

**SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM REGIME TRANSIENTE UTILIZANDO UM MÉTODO EXPLÍCITO**

Adriane Prisco Petry  
M.Sc. CPGEC/UFRGS  
Armando M. Awruch  
Prof. CPGEC/UFRGS e PROMEC/UFRGS

**SUMÁRIO**

Este trabalho tem por objetivo a análise de escoamentos bidimensionais isotérmicos através de uma simulação numérica. Um método explícito de dois passos é empregado para solução das equações de Navier-Stokes, permitindo a análise do fluido, que é considerado quase incompressível; o escoamento é estudado empregando o método de elementos finitos para a discretização espacial e diferenças finitas para a discretização temporal. A possibilidade de analisar o comportamento dinâmico da estrutura imersa no fluido, e que está acoplada ao mesmo através de condições de compatibilidade e equilíbrio, é também apresentada.

**INTRODUÇÃO**

Este trabalho apresenta um modelo bidimensional para a simulação numérica do problema de escoamentos transientes e isotérmicos.

Para analisar o escoamento de um fluido viscoso e quase incompressível utiliza-se um método explícito de dois passos com diagonalização seletiva da matriz de massa [1]. Neste esquema emprega-se o método de elementos finitos para a discretização espacial com funções de interpolação de igual ordem para as componentes de velocidade e pressão.

Para o estudo da interação fluido-estrutura utiliza-se para esta um modelo simplificado, considerando a mesma como um corpo rígido, elásticamente vinculado; a rigidez das molas que vinculam a estrutura representam a rigidez da estrutura a deslocamentos e giros no plano em estudo. O acoplamento entre a estrutura e o fluido é implementado de tal forma que são satisfeitas as condições de compatibilidade e equilíbrio na interface. Neste trabalho é descrito o algoritmo correspondente, embora ainda não tenham sido concluídas aplicações com o mesmo.

Um exemplo de aplicação que consiste na simulação do escoamento de um fluido em torno de um cilindro para  $Re=150$ ,  $Re=1500$  e  $Re=150000$  é apresentado.

**EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O PROBLEMA**

As equações que governam o escoamento transiente isotérmico de fluidos viscosos quase incompressíveis em duas dimensões são as seguintes:

(a) Equações de conservação de quantidade de movimento

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial T} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial X_j} \right) + \frac{\partial P}{\partial X_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial X_i} \left[ \chi \left( \frac{\partial v_k}{\partial X_k} \right) \right] + \rho F_i = 0$$

(i, j, k=1, 2) em  $\Omega$

(1)

(b) Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial X_j} = 0 \quad \text{em } \Omega$$

(2)

(c) Equação de estado

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad \text{em } \Omega$$

(3)

(d) Condições de contorno

$$v_i = \bar{v}_i \quad (i=1, 2) \quad \text{em } \Gamma_v$$

(4)

$$S_i = \left[ -P \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \right) + \chi \frac{\partial v_k}{\partial X_k} \right] n_j \quad (i, j, k=1, 2) \quad \text{em } \Gamma_s$$

(5)

onde,  $v_i$  são as componentes da velocidade,  $P$  é a pressão,  $\rho$  a massa específica,  $F_i$  as componentes da força de volume,  $C$  a velocidade do som,  $\mu$  e  $\chi$  a viscosidade molecular e o coeficiente de compressibilidade volumétrico,  $\bar{v}_i$  valores prescritos das componentes da velocidade na parte  $\Gamma_v$  do contorno no domínio  $\Omega$ ,  $S_i$  as componentes das forças na parte  $\Gamma_s$  do contorno,  $n_j$  os cossenos de direção da normal a  $\Gamma_s$  em relação aos eixos de referência,  $X_i$  e  $T$  são as variáveis independentes que indicam espaço e tempo respectivamente e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

A equação de estado (3) pode ser utilizada em (2) obtendo-se a seguinte equação para a continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial X_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial X_j} = 0 \quad (j=1, 2) \quad \text{em } \Omega$$

(6)

### FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS E DO ESQUEMA EXPLÍCITO DE DOIS PASSOS

Aplicando o princípio dos resíduos ponderados e o método de elementos finitos, obtém-se o seguinte sistema de equações matriciais:

$$\underline{M}\underline{\dot{V}}_i + \underline{A}_j(V_j)\underline{V}_i + \underline{D}_{ij}\underline{V}_j - \underline{G}_i\underline{P} + \underline{F}_i = 0 \quad (i, j=1, 2) \quad (7)$$

$$\underline{M}\underline{P} + \underline{A}_j(V_j)\underline{P} + \underline{G}_j^T\underline{V}_j = 0 \quad (j=1, 2) \quad (8)$$

onde

$$\underline{M} = \int_{\Omega} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \, d\Omega ; \quad \underline{A}_j(V_j) = \int_{\Omega} (\underline{\phi} V_j) \underline{\phi}^T \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial X_j} \, d\Omega ; \quad \underline{G}_i = \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial X_i} \underline{\phi} \, d\Omega$$

$$\underline{D}_{ij} = \nu \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial X_j} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial X_j} \, d\Omega + (\nu + \lambda) \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial X_i} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial X_i} \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial X_{(i)}} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial X_{(i)}} \, d\Omega \right]$$

sendo que o índice "1" vale  $i+1$  para  $i=1$  e  $i-1$  para  $i=2$ , (ou seja, que  $l=i+(-1)^{(i+1)}$ ), e levando em conta que o sub-índice (i) indica que não existe soma, ainda que o mesmo apareça repetido.

O vetor  $\underline{F}_i$  vem dado por:

$$\underline{F}_i = \int_{\Omega} \underline{\phi}^T \underline{f}_i \, d\Omega - \int_{\Gamma_s} \underline{\phi}^T (\underline{\phi} S_i) \, d\Gamma$$

Aplicando o método de dois passos proposto por Kawahara e Hirano (1982), obtém-se:

(a) Primeiro passo

$$\underline{M}_D \underline{V}_i^{n+1/2} - \underline{M}_D \underline{V}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ \underline{A}_j(V_j^n) \underline{V}_i^n + \underline{D}_{ij} \underline{V}_j^n + \underline{G}_i \underline{P}^n + \underline{F}_i^n \right] \quad (i, j=1, 2) \quad (10)$$

$$\underline{M}_D \underline{P}^{n+1/2} - \underline{M}_S \underline{P}^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ \underline{A}_j (\underline{V}_j^n) \underline{P}^n + \underline{G}_j^T \underline{V}_j^n \right] \quad (j=1,2) \quad (11)$$

(b) Segundo passo

$$\underline{M}_D \underline{V}_i^{n+1} - \underline{M}_D \underline{V}_i^n - \Delta t \left[ \underline{A}_j (\underline{V}_j^{n+1/2}) \underline{V}_i^{n+1/2} + \underline{D}_{ij} \underline{V}_j^n + \underline{G}_i \underline{P}^{n+1/2} + \underline{F}_i^n \right] \quad (i, j=1,2) \quad (12)$$

$$\underline{M}_D \underline{P}^{n+1} - \underline{M}_S \underline{P}^n - \Delta t \left[ \underline{A}_j (\underline{V}_j^{n+1/2}) \underline{P}^{n+1/2} + \underline{G}_j^T \underline{V}_j^{n+1/2} \right] \quad (j=1,2) \quad (13)$$

onde  $\Delta T$  é o intervalo de tempo e "n" refere-se ao n-ésimo intervalo de tempo, sendo que  $\underline{M}_D$  é a matriz de massa discreta ou diagonalizada e  $\underline{M}_S$  é a matriz de massa com diagonalização seletiva, calculada por:

$$\underline{M}_S = e \underline{M}_D + (1 - e) \underline{M} \quad (14)$$

Se  $e=0$ ,  $\underline{M}_S = \underline{M}$  (matriz de massa consistente) e se  $e=1,0$ ,  $\underline{M}_S = \underline{M}_D$  (matriz de massa diagonalizada). Em geral utiliza-se  $0,7 < e < 0,9$ .

Por ser um método explícito, a estabilidade está condicionada pelo número de Courant-Friedeich-Levy, que resulta na seguinte limitação para o intervalo de tempo:

$$\Delta T \leq \frac{\Delta X}{C + U} \quad (15)$$

onde  $\Delta X$  é tamanho característico do elemento.

### ANÁLISE ESTRUTURAL E ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA

A equação de equilíbrio dinâmico da estrutura é dada por:

$$\underline{M}_E \ddot{\underline{Y}} + \underline{C}_E \dot{\underline{Y}} + \underline{K}_E \underline{Y} = \underline{Q}$$

(16)

onde  $\underline{M}_E$ ,  $\underline{C}_E$  e  $\underline{K}_E$  são matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez da estrutura respectivamente,  $\dot{\underline{Y}}$ ,  $\underline{Y}$  e  $\underline{Y}$  são os vetores de componentes de aceleração, velocidade e deslocamentos generalizados, respectivamente, no baricentro da estrutura e  $\underline{Q}$  é o vetor de cargas externas, também aplicadas ao baricentro da estrutura.

É conveniente lembrar que  $\underline{Y}$  é um vetor com as duas componentes globais de deslocamento e a rotação, e que a carga  $\underline{Q}$  é um vetor que contém as duas componentes globais de força e o momento que atuam sobre o baricentro do corpo devidas à ação do fluido sobre o sólido.

A condição de compatibilidade na interface sólido-fluido vem dada, para cada nó da interface por:

$$Z_i = \underline{L}_{ij} Y_j \quad (i=1,2 ; j=1,2,3)$$

(17)

onde  $Z_i$  são as duas componentes dos deslocamentos na interface e  $\underline{L}$  é uma matriz que translada deslocamentos do baricentro para o contorno do sólido, e vem dada por:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_2 \\ 0 & 1 & l_1 \end{bmatrix}$$

(18)

sendo  $l_1$  e  $l_2$  as componentes da distância do baricentro do sólido ao ponto da interface em questão.

A condição de equilíbrio de forças na interface pode expressar-se da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma_c} \underline{L}^T \underline{S} d\Gamma = \underline{Q} \quad \text{ou} \quad \int_{\Gamma_c} L_{ij} S_i d\Gamma = Q_j \quad (i=1,2 ; j=1,2,3)$$

(19)

onde  $\Gamma_c$  é o contorno completo do corpo e  $\underline{S}$  é o vetor de forças de contorno, definidas em (5).

Considerando que as forças de volume  $F_i$  são nulas e levando em conta (16) e (17) juntamente com a equação (7), obtém-se a seguinte expressão para a equação de equilíbrio da estrutura:

$$\begin{aligned} & (M_{Eij} + L_{ik} M_{kl} L_{lj}) \ddot{Y}_j + (C_{Eij} + L_{ik} A_{klm} V_m L_{lj} + L_{ik} D_{kl} L_{lj}) \dot{Y}_j + K_{Eij} Y_j \\ & = R_i \end{aligned} \quad (20)$$

onde:

$$R_i = -L_{ik} M_{kj} \dot{V}_j - L_{ik} A_{kjm} V_m V_j - L_{ik} D_{kj} V_j + L_{ik} G_{kj} P_j \quad (21)$$

É conveniente destacar que para cada ponto da interface tem-se uma matriz de translação  $\underline{L}$  e que as matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{A}$  e  $\underline{D}$  que aparecem em (20) e (21) estão relacionadas com elementos que têm um lado comum com o corpo sólido.

Resumindo, o processo de análise consiste em calcular as velocidades e pressões do fluido com o algoritmo dado em (10) a (13). Com (20) e (21) estuda-se o comportamento dinâmico da estrutura, que por sua vez permite calcular as componentes das taxas de deslocamentos na interface da estrutura e que servem como condições de contorno para a análise do escoamento no passo seguinte. Integrando (5) ao longo de toda a interface, obtém-se as componentes das forças e o momento que permitem calcular os coeficientes de arrasto, sustentação e de momento. Com as pressões calculadas pelo esquema (10) - (13) obtém-se o coeficiente de pressão.

#### EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Analisa-se o escoamento em torno de um cilindro para números de Reynolds de 150 a 150.000. O modelo empregado, o domínio em estudo e as condições de contorno utilizadas estão indicadas na figura 1. Na malha de elementos finitos foram empregados 2336 elementos quadriláteros bilineares com um total de 2431 nós.

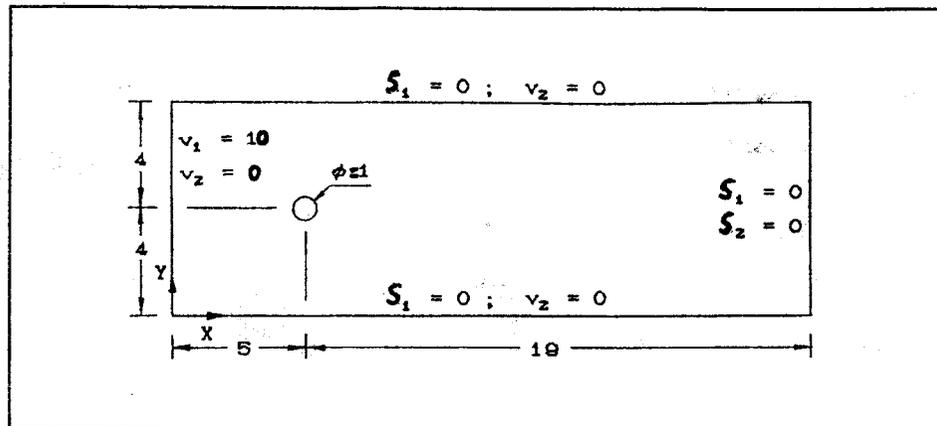


Figure 1 - Domínio e condições de contorno.

Na figura 2 apresenta-se a variação da componente transversal da velocidade no tempo, para  $Re=150000$  em uma distância de 8,5 diâmetros do centro do cilindro à montante.

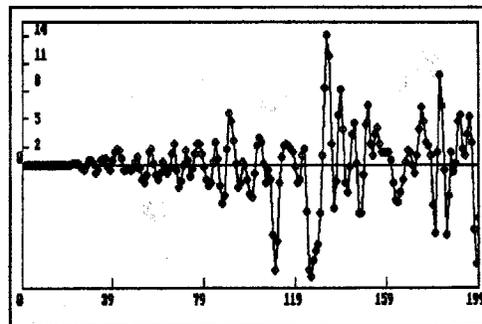


Figure 2 - Evolução da velocidade  $V_2$  no tempo para  $Re=150000$

Nas figuras 3,4 e 5 apresentam-se as linhas de corrente para  $Re=150$ ,  $Re=15000$  e  $Re=150000$ , para  $t=8s$ ,  $t=9s$  e  $t=18s$  respectivamente.

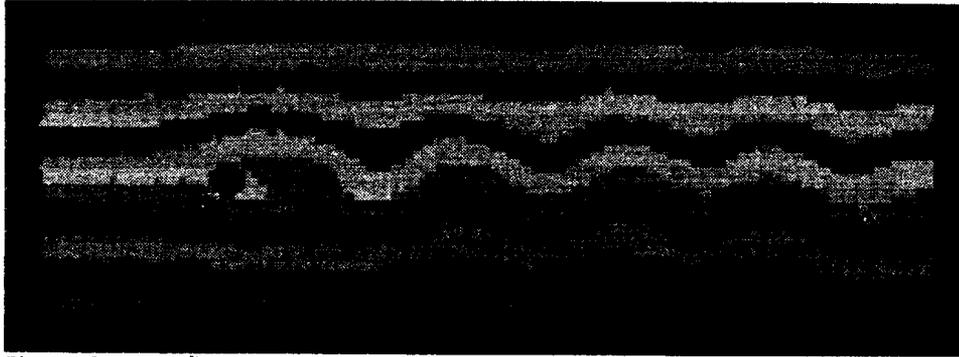


Figura 3 - Função de linhas de corrente para  $Re=150$  em  $t=8.0s$

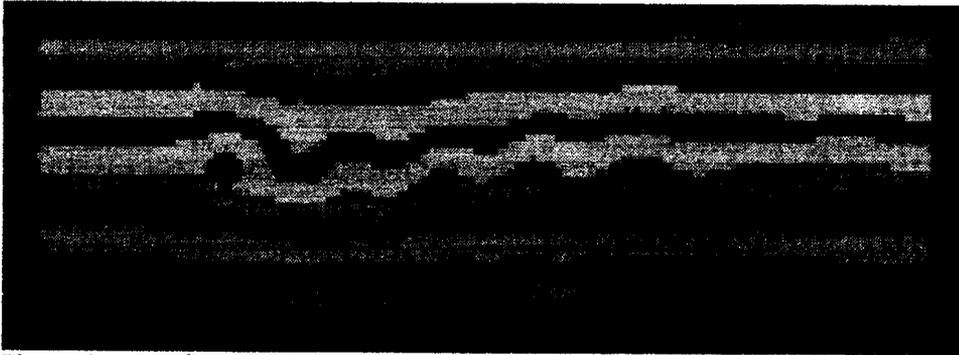


Figura 4 - Função de linhas de corrente para  $Re=1500$   $t=9.0s$

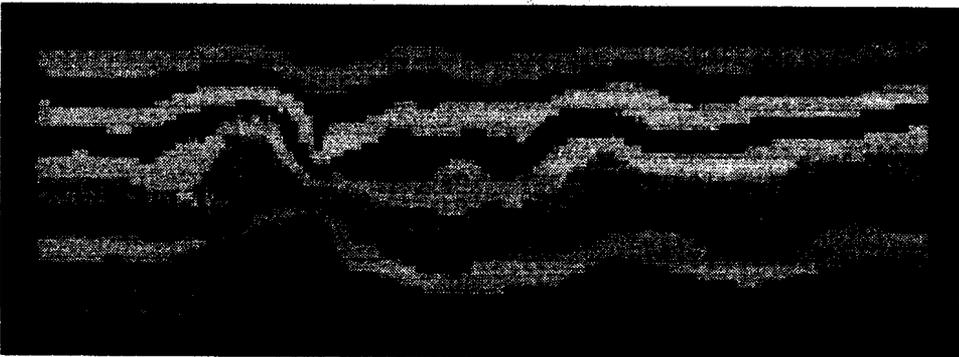


Figura 5 - Função de linha de corrente para  $Re=150000$  e  $t=18.0s$

A seguir apresenta-se um detalhe do escoamento em torno do cilindro, para  $Re=1500$  obtidos em três tempos consecutivos, onde se pode observar o desprendimento de um vórtice.

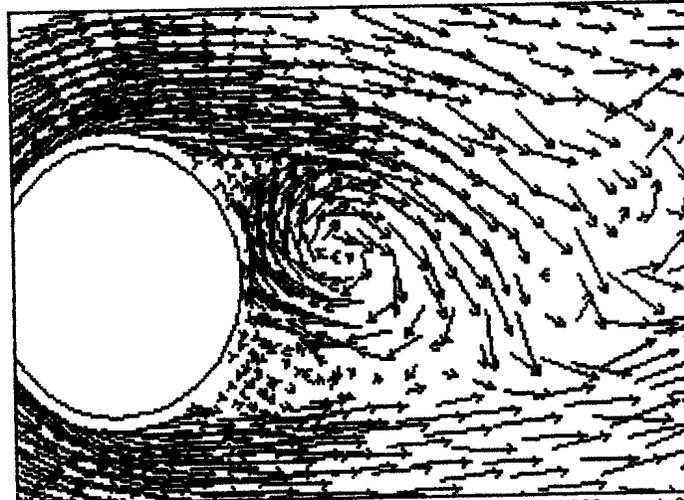


Figura 6 - Fluxo em torno do cilindro para  $Re=1500$  e  $t=4.0s$

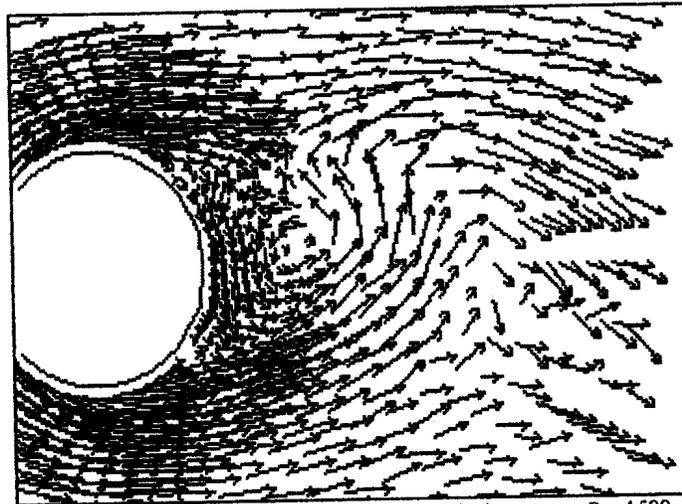


Figura 7 - Escoamento em torno do cilindro para  $Re=1500$  e  $t=4.2s$

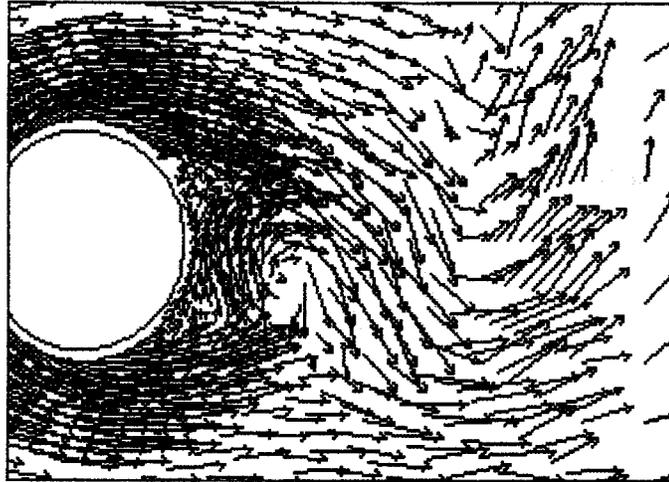


Figura 8 - Escoamento em torno do cilindro para  $Re=1500$  e  $t=4,4s$

#### CONCLUSÕES

O programa desenvolvido demonstra sua capacidade para simular o escoamento transiente e isotérmico de um fluido viscoso para diferentes números de Reynolds, inclusive para  $Re$  bastante altos. O algoritmo para a interação do fluido com a estrutura foi implementado com o objetivo de tornar o programa uma ferramenta adequada para fazer previsões sobre a instabilidade dinâmica de estruturas devida ao desprendimento de vórtices.

A expansão ao caso tri-dimensional, modelos de turbulência e o aprimoramento do programa para o aproveitamento dos recursos de um supercomputador são objetivos de estudo atualmente.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] HIRANO, H.; HARA, H. & KAWAHARA, M. (1982) - "Two Step Explicit Finite Element Method for High Reynolds Number Viscous Fluid Flow", Finite Element Flow Analysis (Proc. of the Fourth Int. Symp. on Finite Element in Flow Problems, KAWAI T. Ed.), pp 121-128, North Holland Publ. Co.
- [2] KAWAHARA, M. & HIRANO, H. (1983) - "A F.E.M. for High Reynolds Number Viscous Flow Using Two Step Explicit Scheme", Int. J. Numerical Meth. Fluid, Vol.3 ,pp 137-163.