad \text{(c)}$$

Este problema difiere del tratado en (*Godoy et. al., 1990*) [9] debido a la presencia de la solución $a(\tau)$ en las matrices que definen el problema. La solución difiere de las encontradas por *Mroz (1991)* [6] debido que se ha avanzado para obtener sensibilidad de orden superior a la primera.

Mediante la técnica de perturbaciones se han expandido las ecuaciones anteriores en función de τ, y se han resuelto usando técnicas directas y adjuntas. Algunas observaciones que se derivan de la formulación son las siguientes:

1) Por el método directo es necesario comenzar el cálculo por la condición (c) de equilibrio. La matriz asociada al sistema es una modificación de la de equilibrio lineal, y es de la forma $[L+L^*]$ para la solución de primero, segundo orden o superiores ordenes de perturbación.

2) En el método directo, la sensibilidad del autovalor depende de la sensibilidad de la solukión del estado de equilibrio. Por lo tanto, si se busca la sensibilidad del autovalor con respecto a varios parametros de diseño, $\tau_i(i=1,\cdots N)$, será necesario resolver N problemas de sensibilidad de la ecuación de equilibrio antes de encontrar la sensibilidad del autovalor.

3) Por el método adjunto se resuelve primeramente el problema adjunto, cuya matriz asociada es nuevamente $[L_0+L_0^*]$. Se trata de <u>un</u> sistema independientemente del número de parámetros de diseño, τ_i, o del orden de perturbación deseado.

4) La sensibilidad del autovalor no depende, en el método adjunto, de la sensibilidad de la condición de equilibrio. Sí depende del multiplicador de Lagrange que surge del problema adjunto. Por lo tanto, si se busca la sensibilidad del autovalor con respecto a varios parametros de diseño, será necesario resolver un sólo problema adjunto previamente.

5) La sensibilidad del autovector requiere en ambos métodos de un procedimiento similar, y requiere calcular la sensibilidad de la respuesta de equilibrio (c) previamente.

6) En resumen: si se busca sensibilidad de primer orden, en autovalor y autovector, el método directo aparece como más conveniente.

7) Si sólo se busca sensibilidad del autovalor, el metodo adjunto parece ser más conveniente. Esta conveniencia también aparece cuando se busca sensibilidad con respecto a más de un parámetro de diseño.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se realizó dentro del marco de un convenio binacional entre LNCC/CNPq (Brasil) y CAB/CONICET (Argentina).

REFERENCIAS

[1] HAUG, E.J., Choi, K.K. and Komkov, V. (1986), *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press.

[2] HAFTKA, R.T., Cohen, G.A. y Mroz, Z. (1990), "Derivatives of buckling loads and vibration frequencies with respect to stiffness and initial strain parameters", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 57, pp. 18-24.

[3] DEMS, K. and Mroz, Z. (1983), "Variational approach by means of adjoint systems, to structural optimization and sensitivity analysis. Part I: Variation of material parameters with fixed domain", *Int. J. Solids and Structures*, vol. 19, pp. 677-692.

[4] MROZ, Z. (1987), "Sensitivity analysis and optimal design with account for varying shape and support conditions", en: *Computer Aided Optimal Design*, Ed. C.A. Mota Soares (NATO Series ASI, vol. F27), Springer-Verlag, Berlin, pp. 407-438.

[5] DEMS, K. (1987), "Sensitivity analysis in thermoelasticity problems", en: *Computer Aided Optimal Design*, Ed. C.A. Mota Soares (NATO Series ASI, vol. F27), Springer-Verlag, Berlin, pp. 563-573.

[6] MROZ, Z. (1991), "Sensitivity analysis for vibration and stability of structures", en *Optimization of large structural systems* (Ed. G. Rozvany), NATO DFG ASI, Lectures Notes, vol. 2, pp. 139-157.

[7] TAROCO, E. (1990), "Leyes de conservación e integrales independientes del camino en mecánica de la fractura", *Anales del 7º. ENIEF*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Mar del Plata.

[8] GODOY, L.A. (1990), "A perturbation formulation for imperfection analysis of thin-walled structures", *Latin American Research*, vol. 20, pp. 147-153.

[9] GODOY, L., Flores, F., Raichman, S. y Mirasso, A. (1990), *Tecnicas de Perturbación en el Analisis No Lineal Mediante Elementos Finitos*, Asociación Argentina de Mecanica Computacional, Cordoba, 77 pag.

[10] THOMPSON, J.M.T. y Hunt, G.W. (1973), *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & Sons, Londres.

[11] RAICHMAN, S.R. y Godoy, L.A. (1991), "A perturbation/finite strip approach for static analysis of non-prismatic plate assemblies", *Computers and Structures*, vol. 40(3), pp. 629-637.