

**UNA TECNICA PARA CALCULAR
FACTORES DE INTENSIDAD DE
TENSIONES .**

Adrián Cisilino, Mirco Chapetti, Enrique Pardo.
División Soldadura y Fractomecánica - INTEMA
Fac. de Ingeniería - Univ. Nacional de Mar del Plata - CONICET
Juan B. Justo 4302 (7600) Mar del Plata

RESUMEN

En diversos problemas de fractura y fatiga, la velocidad de crecimiento de fisuras está gobernada por el factor de intensidad de tensiones, K , aplicado. En el caso de fisuras largas, generalmente de frente recto o semielíptico, existen soluciones analíticas. Sin embargo, en el caso de fisuras cortas, generalmente de frente irregular, se hace necesario recurrir a métodos numéricos de cálculo. Para la evaluación de K a partir de resultados numéricos existen diversas técnicas, siendo la más usual la de sustitución de soluciones clásicas a partir de desplazamientos nodales en la vecindad del vértice. En el presente trabajo se compara esa técnica con otra basada en una integral ponderada de tensiones locales. Se muestra que es posible obtener buenas predicciones con mallas relativamente gruesas. Se discuten los resultados obtenidos con ambas técnicas.

ABSTRACT

In many problems of fracture and fatigue, the crack propagation rate is governed by the applied Stress Intensity Factor K . For long cracks, generally their shapes are straight or semielliptic and analytical solutions are available. But, for short cracks, generally with an irregular shape, numerical methods to compute K are necessary. There are many techniques to evaluate K from numerical methods, being the most usual the direct substitution of classical solutions using nodal displacements in the vicinity of the crack tip. The present work compares these techniques with other based on weighted integral of local stresses. It is shown that good predictions can be obtained using coarse meshes. The results obtained with both techniques are discussed.

INTRODUCCION

La Mecánica de Fractura Lineal Elástica en el caso propagación de fisuras debido al efecto de cargas cíclicas, se basa en formulaciones empíricas que relacionan el rango del factor de intensidad de tensiones (ΔK) aplicado con la velocidad de propagación (da/dn), medida en m/ciclo. Paris y Erdogan demostraron que la velocidad de propagación de una fisura por fatiga, puede ser relacionada con el rango del factor de intensidad de tensiones a través de la relación

$$\frac{da}{dn} = C \Delta K^n$$

(1)

donde:

C y n son constantes del material y del medio

$\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ (K_{\max} y K_{\min} son los valores máximos y mínimos de K durante el ciclo de carga)

K responde a una forma general del tipo:

$$K = Y \sigma \sqrt{\pi A}$$

(2)

donde σ es la tensión remota aplicada, a es la longitud de fisura e Y es un factor que depende de la geometría.

Quando se realizan ensayos de fatiga en probetas con iniciadores de fisura naturales (soldaduras, recalques, etc.) para estudiar las etapas de iniciación, propagación y coalescencia de microfisuras se debe determinar los valores de K aplicado para fisuras interactuantes de geometrías irregulares en campos tensionales de fuertes gradientes.

Las soluciones analíticas y empíricas de K usualmente disponibles son adecuadas para analizar situaciones donde las tensiones son uniformes y las fisuras tienen una forma idealmente recta, elíptica o semienlítica [1], siendo muy difícil encontrar soluciones que permitan la determinación de K para el caso antes descrito.

Utilizar métodos numéricos para la determinación de K en estos casos es una de las alternativas disponibles, ya que los mismos permiten modelar cada caso en particular.

CALCULO NUMERICO DE K.

Para calcular K en un punto del frente de fisura existen esencialmente dos criterios [2]. Uno de ellos consiste en el cálculo de la variación de la energía elástica por un avance de la fisura en un punto. Para ello se requiere computar dos soluciones elásticas.

Alternativamente, el FIT puede computarse con una sola solución numérica, por sustitución de soluciones clásicas. En efecto, se puede demostrar que el campo de desplazamientos en la vecindad del frente de fisura tiene la forma [3]

$$u_1^P = \frac{1+\nu}{4E} \sqrt{\frac{2r \cos\phi}{\pi}} K_I^P [(5-8\nu)]$$

$$u_2^P = \frac{1+\nu}{4E} \sqrt{\frac{2r \cos\phi}{\pi}} K_I^P [(7-8\nu)]$$

$$|\phi| \leq \frac{\pi}{2} \quad |\theta| \leq \pi$$

(3)

donde el origen del sistema de coordenadas esféricas se encuentra centrado en el punto P como se muestra en la figura 1.

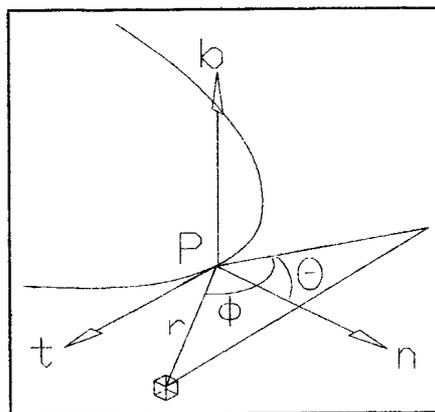


Figura 1. Desplazamientos y tensiones en un punto arbitrario del frente de fisura.[2]

De este modo el FIT puede obtenerse a partir de desplazamientos nodales suficientemente cercanos al vértice.

Cada uno de estos enfoques tiene sus ventajas y desventajas. El primero se torna sumamente costoso en tres dimensiones, sobre todo si se requiere computar K en varios puntos del frente de la fisura, lo que obliga a otros tantos recálculos. Sin embargo tiene la ventaja de no requerir elementos especiales en el vértice de la fisura, pues el campo de tensiones lejos del vértice puede obtenerse con buena precisión aún con mallas gruesas.

El segundo enfoque es computacionalmente más barato. El inconveniente de esta técnica, por su parte, reside en que el campo de tensiones en el entorno de una singularidad dene ser obtenido con buena precisión, lo que conlleva un considerable refinamiento de la malla. En tres dimensiones esto puede requerir un gran volumen de cómputo, y/o considerable esfuerzo en el diseño de la red de elementos finitos. En cualquier caso, los valores del FIT calculados a partir de desplazamientos en distintos nodos, está afectado de cierta dispersión.

El valor esperado puede obtenerse promediando los valores calculados en nodos adyacentes al vértice. El resultado puede aproximar al verdadero valor por defecto o por exceso. La dispersión de los resultados depende a su vez de la regularidad y fineza de la malla de elementos finitos. Con respecto a esto último, cabe aclarar que el criterio de sustitución de soluciones clásicas sólo es válida en un entorno suficientemente reducido del vértice. Como estimación puede considerarse un radio de acción de alrededor de un décimo de la longitud de fisura.

PONDERACION DE TENSIONES LOCALES.

Debido a las ventajas que presenta el cálculo de K a partir de la solución numérica local, en torno al vértice de la fisura, se han propuesto varias metodologías y alternativas.

Así, Dilintas y Laurent [4] propusieron un método basado en las propiedades locales de las soluciones de las ecuaciones de la elasticidad. Este método tiene la virtud de ser efectivo con diversos tipos de singularidades, ya que se basa en expandir la solución local en una base de soluciones particulares. En el caso de fisuras agudas, existe una alternativa más sencilla, consistente en realizar una integral ponderada de las tensiones o desplazamientos en un entorno de la singularidad [5]

En efecto, supóngase que el campo de tensiones locales viene dado por la fórmula [2]

$$\sigma_{11}^p = \frac{K_I^p}{\sqrt{2r \cos \phi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin 3 \frac{\theta}{2} \right]$$

(4)

entonces, la integral del campo de tensiones ponderada con una función soporte local α ,

$$T = \int_V \sigma(x') \alpha(x', x) dv$$

(5)

será proporcional al factor de intensidad de tensiones K. El factor de proporcionalidad entre T y K depende de la forma y radio de la función α .

Para el presente estudio se utilizó una función α de la forma

$$\begin{aligned} & A \left| 1 - \frac{R}{a} \right| \text{ si } R < a \\ & 0 \text{ si } R \geq a \end{aligned}$$

(6)

donde R es la distancia al vértice de la fisura, y a es un radio de acción arbitrariamente elegido. Es conveniente elegir el factor A de la fórmula (5), de modo de normalizar α , exigiendo

$$\int \alpha(x', 0) dv = 1$$

(7)

En este caso, la (4) se convierte en

$$T = \frac{K}{\sqrt{2\pi a}}$$

(8)

RESULTADOS NUMERICOS.

Se realizaron comparaciones de ambas metodologías, y de estas con soluciones exactas para ensayos de tracción en probetas del tipo Single Edge Notch. La geometría y el estado de carga se ilustra en la figura 2. Por razones de simetría sólo se simula un cuarto de probeta. Esta se discretizó en 432 elementos hexaédricos de 20 nodos, con un total de 2355 nodos.

Se procuró mantener la regularidad de la red para evitar errores numéricos, pero no se hizo un refinamiento local, cerca del vértice de la fisura. Para reproducir la singularidad de tensiones, los nodos medios de lados adyacentes al vértice se situaron a una distancia de éste igual a un cuarto de la longitud del lado. (elementos "quarter point"). El cálculo de tensiones elásticas se efectuó con el programa SAP4, en un computador 386 con 4 Mb de RAM. El tiempo de cómputo fue de 8 horas.

Para esta situación existe solución analítica [6] en dos casos límites: deformación plana y tensión plana. La primera es una buena aproximación en el centro de la probeta, y la segunda lo es en la superficie, siendo un 90% de la primera.

El FIT se computó a lo largo del frente de la fisura por dos métodos: desplazamientos nodales (3) e integral ponderada de tensiones (8). Para la integración se usó un esquema de 10x10x10 puntos de Gauss por elemento. El cálculo se realizó en cada punto

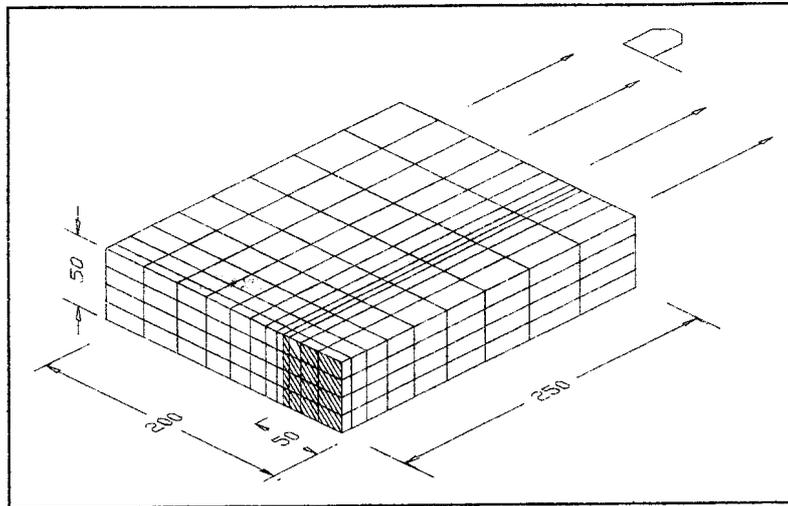


Figura 2. Red de elementos finitos utilizada y estado de carga.

con cuatro valores de a , todos ellos inferiores al tamaño del elemento. La figura 3 muestra la variación del valor medio calculado a lo largo del frente.

En la tabla I se listan los valores de K computados con cuatro radios distintos. La dispersión es en todos los casos inferior al 1%. El error en el cómputo de K en el centro es del 3%, resultado que puede considerarse satisfactorio teniendo en cuenta el tamaño de los elementos utilizados. La predicción de K en la superficie, en cambio, es considerablemente inferior a la estimación analítica, siendo el error del 15%. Este efecto es atribuible a la inhabilidad de la red para acomodar el efecto de constricción superficial en la vecindad del vértice de fisura. Esto se hace evidente por la brusca disminución de K en la superficie externa. (Figura 3)

En la tabla II se listan los valores de K obtenidos directamente a partir de desplazamientos nodales, en nodos cercanos al centro de la probeta. Se observa una considerable dispersión de valores, del 11%. El valor medio, de $91 \text{ MPa m}^{1/2}$ aproxima por exceso a la solución analítica, siendo el error del 5%. Como cabe esperar el error en la estimación de K es del mismo orden, ya que ambos se basan en desplazamientos nodales. Sin embargo, se observa en estos y otros resultados numéricos [] que el método de ponderación de tensiones predice valores de K sistemáticamente por defecto, respecto del valor analítico.

Promediando valores nodales, en cambio, hay una tendencia a aproximar por exceso, aunque no es posible asegurar aún que esta tendencia sea general.

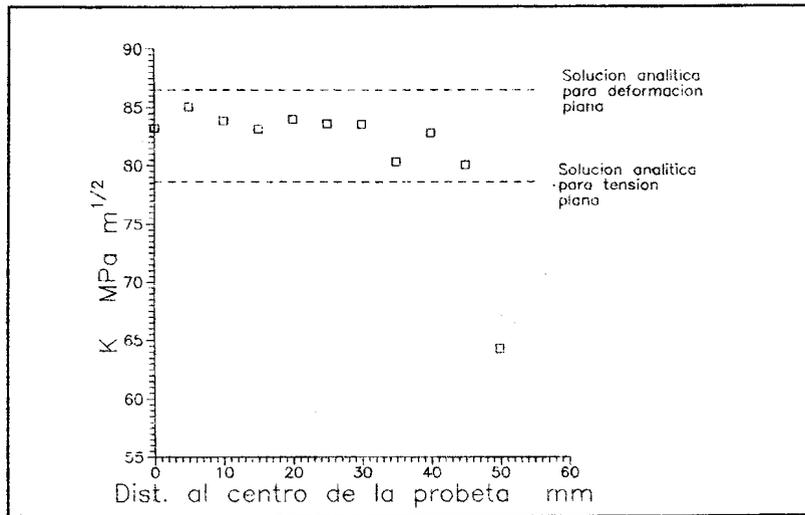


Figura 3. K en función de la distancia al centro de la probeta.

Radio [mm]	K [MPam ^{1/2}]
2.50	84.0059
2.80	83.5956
3.00	83.3140
3.50	81.6525

Tabla I. K computados en el centro de la probeta.
K promedio = 83.23 MPa m^{1/2} Dispersion= 1% Error= 3%

Nodo	Coord [mm]			Despl [mm]			K MPam ^{1/2}
	X1	X2	X3	U1	U2	U3	
429	8.025	2.344	0.000	0.0215	0.0261	0.0000	93.18
216	8.025	0.000	0.000	0.0287	0.0267	0.0000	92.97
430	3.395	5.625	0.000	0.0054	0.0166	0.0000	89.50
213	2.006	0.000	0.000	0.0123	0.0145	0.0000	100.97
625	0.000	9.844	0.000	0.0000	0.0176	0.0000	88.10
428	0.000	5.625	0.000	0.0000	0.0140	0.0000	92.27
426	0.000	1.406	0.000	0.0000	0.0062	0.0000	81.52

Tabla II. Valores de K obtenidos a partir de desplazamientos nodales en el centro de la probeta.
K promedio= 91 MPa m^{1/2} Dispersion= 11% Error= 15%

CONCLUSIONES.

Con mallas relativamente gruesas pero regulares , y usando elementos quarter-point, es posible obtener buenas predicciones del factor de intensidad de tensiones en tres dimensiones. Los valores obtenidos con la integral de ponderación tienen baja dispersión si el radio del kernel es del orden del tamaño de los elementos.

Las predicciones numéricas con este método aproximan al factor de intensidad de tensiones por defecto. Los valores de K obtenidos directamente a partir de desplazamientos nodales exhiben considerable dispersión. El valor medio, por otro lado, parece constituir una aproximación por exceso.

REFERENCIAS

- [1] Hiroshi Tada, Paul C. Paris, George R. Irwin. The Stress Analysis of Cracks Handbook. Second Edition. Paris Productions Incorporated, 1985
- [2] Nelson, D.V. "Review of Fatigue Growth Prediction Methods", Exp. Mech., Vol.17, No. 2, 1977, pp.41
- [3] Advances in Boundary Elements. Vol. 3 Stress Analysis. Computational Mechanics Publications. Springer-Verlag. 1989
- [4] Dilintas, G., Laurent-Grengoux, P. "Computing Stress Intensity Factors in Anisotropic Solids by FEM", Comp. Math. Appl. Mech & Eng., Vol. 84, 1990, pp.11
- [5] Pardo, E. "Una técnica de integral de convolución para determinar factores de intensidad de tensiones por elementos finitos", Mecánica Computacional, Vol. 12.
- [6] Gilchrist, M.D., Smith R.A. "Finite Element Modelling of Fatigue Crack Shapes", Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct, Vol.14, No. 6, pp.617, 1991
- [7] Owen, D.R.J., Fawkes, A.J. "Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Application" Pineridge Press, Swansea, U.K., 1983