Mecánica Computacional Volúmen XIII
Compilado por M. Vénere
Bariloche, setiembre de 1992

SOBRE LA RESOLUCION NUMERICA DE INECUACIONES CUASI-VARIACIONALES ASOCIADAS A OPTIMIZACIONES CON COSTO PROMEDIO

Laura S. Aragone — Roberto L. V. González

Departamento de Matemática
Fac. de Cs. Exactas Ing. y Agrim.
Universidad Nacional de Rosario
Avda. Pellegrini 250 — 2000 Rosario — Argentina

RESUMEN

En este trabajo se trata la optimización del programa de producción de una máquina multiproducto para el problema de horizonte infinito. El criterio de optimización es el de costo promedio y se estudia la aproximación de la inecuación cuasi-variacional de Bellman asociada al problema. Se caracteriza el conjunto de soluciones del problema discretizado y se presenta un algoritmo implementable que converge en un número finito de pasos.

ABSTRACT

We study in this paper the optimization of production systems comprising a multi-item single machine in the case of infinite horizon. The optimization criterium is the average cost and we study the approximation of the Bellman Quasi-Variational-Inequalities (QVI) system associated to the problem. We characterize the set of solutions of the discrete problem and we present an accelerated algorithm which converges in a finite number of steps.

INTRODUCCION

En este trabajo se estudia la optimización del programa de producción de una máquina multiproducto. El objetivo es encontrar para un stock inicial x y para un estado de producción inicial d, una programación de producción optimal que minimice el costo promedio para un horizonte infinito. Es decir, minimizar un criterio de la forma:

$$J(\alpha(\cdot)) = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{1}{\theta_\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \left(\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f(y_x(s), d_{i-1})\, ds + q(d_{i-1}, d_i) \right) \tag{1}$$

donde θ_i son los instantes de conmutación de políticas (ver [1] y [2], para una descripción más detallada y problemas similares).

Con el uso de técnicas de la programación dinámica y teniendo en cuenta los costos de conmutación, es posible encontrar una política estacionaria optimal, en términos de cualquier solución continua (en el sentido de la viscosidad) del siguiente sistema de inecuaciones cuasi-variacionales (QVI) degeneradas de primer orden:

$$\frac{\partial U_d}{\partial x} g_d + f - \kappa \geq 0 \qquad \text{en } \Omega \tag{2}$$

$$U_d(x) \leq S_d(U)(x) \qquad \forall x \in \Omega \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial U_d}{\partial x} g_d + f - \kappa\right)\left(U_d - S_d(U)\right) = 0 \qquad \text{en } \Omega, \tag{4}$$

siendo $$S_d(U)(x) = \min_{\tilde{d} \neq d} \left(U_{\tilde{d}}(x) + q(d, \tilde{d}) \right) \quad x \in Q,\ d = 0, 1, \ldots, m \tag{5}$$

Este sistema es obtenido considerando una sucesión de problemas de optimización con coeficientes no nulos de indexación, para los cuales la solución está dada en base a la del sistema de (QVI):

$$\frac{\partial}{\partial x} U_d^{\lambda}(x)\, g_d + f(x, d) - \lambda U_d^{\lambda}(x) \geq 0 \qquad \text{c.t. } x \text{ en } \Omega \tag{6}$$

$$U_d^{\lambda}(x) \leq S_d(U)(x) \qquad \forall x \in Q \tag{7}$$

$$\left(U_d^{\lambda}(x) - S_d(U)(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} U_d^{\lambda}(x)\, g_d + f(x, d) - \lambda U_d^{\lambda}(x) \right) = 0 \qquad \text{c.t. } x \text{ en } \Omega \tag{8}$$

Estrictamente, la relación entre el problema con descuento y el problema de optimización con costo promedio es la siguiente: $\forall x \in Q$

$$\lambda U_d^{\lambda} \to \mu = \inf_{\alpha(\cdot)} J(\alpha(\cdot))$$

Para la resolución numérica del sistema (2)-(4), se desarrolla en este trabajo un procedimiento basado fundamentalmente en esta propiedad de convergencia, válida tanto para el problema continuo como para la formulación asociada al problema totalmente discreto. El algoritmo obtenido converge en un número finito de pasos. Presentamos también los resultados numéricos obtenidos para el caso m=2 (optimización de una máquina con dos productos).

1. DESCRIPCION DEL SISTEMA

En cada instante la máquina está detenida o produciendo cualquiera de m productos (items) posibles. Notaremos con d=0 el estado de no producción, y d= 1,..., m cuando se produce el item d.

Para d=1,..., m; definimos los datos del problema de la siguiente manera

- r_d la demanda instantánea del item d
- p_d la producción instantánea del item d
- M_d nivel máximo del producto d
- $q(d, \tilde{d})$ costo de conmutación del estado d al $\tilde{d}$
- $f(x, d)$ costo instantáneo combinado de almacenamiento y producción

Supondremos válidas las siguientes condiciones

★ condición de costo no nulo de los lazos cerrados:

$$\sum_{i=0}^{p} q(d_i, d_{i+1}) \geq q_0 > 0$$

para cualquier lazo cerrado $d_0, d_1, \ldots, d_p, d_{p+1}$, con $d_0 = d_{p+1}$, $p \leq m$.

★ los tiempos de conmutación son instantáneos.

★ condición de compatibilidad entre demanda y producción

$$\sum_{d=1}^{m} \frac{r_d}{p_d} < 1. \tag{9}$$

2 FORMULACION DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACION

2.1 El espacio de estado Q

Notaremos con $y_d(t)$ el nivel del item d en el tiempo t, con condición inicial $y_d(O) = x_d$. Por lo tanto en notación vectorial tendremos

$$y(t) \equiv (y_1(t),\ldots, y_m(t)) \qquad (10)$$

$$(y_1(0),\ldots, y_m(0)) = (x_1,\ldots,x_m) \qquad (11)$$

La siguiente restricción resulta natural, ya que no son permitidas compras externas ni sobrepasar el nivel de stock de cada item y_d

$$0 \leq y_d \leq M_d \qquad \forall\ d = 1,m \qquad (12)$$

Dividimos los valores x_i en tres categorías

$$x_i = 0, \quad 0 < x_i < M_i \ \text{ y } x_i = M_i \qquad (13)$$

Un punto x_i es especificado usando una m-upla de dígitos $a_i, \ldots, a_m$:

$$\Gamma(a_1,\ldots,a_m) \equiv \left\{x \,/\, x_i \text{ verifica } (14)\right\}$$

donde:

$$\left| \begin{array}{ll} x_i = 0, & \text{si } a_i = 0 \\ x_i \in (0, M_i) & \text{si } a_i = 1 \\ x_i = M_i & \text{si } a_i = 2 \end{array} \right. \qquad (14)$$

El espacio de estados admisibles Q comprende sólo el conjunto de puntos con a lo sumo una componente igual a cero, ya que a partir de otros puntos que no verifiquen esta condición la ruptura de stock es inevitable, es decir:

$$Q = \bigcup_{a} \left\{\Gamma(a_1,\ldots,a_i,\ldots, a_m) / \text{a lo sumo un } a_i = 0\right\} \qquad (15)$$

Si notamos con Ω el interior de Q

$$\Omega \equiv \left\{x \,/\, 0 < x_i < M_i\,,\ i=1,\ldots, m\right\} = \Gamma(1,\ldots,1) \qquad (16)$$

Es claro de la definición de r_d, p_d que es válida la siguiente ecuación de evolución

$$\frac{d}{dt} y_d = g(\alpha(t)) \qquad (17)$$

donde,

$$g(\alpha) = \left(g_1(\alpha), \ldots, g_m(\alpha)\right) \qquad (18)$$

siendo

$$g_d(\alpha) = \left| \begin{array}{ll} -r_d & \text{si } \alpha \neq d \\ & \\ p_d - r_d & \text{si } \alpha = d \end{array} \right.$$

Nota: Dado que g es constante, la ecuación (17) tiene solución global para cualquier política de control. Al mismo tiempo supondremos siempre que la función f es uniformemente lipchitziana en Q, $\forall$ d.

2.2 El conjunto de controles

Un programa de producción admisible está dado por una sucesión de tiempos de conmutación θ_i y de estados de producción d_i.

El estado de producción α es la constante d_i en el intervalo $(\theta_i, \theta_{i+1}]$, donde:

$$0 = \theta_0 \leq \theta_1 < ,\ldots, < \theta_i < \theta_{i+1} < \ldots\ ;\ d_i \in D = \{0,1,\ldots,m\};\ \ d_i \neq d_{i+1};\quad i=0,1,\ldots \qquad (19)$$

Para cada $x \in Q$, $d \in D = \{0, 1,\ldots, m\}$ definimos con $\mathcal{A}_x^d$ al conjunto de los controles admisibles con estado inicial x y estado inicial de producción d:

$$\mathcal{A}_x^d=\left\{\alpha(\cdot)=(\theta_i,d_i)_{i=0}^{\infty}\ /\ \forall t\in\Re^+,\ y_x(t)\in Q\right\}\tag{20}$$

En otras palabras, consideraremos una sucesión $\{\theta_i, d_i\}$ tal que los correspondientes estados del sistema pertenezcan a Q para todo $t\geq 0$.

2.3 El Costo Promedio

A cada política de control $\alpha(\cdot)$ le asociamos la función de costo (1). Para cada $d\in D$ y $x\in Q$, definimos el costo promedio mínimo

$$\mu_d(x) = \inf\left\{J(\alpha(\cdot))/\alpha(\cdot)\in\mathcal{A}_x^d\right\}\tag{21}$$

Proposición 2.1: *$\mu_d(x)$ es independiente de d y de x, es decir*

$$\mu_d(x)\equiv\mu\quad\forall\, d,\, x\tag{22}$$

Nuestro objetivo es encontrar $x\in Q$, $d\in D$ una política $\bar{\alpha}_x^d\in\mathcal{A}_x^d$, tal que

$$J(\bar{\alpha}_x^d(\cdot))=\mu\tag{23}$$

Esta política óptima puede ser construida en base a funciones continuas U_d que sean soluciones en el sentido de la viscosidad del sistema QVI (2)-(4), siendo las condiciones de frontera, para $x\in\partial Q_e\bigcup\partial Q^+$

$$U_{\tilde{d}}(x)=U_d(x)+q(\tilde{d},d)\ ,\ \forall\,\tilde{d}\neq d\qquad \text{si } x\in\gamma_d^-\tag{24}$$

$$U_d(x)=S_d(U)(x)\ ,\qquad \text{si } x\in\gamma_d^+\tag{25}$$

$$\lim_{x\to\partial Q^+} U_d(x)=+\infty\tag{26}$$

con

$$\partial Q_e=\bigcup_{i=1}^{m}(\gamma_i^+\cup\gamma_i^-)\tag{27}$$

donde

$$\gamma_i^+=\Gamma(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_m)/\ a_i=2\qquad \gamma_i^-=\Gamma(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_m)/\ a_i=0\tag{28}$$

y

$$\partial Q^+=\bigcup_a\left\{\Gamma(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_m)/\text{al menos dos } a_i=0\right\}\tag{29}$$

Definición 2.1: Diremos que las funciones U_d son ***soluciones de viscosidad*** de (2)-(4), (24)-(26) si:

- son funciones continuas en Q,
- satisfacen (3)
- satisfacen (24), (25) y (26)
- $\dfrac{\partial U_d}{\partial x}g_d+f-\mu\geq 0$ en Ω en el sentido de la viscosidad, es decir:

$\forall\psi\in C^1(\Omega)$, si $U_d-\psi$ tiene un máximo local en x_o, entonces

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)(x_o)\,g_d(x_o)+f(x_o,d)-\mu\geq 0$$

- $\forall x\in\Omega\ /\qquad U_d(x)<S_d(U)(x)$, entonces $\exists\,\delta(x)$ tal que

$$\frac{\partial U_d}{\partial x} g_d + f - \mu = 0 \qquad \text{en } B_{\delta(x)}(x) \text{ en el sentido de la viscosidad, es decir:}$$

$\forall\psi \in C^1(B_{\delta(x)}(x))$, si $U_d - \psi$ tiene un máximo local en x_0, entonces

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)(x_0) g_d(x_0) + f(x_0, d) - \mu \geq 0$$

$\forall\psi \in C^1(B_{\delta(x)}(x))$, si $U_d - \psi$ tiene un mínimo local en x_0, entonces

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)(x_0) g_d(x_0) + f(x_0, d) - \mu \leq 0$$

Proposicion 2.2: *Existe a lo sumo un μ tal que (2)-(4), (24)-(26) tiene solución en el sentido de la viscosidad.*

Observación: es obvio que si U es solución de (2)-(4), (24)-(26), entonces $U + c \cdot e$, también es solución $\forall$ $c \in \Re$, siendo $e=(1,\dots,1) \in \Re^{m+1}$

2.4 Procedimiento de construcción de una política óptima

Una política óptima en realimentación $\alpha^* = \{\theta_i, d_i\} \in \mathcal{A}_x^d$ puede ser obtenida en términos de U de la siguiente manera. Definimos $\theta_0 = 0$, $d_0 = d$ y recursivamente:

$$\theta_i = \min\left\{t \geq \theta_{i-1} \,/\, U_{d_{i-1}}(y(t)) = \left(S_{d_{i-1}}(U)\right)(y(t))\right\} \tag{30}$$

$$d_i \in \left\{d \in D \,/\, d \neq d_{i-1},\ \left(S_{d_{i-1}}(U)\right)(y(\theta_i)) = U_d(y(\theta_i)) + q(d_{i-1}, d)\right\} \tag{31}$$

Teorema 2.1: *Si U es una solución continua de viscosidad del sistema (3), entonces la política construida según (30)-(31) satisface*

$$J(\alpha^*(\cdot)) = \inf\left\{J(\alpha(\cdot)) / \alpha(\cdot) \in \mathcal{A}_x^d\right\}$$

2.5 El problema con descuento

Una solución lipchitziana del sistema (2)-(4), (24)-(26) puede ser obtenida considerando una sucesión de problemas de optimización con coeficientes no nulos de indexación (llamaremos con λ a éste coeficiente). Para este tipo de problemas, la solución está dada en base a la única solución en el sentido de la viscosidad del sistema de (QVI) (6)-(8), siendo las condiciones de frontera (24)-(26). La solución de viscosidad se define en forma análoga a lo hecho para el sistema (2)-(4), (24)-(26).

Teorema 2.2: *$\forall\lambda > 0$ $\exists!$ solución del sistema (6)-(8), (24)-(26). La familia de soluciones U_d^λ satisface $\forall$ $\tilde{x}$, x / $d(\tilde{x}, \partial Q^+) > \rho$, $d(x, \partial Q^+) > \rho$*

$$\left|U_d^\lambda(\tilde{x}) - U_d^\lambda(x)\right| \leq L(\rho) \|\tilde{x} - x\| \tag{32}$$

Nota: la condición (32) indica que las funciones U^λ son equilipchitzianas fuera de cualquier entorno de ∂Q^+.

2.6 Relación entre los dos problemas

La relación entre los dos problemas está dada por el siguiente teorema

Teorema 2.3: *En virtud de (9) y la lipschitzianidad de f las siguientes propiedades son válidas:*

1- $\exists\ \overline{\mu} \in \Re /$ $\qquad \lim_{\lambda \to 0} \lambda U_d^{\lambda}(x) = \overline{\mu} \qquad \forall\, x \in Q, \forall\, d \in D.$

2- dado $x^0 \in Q$, $d_0 \in D$, *el conjunto de funciones* $\left(U_d^{\lambda}(\cdot) - U_{d_0}^{\lambda}(x^0)\right)$ *es precompacto en* $W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$.

$$3\text{-}\ \forall\, V \in \left(\bigcap_{\zeta > 0}\left(\overline{\bigcup_{\zeta > \lambda > 0}\left(U^{\lambda}(\cdot) - U_{d_0}^{\lambda}(x^0)\cdot e\right)}\right)\right),$$

V es solución de (2)-(4)y (24)-(26) cuando $\mu = \overline{\mu}$.

3. EL PROBLEMA DISCRETO

3.1 Elementos del Problema Discreto

Para definir el problema discreto es necesario introducir una aproximación que comprende la discretización del espacio $W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ y de las condiciones (24)-(25). Utilizamos para ello las técnicas analizadas en [3]-[6].

3.1.1 Aproximación del dominio Q

Aproximamos Q con $Q_k = \bigcup_j S_j^k$. $\{S_j^k\}$ es un conjunto finito de simplices y por lo tanto, Q_k es un poliedro de $\Re^{\nu}$, $\max_j(\text{diám } S_j^k) = k$. Notaremos con $V_k = \{x^i, i = 1, \ldots, N\}$ el conjunto de vértices de Q_k (nodos), siendo N el cardinal de V_k.

Trabajamos con una triangulación especial donde $V_k \subset B^k$ y S_j^k es simplex de Q_k sii sus vértices pertenecen a $B^k \cap Q$, donde:

- $B^k = \{x^0 + \sum_{d=0}^{m} z_d\, e^d \ /\ z_d$ es entero$\}$
- $e^0 = (-r_1, \ldots, -r_i, \ldots, -r_m)\, h^0$, $\quad e^d = (-r_1, \ldots, -r_{d-1}, p_d - r_d, -r_{d+1}, \ldots, -r_m)\, h^d$
- $h^i = \frac{p_1}{r_1}\frac{r_i}{p_i} h^1$, $h^0 = \frac{p_1}{r_1}\left(1 - \sum_{i=1}^{m}\frac{r_i}{p_i}\right) h^1$

Nota: Si k es suficientemente pequeño, dados dos vértices cualesquiera de V^k, siempre existe un camino dado por la trayectoria natural del sistema que va del primero al segundo.

3.1.2 Aproximación de la frontera

Definimos, $\forall$ d=1,..., m

$$\gamma_{k,d}^{+} = \left\{x^i \in V_k \ /\ x^i + h^d g(d) \notin Q_k\right\} \tag{33}$$

$$\gamma_{k,d}^{-} = \left\{x^i \in V_k \ /\ x^i + h^{\tilde{d}}\, g(\tilde{d}) \notin Q_k,\ \ \forall \tilde{d} \neq d\right\} \tag{34}$$

3.1.3 Definición del espacio de aproximaciones $\overline{F}_k$

Consideraremos el conjunto $\overline{F}_k$ de funciones $w: Q_k x D \to \Re$, $w(\cdot, d) \in W^{1,\infty}(Q_k)$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ constante en el interior de cada simplex de Q_k. Es obvio que $w \in \overline{F}_k$ está completamente caracterizado por los valores

$w(x^i, d),\ x^i \in V_k,\ i=1,\dots,N;\ d \in D.$

3.1.4 Discretización de las inecuaciones de Bellman

Se empleará la discretización de las condiciones (2), (3); las cuales toman la siguiente forma:

$$w(x^i, d) \le D_d^k(w,\mu)(x^i) \qquad \forall\, x^i \in V_k \tag{35}$$

$$w(x^i, d) \le (S_d w)(x^i) \qquad \forall\, x^i \in V_k \tag{36}$$

$D_d^k(w,\mu)(x^i)$ es definido por:

$$(D_d^k(w,\mu))(x^i) = w(x^i + h^d g(d), d) + h^d (f(x^i, d) - \mu)$$

$$\forall\, x^i \in V_k \cap c\gamma_{k,d}^{+} \cap c\Big(\bigcup_{r \ne d} \bar{\gamma}_{k,r}\Big) \tag{37}$$

$$(D_d^k(w,\mu))(x^i) = +\infty \qquad \forall\, x^i \in \gamma_{k,d}^{+} \cup \Big(\bigcup_{r \ne d} \bar{\gamma}_{k,r}\Big) \tag{38}$$

Nota: $w(x^i, d) \le (D_d^k w^\lambda)(x^i)$ es la discretización natural de (2), (24)-(24).

3.1.5 Definición del operador P_k

Definimos el operador $P_k : (\bar{F}_k \times \Re) \to (\bar{F}_k)$ de la siguiente forma:

$$(P_k(w,\mu))(x^i, d) = \min\Big((D_d^k(w,\mu))(x^i),\ S_d(w)(x^i)\Big) \quad \forall\, x^i \in V_k,\ \forall\, d=0,\dots,m \tag{39}$$

Problema $\mathcal{P}_k$: ***Encontrar (w,μ) tal que $w = P_k(w,\mu)$*** (40)

Proposición 3.1: *Existe a lo sumo un μ^k tal que (40) tiene solución $w \in \bar{F}^k$, en ese caso también $w + c \cdot e^k$ es* solución $\forall\, c \in \Re$, siendo $e^k = (1,\dots,1) \in \Re^{(m+1)\times N}$

3.1.6 *Definición del operador P_k^λ*

Introducimos la definición del operador $D_d^{\lambda k}$:

$$(D_d^{\lambda k} w^\lambda)(x^i) = (1 + \lambda h^d)\, w^\lambda(x^i + h^d g(d), d) + h^d f(x^i, d)$$

$$\forall\, x^i \in \Big(V_k \cap c\gamma_{k,d}^{+} \cap c\Big(\bigcup_{r \ne d} \bar{\gamma}_{k,r}\Big)\Big) \tag{41}$$

$$(D_d^{\lambda k} w^\lambda)(x^i) = +\infty \qquad \forall\, x^i \in \Big(\gamma_{k,d}^{+} \cup \Big(\bigcup_{r \ne d} \bar{\gamma}_{k,r}\Big)\Big) \tag{42}$$

Definimos el operador $P_k^\lambda : (\bar{F}_k) \to (\bar{F}_k)$

$$(P_k^\lambda w^\lambda)(x^i, d) = \min\Big((D_d^{\lambda k} w^\lambda)(x^i),\ (S_d(w^\lambda))(x^i)\Big) \quad \forall\, x^i \in V_k,\ \forall\, d=0,\dots,m \tag{43}$$

El siguiente problema discreto permite encontrar una aproximación del problema con descuento.

Problema $\mathcal{P}_k^\lambda$: ***Encontrar el punto fijo del operador P_k^λ*** *(44)*

Teorema 3.1: $\exists!\ w^\lambda$ *solución de* $\mathcal{P}_k^\lambda$

3.2 Relación entre el Problema $\mathcal{P}_k$ y el Problema $\mathcal{P}_k^\lambda$

La relación entre los dos problemas está dada por el siguiente teorema

Teorema 3.2: *En virtud de (9) tenemos*

1- $\exists\ \overline{\mu} \in \mathcal{R} / \lim_{\lambda \to 0} \lambda w^\lambda(x^i, d) = \overline{\mu} \qquad \forall\, x^i \in Q_k,\ \forall\, d \in D$

2- $\forall\, w \in Z,\ (w, \overline{\mu})$ *es solución de* $\mathcal{P}_k$ *donde, dados* $x^i \in Q_k,\ d \in D$

$$Z = \left(\bigcap_{\zeta > 0} \left(\overline{\bigcup_{\zeta > \lambda > 0} \{ w^\lambda - w^\lambda(x^i, d) * e \}} \right) \right) + \{ \alpha * e / \alpha \in \mathcal{R} \}.$$

4. ALGORITMO NUMERICO

Definimos aquí un algoritmo que además de ser una combinación de los algoritmos de Picard y Newton emplea fundamentalmente las propiedades establecidas en el Teorema 3.2 y está basado en los métodos detallados en [6].

Definiciones 4.1:

- Controles discretos ϵ—suboptimales (multivaluados) asociados a w

$A_\epsilon: \overline{F}_k \to (\mathcal{P}(D))^{(m+1)xN}$

$$(A_\epsilon(w))(x^i, d) = (B_\epsilon(w))(x^i, d) \bigcup (C_\epsilon(w))(x^i, d) \tag{45}$$

donde

$$(B_\epsilon(w))(x^i, d) = \left\{ \tilde{d}\ /\ (P_k^\lambda(w))(x^i, d) + \epsilon \ \geq\ q(d, \tilde{d}) + w(x^i, \tilde{d}) \right\}$$

$$(C_\epsilon(w))_d(x^i) = \begin{cases} \{ d \} & \text{si } (P_k^\lambda(w))(x^i, d) \ \geq\ (D_d^{\lambda k}(w))(x^i) - \epsilon \\ \emptyset & \text{si } (P_k^\lambda(w))(x^i, d) \ <\ (D_d^{\lambda k}(w))(x^i) - \epsilon \end{cases}$$

- Sistema lineal asociado a una política discreta en realimentación $\hat{A}^{\nu,\mu}: Q_k x D \to (\mathcal{P}(D))$

Consideramos un sistema lineal que escribimos en forma compacta:

$$L\ u = b(\mu) \tag{46}$$

y donde la relación que define cada una de las ecuaciones es:

$u(x^i, d) = (D_d^k(u, \mu))(x^i, d) \qquad$ si $d \in (\hat{A}^{\nu,\mu}(w))(x^i, d)$; si no:

$u(x^i, d) = q(d, \tilde{d}) + u(x^i, \tilde{d}) \qquad$ con $\tilde{d} \in (\hat{A}^{\nu,\mu}(w))(x^i, d)$

Para el problema con descuento λ también consideramos el sistema lineal

$$L^{\nu,\mu} u = b^{\nu,\mu} \tag{47}$$

donde similarmente la relación que define cada una de las ecuaciones es:

$u(x^i, d) = (D_d^{\lambda k} u)(x^i) \qquad$ si $d \in (\hat{A}^{\nu,\mu}(w))(x^i, d)$; si no:

$u(x^i, d) = q(d, \tilde{d}) + u(x^i, \tilde{d}) \qquad$ con $\tilde{d} \in (\hat{A}^{\nu,\mu}(w))(x^i, d)$

Algoritmo

Paso 1: dar $\lambda > 0$, $0 < \gamma < 1$, $w^{0,0} \in \bar{F}_k$, $\epsilon > 0$, $\bar{r} > 0$,

Paso 2: Sea $\nu = 0$, $\eta = 0$, $A^{\nu} = (\emptyset)^{(m+1)xN}$

Paso 3: $\eta = \eta+1$, calcular $A^{\nu,\eta} = A_{\epsilon}(w^{\nu,\eta})$

$w^{\nu,\eta} = P_k(w^{\nu,\eta-1})$

Paso 4: si $A^{\nu,\eta} = A^{\nu}$, sea $r = r+1$, e ir a Paso 5;

si no, sea $r = 0$, $A^{\nu} = A^{\nu,\eta}$, e ir a Paso 3

Paso 5: Si $r \geq \bar{r}$, $\forall$ (x^i, d) elegir cualquier $\hat{A}^{\nu,\eta}(x^i, d)$ tal que $(\hat{A}^{\nu,\eta})(x^i, d) \subset (A^{\nu,\eta})(x^i, d)$ y card$((\hat{A}^{\nu,\eta})(x^i, d)) = 1$, formar el sistema $L^{\nu,\eta}$

si no, ir a Paso 3

Paso 6: Si $\det(L^{\nu,\eta}) \neq 0$, calcular la solución u del sistema $L^{\nu,\eta} = b^{\nu,\eta}$,

si no, $r = 0$, $A^{\nu} = (\emptyset)^{(m+1)xN}$, e ir a Paso 3

Paso 7: Si $u = P_k^{\lambda}\, u$, ir a Paso 8

si no, si $\nu = 0$ o $u \leq w^{\nu,\eta}$,

sea $w^{\nu+1,0} = u$, $\nu = \nu+1$, $\eta = 0$, $r = 0$,

$A^{\nu} = \{\emptyset\}^{(m+1)xN}$ e ir a Paso 3;

si no, $\epsilon = \gamma\epsilon$, ir a Paso 3

Paso 8: Formar el sistema L asociado a $\hat{A}^{\nu,\eta}$

Paso 9: Testear si L tiene al menos una solución y calcularla

si no, ir a paso 11

Paso 10: Si TEST(w, μ, A)= 1, Fin.

Paso 11: $w^{0,0} = \frac{1}{\gamma}\, u$, $\lambda = \lambda * \gamma$ e ir a paso 2

Definición de la función TEST

Definición 4.2: Controles óptimos discretos asociados a w

A_0: $Q_k x D \rightarrow (P(D))$

$A_0(x^i, d) = \{\tilde{d} \;/\; (P_k^{\lambda}(w))(x^i, d) = w(x^i, \tilde{d}) + q(d, \tilde{d})\} \cup B(x^i, d)$

donde

$$B(x^i, d) = \begin{cases} \{d\} & \text{si } (P_k(w))(x^i, d) = (D_d^k(w))(x^i, d) \\ \emptyset & \text{si } (P_k(w))(x^i, d) \neq (D_d^k(w))(x^i, d) \end{cases}$$

La función TEST se calcula por medio del siguiente algoritmo:

Paso 1: $\nu=1$, $w^1 = w$

Paso 2: Si $w^{\nu} = P_k(w^{\nu}, \mu)$ TEST: = 1

Paso 3: $w^{\nu+1} = P_k(w^{\nu}, \mu)$

calcular A_0 y elegir cualquier A tal que card$(A(x^i, d)) = 1$

Paso 4: determinar si existen ciclos nuevos en ese caso TEST: = 0

si no $\nu=\nu+1$ e ir a Paso 3

Teorema 4.1: *El algoritmo que permite construir los valores de la función TEST converge en un número finito de pasos.*

4.1 Convergencia del Algoritmo A_1

Teorema 4.2: *El algoritmo converge en un numero finito de pasos.*

5. APLICACIONES

Hemos aplicado el procedimiento presentado para un ejemplo con m=2 items y una discretización de Q de 30×30 nodos. En la Figura 1 se muestra la trayectoria óptima obtenida.

REFERENCIAS

[1] González R.L.V., Muramatsu K., Rofman E.: Quasi-variational inequality approach to multi-item single machine lot scheduling problem, *Proceedings of 15th. IFIP Conference on System Modelling and Optimization,* to appear in *Lecture Notes in Control and Information Sciences,* Springer Verlag, 1992.

[2] Menaldi J.M., Perthame B., Robin M.: Ergodic problem for optimal stochastic switching, *Journal of Math. Analysis and Applications,* Vol. 147, N°2, 1990.

[3] Capuzzo Dolcetta I., Ishii H.: Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optim.,* Vol. 11, pp. 161-181, 1984.

[4] González R.L.V., Aragone L.S.: A fast computational procedure to solve the multi-item single machine lot scheduling optimization problem, Work in preparation.

[5] González R., Tidball M. M.: Sur l'ordre de convergence des solutions discrétisées en temps et en espace de l'équation de Hamilton—Jacobi, *Comptes Rendus Acad. Sci.,* Paris, Tomo 314, Série I, p. 479—482, 1992.

[6] Tidball M. M.: "Sobre la resolución numérica de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman". Tesis, Universidad Nacional de Rosario. 1991