

**PLASTICIDAD CON GRANDES DEFORMACIONES.
FUNDAMENTOS Y APLICACIONES**

C. GARCIA GARINO, J. OLIVER y S. BOTELLO

E. T. S. de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos
Gran Capitán s/n, E-08034, Barcelona, España

RESUMEN

En el trabajo se describe un modelo constitutivo para sólidos sometidos a grandes deformaciones elastoplásticas, así como su implementación numérica. Además se discute la extensión del modelo para incorporar condiciones de contorno del tipo contacto/fricción. Finalmente el modelo se utiliza para la simulación de problemas de conformado de láminas metálicas.

ABSTRACT

This paper describes a finite strain elastoplastic constitutive model. The numerical implementation of the model in a computational code is discussed. On the other hand the model is enhanced to deal with frictional contact interfaces. Finally applications of the model in the numerical simulation of sheet metal forming operations are provided.

INTRODUCCION

Tradicionalmente la plasticidad con grandes deformaciones ha sido tratada en forma numérica mediante modelos hipoeelásticos [1]. Este tipo de ley constitutiva relaciona una derivada objetiva del tensor de tensiones de Cauchy con el tensor velocidad de deformaciones, mediante un tensor de elasticidad de cuarto orden. En la práctica este tensor se hace constante e igual al de pequeñas deformaciones. Un inconveniente de esta elección es que estos modelos pueden disipar energía, contradiciendo la noción clásica de la elasticidad. Sin embargo desde el punto de vista práctico un problema aun mayor es que la respuesta *elástica* debe ser integrada para calcular las tensiones.

Por otra parte, desde hace varios años, se han escrito y utilizado en la práctica modelos capaces de tratar elasticidad con grandes deformaciones, basados en la termodinámica de los sólidos irreversibles y en la noción de hiperelasticidad.

En los últimos años estas ideas se han extendido al problema elastoplástico con grandes deformaciones. Los modelos constitutivos más recientes que tratan este problema se basan en una Cinemática Multiplicativa, ley constitutiva hiperelástica, y están postulados en el contexto de la Termodinámica de los sólidos irreversibles. Estas ideas en general son las propuestas por Simo y Ortiz [2,3]. Es importante mencionar que estos modelos son válidos para grandes deformaciones elásticas en ausencia de plasticidad, y que pueden escribirse tanto en variables materiales así como en variables espaciales.

El trabajo está escrito en el contexto de las ideas esbozadas en el párrafo previo y resume otros trabajos de los autores [4-6]. La formulación teórica del modelo comienza con la discusión de la cinemática y continúa con la descripción de la ecuación constitutiva. Posteriormente se trata el caso particular de pequeñas deformaciones elásticas, usual en los metales.

La implementación numérica del modelo se basa en un algoritmo predictor-corrector. La predicción corresponde a la respuesta elástica, y la corrección trata el problema plástico. Una consecuencia importante de este esquema es que las tensiones se obtienen directamente sin necesidad de integración.

Estas ideas se han implementado en un código de ordenador, el cual se ha empleado en la simulación numérica de problemas de conformado de láminas metálicas. Para ello ha sido necesario incluir condiciones de contorno del tipo de contacto y fricción, las cuales también se tratan en el contexto de la elastoplasticidad.

FORMULACION TEORICA

CINEMATICA

La cinemática del problema se define introduciendo la configuración intermedia, que conduce a la clásica descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación F en sus componentes elástica y and plástica [7]:

$$F = F^e F^p \quad (1)$$

La componente plástica del tensor de Cauchy-Green derecho se define mediante $C^p = F^{pT} F^p$ [8,9]. De manera análoga a la definición del tensor de Green Lagrange $E = \frac{1}{2}(C - G)$, se define su componente plástica $E^p = \frac{1}{2}(C^p - G)$, donde G es el tensor métrico en la configuración material. Luego en dicha configuración resulta la descomposición aditiva del tensor de Green Lagrange $E = E^e + E^p$ [10]. Calculando el push-forward ϕ_* [11] del tensor de Green-Lagrange, se obtienen expresiones semejantes de tensores espaciales en las configuraciones intermedia y deformada, ${}^i\Omega^e$ and ${}^i\Omega$, respectivamente, como se resume en la Tabla 1 [2]

Tabla 1 : Cinemática del continuo elastoplástico

$$\begin{array}{ccc} {}^o\Omega & {}^i\Omega^e & {}^i\Omega \\ \mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p & \overline{\mathbf{E}} = \overline{\mathbf{E}}^e + \overline{\mathbf{E}}^p & \mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \\ \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p & \overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{D}}^e + \overline{\mathbf{D}}^p & \mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \end{array}$$

Así se definen los tensores $\overline{\mathbf{E}}$, $\overline{\mathbf{E}}^e$ y $\overline{\mathbf{E}}^p$ en la configuración intermedia ${}^i\Omega^e$, y el tensor de Almansi \mathbf{e} , así como sus componentes elástica y plástica \mathbf{e}^e y \mathbf{e}^p , respectivamente, en la configuración deformada ${}^i\Omega$. La componente elástica del tensor de Almansi se define como $\mathbf{e}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b}^{e-1})$, donde \mathbf{g} es el tensor métrico espacial, y el tensor de Finger elástico se calcula mediante $\mathbf{b}^{e-1} = \mathbf{F}^{e-T} \mathbf{F}^{e-1}$. Los tensores velocidad de deformación $\overline{\mathbf{D}}$ y $\overline{\mathbf{d}}$ en las configuraciones intermedia y deformada ${}^i\Omega^e$ y ${}^i\Omega$, respectivamente, se obtienen calculando las derivadas de Lie L_v [11] de los tensores de deformación.

LEY CONSTITUTIVA

La respuesta del modelo constitutivo se formula en el contexto de la termodinámica irreversible de los sólidos. Consecuentemente se plantean una función de energía libre $\overline{\Psi}$ y un conjunto adecuado de variables internas $\overline{\mathbf{Q}}$. La función de energía libre se expresa en función de variables definidas en la configuración intermedia [7]:

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}^e(\mathbf{F}^e) + \overline{\psi}^p(\overline{\mathbf{Q}}) \quad (2)$$

Teniendo en cuenta el Principio de Objetividad, y suponiendo que el material es isótropo, la ec. (2) se reescribe:

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}^e(\mathbf{C}^e) + \tilde{\psi}^p(\overline{\mathbf{Q}}) = \tilde{\psi}^e(\mathbf{b}^e) + \tilde{\psi}^p(\mathbf{q}) = \psi^e(\mathbf{e}^e) + \psi^p(\mathbf{q}) \quad (3)$$

Análogamente el criterio de fluencia resulta:

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\mathbf{e}^e, \mathbf{q}) \quad (4)$$

que a su vez puede expresarse en función de las tensiones teniendo en cuenta la ecuación constitutiva. Por razones de simplicidad se considera una regla de flujo asociada. Luego las leyes de evolución para las variables internas resultan:

$$\mathbf{d}^p = L_v(\mathbf{e}^p) = \lambda \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{e}^e} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad L_v \mathbf{q} = \lambda H \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{e}^e} = \lambda H \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5)$$

La desigualdad de Clausius-Duhem expresa en el caso de los sólidos la exigencia de la segunda Ley de la termodinámica de generación de entropía o *disipación* no negativa. Despreciando los efectos térmicos resulta en la configuración deformada ${}^i\Omega$:

$$-\rho \dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \quad (6)$$

y teniendo en cuenta la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformación $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$ (vease Tabla 1) y las ec. (3-5) las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ and la disipación plástica γ pueden calcularse mediante:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi(\mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \quad \gamma = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p - \rho \frac{\partial \psi^p}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) : L_v \mathbf{q} \geq 0 \quad (7)$$

A su vez los tensores tangente elástico y elastoplástico en la configuración espacial resultan respectivamente [6]:

$$\mathbf{a}^e = \frac{\partial \psi(\mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \otimes \frac{\partial \psi(\mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \quad \mathbf{a} = \left[\mathbf{a}^e - \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{a}^e \right\} \otimes \left\{ \mathbf{a}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{a}^e + H} \right] \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a} : \mathbf{d} \quad (8)$$

donde $\overset{\circ}{\sigma}$ es la derivada de Truesdell del tensor de tensiones de Cauchy, y H es el coeficiente de endurecimiento isotropo. Con las expresiones anteriores quedan definidos todos los elementos que describen el modelo constitutivo. Luego el problema se reduce a actualizar en forma apropiada las variables de estado y las variables internas e^e y q respectivamente. En el caso de metales las deformaciones elásticas usualmente son pequeñas, y la función de energía libre elegida resulta:

$$\psi^e = \frac{1}{2} \lambda \text{tr}(e^e)^2 + \mu (e^e : e^e) \quad (9)$$

que ha sido empleada por los autores [4] como una alternativa a los modelos neohookeanos utilizados en otros trabajos. La plasticidad se tiene en cuenta mediante el criterio de Von Mises o J2.

IMPLEMENTACION NUMERICA

Dada una configuración conocida ${}^t\Omega$, definida por el tensor gradiente de la deformación tF , y las variables ${}^t e^e$ y ${}^t q$. Ante un incremento de desplazamientos $\Delta \mathbf{u}$ que definen el tensor gradiente de deformación incremental $F_u = (I + \text{Grad } \mathbf{u})$ resulta una configuración deformada ${}^{t+\Delta t}\Omega$, que se caracteriza mediante el tensor gradiente de la deformación ${}^{t+\Delta t}F = F_u {}^tF$. El problema consiste en actualizar las variables del problema, verificando el modelo constitutivo, para la nueva configuración ${}^{t+\Delta t}\Omega$. Para ello se emplea un algoritmo predictor corrector como se muestra en la Tabla 2 [2]:

Tabla 2: Descomposición del problema elastoplástico

Problema Básico	=	Predictor Elástico	+	Corrector Plástico
$L_u(e) = \mathbf{d}$	=	$L_u(e) = \mathbf{d}$	+	$L_u(e) = 0$
$L_u(e^p) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$	=	$L_u(e^p) = 0$	+	$L_u(e^p) = \mathbf{d}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$
$L_u(q) = \lambda H \frac{\partial f}{\partial \sigma}$	=	$L_u(q) = 0$	+	$L_u(q) = \lambda H \frac{\partial f}{\partial \sigma}$

PREDICTOR ELASTICO

Para este problema las variables plásticas no cambian (${}^{t+\Delta t}F^p{}^{TR} = {}^tF^p$). La componente elástica (*predictora*) del tensor gradiente de la deformación se calcula mediante:

$${}^{t+\Delta t}F^{eTR} = {}^{t+\Delta t}F ({}^{t+\Delta t}F^p{}^{TR})^{-1} = F_u {}^tF ({}^tF^p)^{-1} = F_u {}^tF^e \quad (10)$$

El predictor del tensor elástico de Finger ${}^{t+\Delta t}b^{e-1TR}$ resulta:

$${}^{t+\Delta t}b^{e-1TR} = {}^{t+\Delta t}F^{e-T} {}^{t+\Delta t}F^{e-1} = F_u^{-T} {}^t b^{e-1} F_u^{-1} \quad (11)$$

Luego las tensiones predictoras σ^{TR} se calculan a partir de la ec (7) en función del predictor del tensor elástico de Almansi ${}^{t+\Delta t}e^{eTR} = \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t}g - {}^{t+\Delta t}b^{e-1TR})$

Es importante destacar que el problema elástico se basa en el cálculo de una expresión exacta (definición del tensor de Almansi), con lo que se evitan costosas integraciones numéricas típicas de los modelos hipoeelásticos.

PROBLEMA PLASTICO

En este caso la configuración deformada permanece fija y las variables internas se actualizan para satisfacer la ecuación constitutiva. Para este problema Simo [2] ha propuesto integrar el flujo plástico en la configuración original:

$$\dot{C}^p = 2 \phi^* \mathbf{d}^p = 2 \lambda \phi^* \mathbf{n} = 2 \lambda N \quad (12)$$

donde ϕ^* indica el operador pull-back [11] y $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$. Integrando la ecuación (12) mediante un esquema de Euler implícito resulta:

$${}^{t+\Delta t}C^p - {}^tC^p = 2 \lambda {}^{t+\Delta t}N \quad (13)$$

Calculando el push-forward de esta expresión se obtiene [6]:

$${}^{t+\Delta t}b^{e-1} = {}^{t+\Delta t}b^{e-1TR} + 2 \lambda {}^{t+\Delta t}\mathbf{n} \quad (14)$$

El factor $2 \lambda {}^{t+\Delta t}\mathbf{n}$ se obtiene mediante el uso del algoritmo de retorno radial.

EL PROBLEMA DE CONTACTO FRICCIONAL

En muchos problemas prácticos las condiciones de contorno tienen que tener en cuenta interacciones entre dos o más sólidos, o bien entre un sólido y una superficie rígida, problema que en se conoce como *contacto*. El problema de contacto esta acompañado, en general, por la *fricción*, que se manifiesta mediante fuerzas tangenciales a las superficies en contacto. Luego el problema no lineal sin restricciones escrito en función de las fuerzas internas $G(\mathbf{u})$ y las cargas externas \mathbf{F}

$$G(\mathbf{u}) - \mathbf{F} = 0 \quad (15)$$

resulta modificado por la presencia de fuerzas nodales debidas al contacto y a la fricción \mathbf{R}_C , y \mathbf{R}_F respectivamente, y el problema restringido queda:

$$G(\mathbf{u}) + \mathbf{R}_C(\mathbf{u}) + \mathbf{R}_F(\mathbf{u}) - \mathbf{F} = 0 \quad (16)$$

PROBLEMA DE CONTACTO

La geometría del problema se describe en la figura 1 en función de los vectores normal, tangencial y del gap nodal N , T , y g respectivamente.

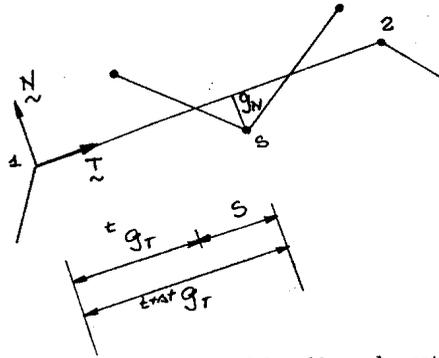


Figura 1: Geometría del problema de contacto

Las fuerzas nodales se calculan mediante el método de penalización [12]. Estas fuerzas \mathbf{R}_C se expresan en función de la geometría del problema y del coeficiente de penalización ϵ , en la práctica del orden de 10^6 , según:

$$\mathbf{R}_C = \epsilon g \mathbf{N} \quad \text{if } g > 0 \quad (17)$$

En el caso de interacción entre un sólido y una superficie rígida no hay cambios en la geometría y la contribución del contacto al Hessiano del problema es:

$$\mathbf{K}_C = \epsilon \mathbf{N} \mathbf{N}^T \quad \text{if } g > 0 \quad (18)$$

CONTACTO FRICCIONAL

En este caso deben distinguirse dos situaciones: en las etapas iniciales del proceso las superficies en contacto permanecen adheridas, y aparecen fuerzas que se oponen al deslizamiento relativo. Una vez que estas fuerzas han superado un valor límite, entonces sucede el deslizamiento entre los sólidos. Este comportamiento puede modelarse mediante la ley de Coulomb:

$$\mathbf{t}_F = \mu \mathbf{t}_N \frac{\mathbf{t}_T}{\|\mathbf{t}_T\|} = \mu \mathbf{t}_N \mathbf{e}_T \quad (19)$$

Esta ley puede regularizarse introduciendo un factor de penalización ϵ_F . De esta forma el problema puede tratarse en forma semejante al elastoplástico [13]. El deslizamiento tangencial s se descompone en sus componentes elástica y plástica. De acuerdo con Wriggers [14], resulta:

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\Delta t} s &= {}^{t+\Delta t} s^e + {}^{t+\Delta t} s^p \\ {}^{t+\Delta t} t_{FR} &= \epsilon_F s^{eTR} \\ {}^{t+\Delta t} t_F &= \epsilon_F (s^e - \lambda e_T) = {}^{t+\Delta t} t_{FR} - \epsilon_F \lambda e_T \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

La ley de Coulomb puede reescribirse teniendo en cuenta la ec (20) como:

$$\|{}^{t+\Delta t} t_{FR}^{TR}\| - \epsilon_F \lambda - \mu \|{}^{t+\Delta t} t_N\| = 0 \quad (21)$$

Si el coeficiente de fricción μ es constante la ec(21) tiene solución exacta y se recupera la expresión clásica de la ley de Coulomb:

$${}^{t+\Delta t} t_F = \mu {}^{t+\Delta t} t_N \quad (22)$$

Escribiendo las fuerzas nodales $R_F = t_F T$, la contribución al Hessiano de las fuerzas friccionales resulta [14]:

$$\left. \begin{aligned} K_F &= \epsilon_F T T^T & \text{if } t_F < \mu t_N \\ K_F &= \epsilon_F T N^T & \text{if } t_F = \mu t_N \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Los autores han propuesto una simplificación para evitar el uso de una matriz no simétrica. En este caso el módulo de la reacción normal ya no se actualiza en cada iteración, sino que permanece constante durante cada incremento de carga e igual al último valor convergido [15]. Este esquema denominado Quasi-Coulomb se expresa:

$${}^{t+\Delta t} t_F = \mu {}^t t_N \quad (24)$$

En la practica esta simplificación es equivalente a aproximar en forma discontinua por trozos la función de fluencia dada por la ecuación (21) como se muestra en la figura:

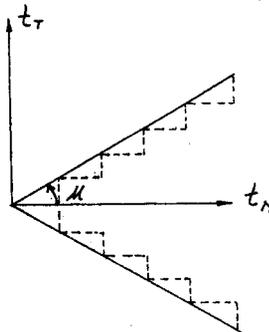


Figura 2: Criterios de fluencia original y modificado

Es importante destacar que la regla de flujo original no se altera y el problema resulta asociado. Si además se cumplen las siguientes condiciones:

- i) Problema Elastico-perfectamente plastico (μ fijo)
- ii) Geometría lineal (superficies rígidas)
- iii) empleo de una ley Quasi-Coulomb (Módulo de t_N constante)

la matriz friccional K_F se anula:

$$K_F = \frac{\partial R_F}{\partial \Delta u} = \frac{\partial \mu}{\partial \Delta u} t_N T + \mu \frac{\partial t_N}{\partial \Delta u} T + \mu t_N \frac{\partial T}{\partial \Delta u} = 0 \quad (25)$$

porque todas las variables permanecen constantes.

APLICACIONES

ESTIRAMIENTO DE UNA LAMINA CIRCULAR CON PUNZON HEMISFERICO

En esta aplicación se estudia la embutición de una lámina circular mediante un punzón hemisférico, como puede verse en la figura 3 en donde se indican dimensiones y datos del material. Este problema ha sido propuesto por Lee et al [16], y constituye un caso de prueba clásico. El problema ha sido resuelto con condiciones de axilimetría, y se han utilizado 28 elementos Q4/P0, cudrilateros con desplazamientos lineales y presión constante.

$$E = 69004 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma_y = 589 (10^{-4} + \bar{\epsilon}_p)^{0.216}$$

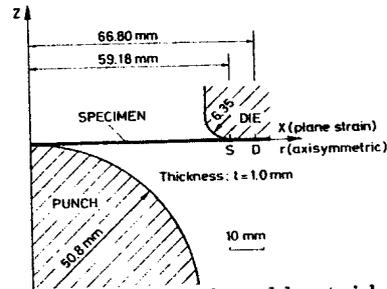


Figura 3: Estiramiento de una lámina circular: geometría y datos del material.

El problema se ha analizado con tres coeficientes de fricción diferentes en la interface: $\mu = 0$, $\mu = 0.15$ y $\mu = 0.3$ respectivamente. En la figura 4 se muestran gráficos carga-desplazamiento del punzón para los casos anteriores. La presencia de la fricción produce una rigidización en la respuesta, con lo que aumenta tanto la carga máxima en el punzón así como el desplazamiento correspondiente a la misma. En dicha figura también se indican resultados de referencia [17], observándose una concordancia excelente.

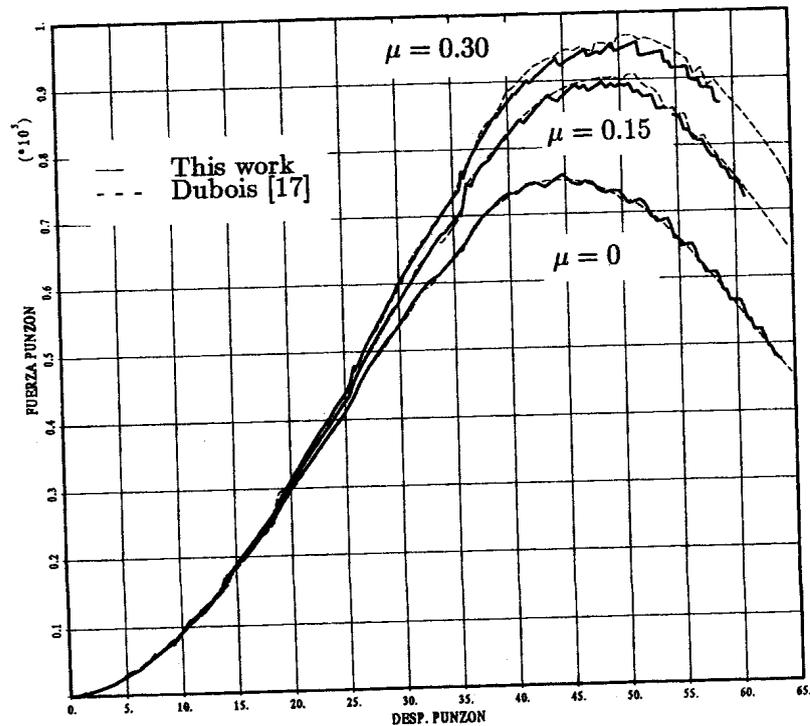


Figura 4: Estiramiento de una lámina circular: comparación de resultados.

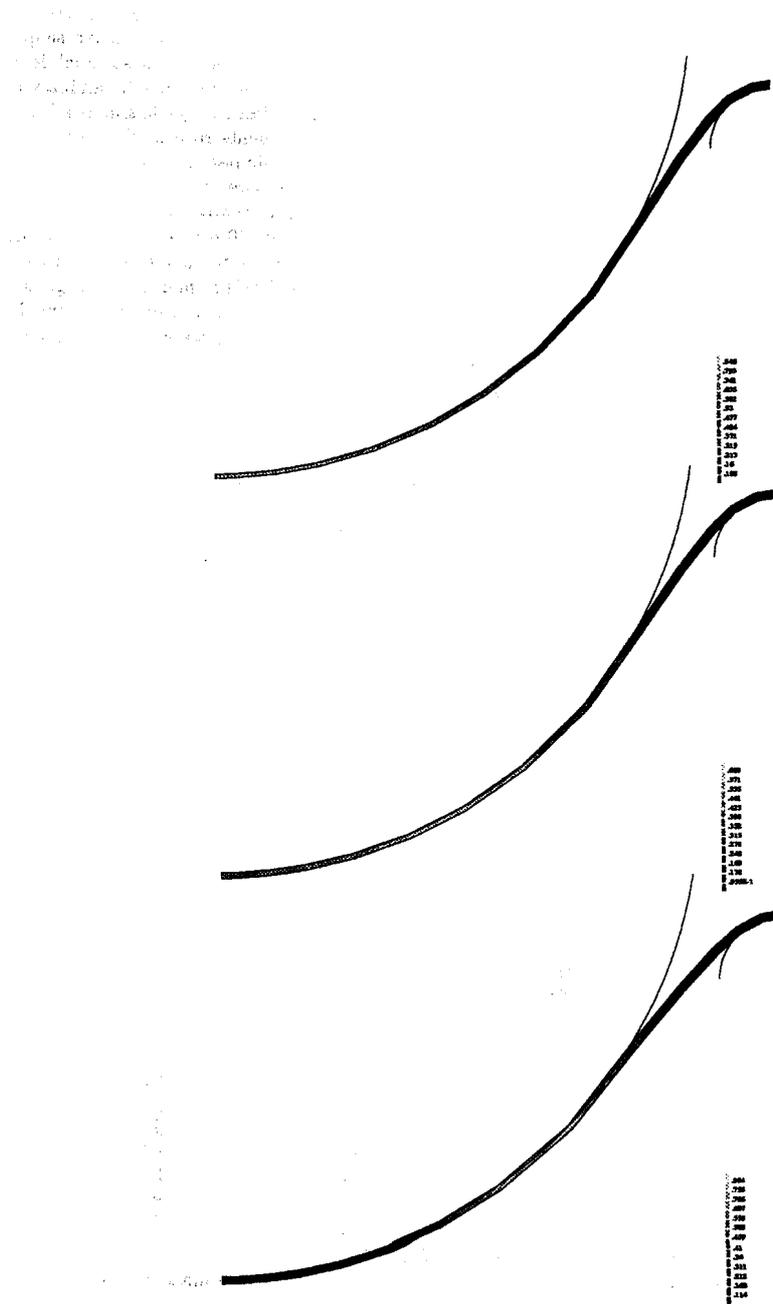


Figura 5: Estiramiento de una lamina circular: deformada y contornos de e^p

En la figura 5 se muestra el efecto de la fricción en la deformación de la lámina. Para los tres casos analizados se han comparado las deformadas y los contornos de deformación plástica efectiva. Puede observarse que para $\mu = 0$ la plastificación máxima se produce junto al eje de simetría, y en esta zona el espesor final de la lámina es mínimo. En cambio en presencia de la fricción aparecen fuerzas tangenciales entre la lámina y el punzón que *descargan* a la primera y las deformaciones máximas se desplazan desde el eje de simetría hacia la matriz, hasta que se produce la concentración de deformaciones y la consecuente rotura. Puede notarse que en el caso de fricción $\mu = 0.15$ este proceso es más o menos gradual, en cambio para $\mu = 0.3$ el espesor en el eje de simetría es prácticamente el inicial, y las deformaciones máximas y espesores mínimos se encuentran debajo del punzón. El problema ha sido resuelto para el caso $\mu = 0$ con 57 incrementos de carga y un total de 136 iteraciones de equilibrio hasta alcanzar un desplazamiento del punzón de 40 mm, en 51 segundos de CPU. El mismo caso para un desplazamiento del punzón de 63.8 mm se ha resuelto en 120 incrementos y 309 iteraciones en 63.8 seg. de CPU. Para el caso $\mu = 0.15$ se han empleado 130 incrementos de carga con 214 iteraciones de equilibrio, y un tiempo de CPU de 90 seg, para un desplazamiento del punzón de 40 mm. El mismo problema ha requerido 180 incrementos, 313 iteraciones y 127 seg. de CPU, para un desplazamiento del punzón de 60.8 mm. Finalmente el caso $\mu = 0.3$ se ha resuelto en 260 incrementos, 365 iteraciones y 191 seg de CPU, para 58 mm de desplazamiento del punzón. En todos los casos se ha empleado un ordenador CONVEX C-1. Más información acerca de esta clase de problemas puede consultarse en trabajos previos de los autores [15,18].

IMPACTO DE UNA BARRA CILINDRICA CONTRA UNA PARED RIGIDA

En este caso se estudia el impacto de una barra circular sometida a una velocidad inicial de 227 m/seg contra una pared rígida. La barra posee una longitud y radio iniciales de 32.4 y 3.2 mm respectivamente. Las propiedades del material son las del cobre: $E = 117GPa$, $\nu = 0.35$, $\sigma_y = 0.4GPa$, y $H = 0.1GPa$. La barra ha sido modelada con 216 elementos Q4/P0, 6 en sentido radial y 36 en sentido longitudinal. Por simplicidad las condiciones de contorno se han impuesto mediante apoyos deslizantes. A diferencia del caso anterior, quasiestático, en este problema se deben tener en cuenta efectos de inercia. Para ello se ha implementado el modelo constitutivo en un código que integra en el tiempo las ecuaciones del movimiento utilizando un esquema explícito. La matriz de masa empleada es diagonal. El transitorio que se estudia transcurre en 80 μs , y se han empleado 8000 pasos de tiempo para simularlo. En la figura 6 se observan la deformada y los contornos de deformación plástica efectiva

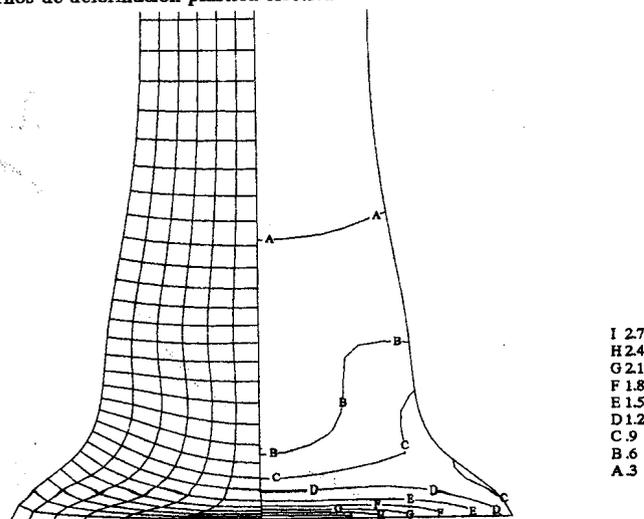


Figura 6: Impacto de una barra cilíndrica: deformada y contornos de deformación plástica efectiva.

Los resultados obtenidos muestran una excelente concordancia con los recopilados en la referencia [19], lo que se ilustra en la tabla 3, en la que se comparan los valores de la altura y radio finales, así como la máxima deformación plástica efectiva para distintos códigos.

Tabla 3: Impacto de la barra: comparación de resultados

CODIGO	Radio final	Long. final	Max. $\bar{\epsilon}_p$
Este trabajo	7.11	21.47	3.09
NIKE2D	7.07	21.47	2.97
DYNA2D	7.13	21.47	3.05
DYNA3D	7.03	21.47	2.96
LIU	7.15	21.42	
PONTHOT	7.12	21.43	3.13

Es importante destacar que no existen practicamente referencias en la literatura del empleo de modelos hiperelásticos ni en este tipo de códigos, ni en esta clase de problemas. A manera de ilustración se indican los tiempos de de CPU aproximados requeridos para el análisis en diferentes ordenadores: CONVEX C-3 1000 seg; CONVEX C-1 3000 seg; PC 486/33Mhz 6000 seg; PC 386/25Mhz (con coprocesador) 18000 seg.

CONCLUSIONES

En el trabajo se han presentado los elementos de un modelo constitutivo capaz de tratar sólidos sometidos a grandes deformaciones. El modelo resulta totalmente consistente con la Mecánica de los medios continuos, y su implementación numérica es muy sencilla. Por otra parte el modelo permite tratar condiciones de contorno del tipo contacto y fricción.

El modelo ha sido ensayado mediante problemas no lineales complejos tanto en régimen estático como dinámico. En muchos casos estos ejemplos incluyen efectos de contacto y fricción. En todos estos problemas se han obtenido excelentes resultados con un esfuerzo computacional generalmente pequeño.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Fernando Flores su valiosa colaboración y útiles discusiones acerca del problema dinámico. Este trabajo ha sido financiado parcialmente por la Comisión de Investigación Científica y Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia de España y el programa BRITE de la CEE bajo contrato RI1B-0240-CEL, a quienes se agradece el apoyo recibido. CGG agradece la ayuda de viaje otorgada por la Universidad Politécnica de Cataluña para la presentación de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] - McMeeking, R. M. and Rice, J. R. *Finite element formulations for problems of large Elastic Plastic deformation*- International Journal for Solids and Structures, Vol. 11, pp. 601- 616, 1975
- [2] - Simo J. C. and Ortiz M. - *A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations* - Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, Vol. 49, pp. 221-245, 1985.
- [3] - Simo J.C.- *A Framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I, and Part II*- Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, Vol. 66, pp. 199-219, 1988 and Vol 68 pp. 1-31, 1988.
- [4] - Oliver J. and Garcia Garino C. - *Simulación de procesos elastoplásticos con grandes deformaciones. Formulación Teórica y aplicaciones*, en Métodos Numéricos en Ingeniería, G. Winter and M. Galante (Ed.), SEMNI, Barcelona, 1990.
- [5] - García Garino C. and Oliver J., *A numerical model for elastoplastic large strain problems. Fundamentals and applications*, in Computational Plasticity, R. Owen et al Ed., Pineridge Press-CIMNE, Vol 1, 117:129
- [6] - García Garino C. - *Contribución a la Mecánica Computacional de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones* - Tesis doctoral (en curso) - E.T.S. Ingenieros de Caminos, Barcelona.
- [7] - Lee E. H.- *Elastic-Plastic deformation at finite strains* - J. Appl. Mech., Vol. 36, pp. 1- 6, 1969.
- [8] - Sidoroff F., *Quelques réflexions sur le principe d'indifférence matérielle pour un milieu ayant un état relâché*, C. R. Acad. Sc. Paris, 271, 1026:1029, 1970
- [9] - Green A. E. and Nagdhi P. M., *Some remarks on elastic plastic deformation at finite strain*, Int. J. of Engng. Sci. 9, 1219:1329
- [10] - Green A. E. and Nagdhi P. M., *A general theory of elastic plastic continuum*, Archs. Ration. Mech. Analysis, 18, 251:281, 1965

- [11] - Marsden J.E. and Hughes T.J.R. - *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [12] - Agelet de Saracibar C.- *Un modelo de contacto friccional. Aplicación a problemas de conformado de metales*, Informe Interno, E.T.S Ingenieros de Caminos, UPC, 1988.
- [13] - Cournier A., *A Theory of friction*, Int. J. Solids Structures, 20, 593-623, 1984
- [14] - Wriggers P., *On consistent tangent matrices for frictional contact problems*, Proceedings del Numeta 87, Middleton J. (Ed.), C15/1, Elsevier, 1987
- [15] - García Garino C. and Oliver J., *Simulation of sheet metal forming processes using a frictional finite strain elastoplastic model*, Proceedings of the First European Conference on Numerical Methods in Engineering, Elsevier, en prensa
- [16] - Lee J.K., Wagoner R. and Nakamachi E.- *A benchmark test for sheet metal forming analysis*, Technical report, Ohio State University, 1988.
- [17] - Dubois F.- Comunicación personal, Junio 1992.
- [18] - García Garino C. and Oliver J., *Use of a large strain elastoplastic model for simulation of metal forming processes*, Proc. de NUMIFORM 92, Balkema, en prensa.
- [19] - Ponthot J.Ph. *The use of the eulerian lagrangian formulation including contact applications to forming simulations via FEM*, Proc. del congreso NUMIFORM 92, Balkema, en prensa