CALCULO COMPUTACIONAL DE PARAMETROS HIDRAULICOS EN CANALES ABIERTOS

Alfredo E. TRENTO, Ana María T. ALVAREZ
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral, CC 495, 3000 Santa Fe, Argentina

RESUMEN

La dificultad en el cálculo analítico de los parámetros hidráulicos para el diseño de secciones transversales en canales abiertos, condujo a los ingenieros al empleo habitual de gráficos y tablas. En este trabajo se ha desarrollado un programa computacional en base al método numérico de Newton-Raphson, para determinar las profundidades normal, crítica y los parámetros hidráulicos que caracterizan secciones transversales de distintas geometrías. Se consideran los distintos regímenes (superior, inferior y crítico), que los canales son no erosionables, de fondo plano y con rugosidad constante e independiente de la profundidad.

El programa ejecutable es interactivo y se puede procesar en cualquier PC compatible.

ABSTRACT

Analytical computation of hydraulics parameters is a difficult task. For this reason engineers generally have resorted to graphics and tables. In this paper, it has been developed a computer program based on Newton-Raphson numerical method for determining the normal and critical depths and the hydraulics parameters defining cross-sections of different geometric forms. Various regimes (higher, lower and critical), and channels with the following characteristics :non erosionable , withflat bed, and constant and independent of the depth rugosity, were considered.

The execute program is interactive and it can run at any compatible PC.

INTRODUCCION

El cálculo de la profundidad normal (y_n) y crítica (y_c) es un paso ineludible en el diseño de canales abiertos. La profundidad normal es la profundidad de un flujo uniforme. Esta clase de escurrimientos se establece cuando las fuerzas resistivas son equilibradas por la fuerza de gravedad. De tal forma, la pendiente de fondo del canal, la superficial y la de la línea de energía se hacen paralelas. Los demás parámetros , por ejemplo : el caudal, la velocidad, etc., se consideran constantes a lo largo del escurrimiento.

En la determinación de y_n se emplea la fórmula de Manning :

$$V = \frac{1}{n} S^{1/2} R^{2/3} \quad (1)$$

donde :
n = coeficiente de rugosidad, en $(s/m^{1/3})$
S = pendiente de la línea de energía, en (m/m)
R = radio hidráulico, en (m)
V = velocidad media en la sección, en (m/s)

A partir de la ecuación de continuidad :

$$Q = A \cdot V \quad (2)$$

con :
Q = caudal, en (m /s)
A = área de la sección transversal, en (m^2)
la ecuación (1) se expresa :

$$Q = \frac{A}{n} S^{1/2} R^{2/3} \quad (3)$$

La profundidad crítica se caracteriza principalmente por el número de Froude (F) igual a uno. Lo cual implica que la velocidad media en la sección es igual a la celeridad de pequeñas ondas de gravedad. En efecto, de acuerdo a la ecuación de la celeridad de Saint Venant para canales rectangulares, según V. T. Chow [1]

$$c = \sqrt{g\, y \left(1 + \frac{3}{4}\frac{h}{y}\right)} \quad (4)$$

donde :
c = celeridad de la onda, en (m/s)
g = aceleración de la gravedad
y = profundidad del escurrimiento, en (m)
h = altura de la onda sobre la superficie del agua, en (m)

Cuando h es pequeña en relación a y, la ecuación (4) deviene en la ecuación de la celeridad de Lagrange, según [1].

$$c = (g\, y)^{1/2} \quad (5)$$

El flujo crítico también se caracteriza por la altura de velocidad igual a la mitad de la profundidad hidráulica D, en un canal de pendiente pequeña , entonces :

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{D}{2} \quad (6)$$

o también :

$$Q = Z\, (g/\alpha)^{1/2} \quad (7)$$

con :
Z = A . D , factor de sección para cálculo de flujo crítico
α = coeficiente de energía
El desarrollo de una ecuación explícita en y_n e y_c depende fuertemente de la geometría de la sección transversal. Aún cuando al canal se lo considere prismático, es decir con pendiente de fondo y sección constantes, en la mayoría de los casos no resulta posible el cálculo analítico. Tal dificultad ha llevado a los ingenieros al empleo de

tablas y gráficos para su determinación. En este trabajo se ha aplicado el método de Newton-Raphson para calcular y_n e y_c en canales con secciones transversales : trapecial, rectangular, triangular ; rectangular y triangular con bordes redondeados, y conductos circulares. Se ha supuesto que los canales son prismáticos, con rugosidad constante independiente de la profundidad, de fondo plano y no erosionables.

METODO DE NEWTON-RAPHSON

En problemas con una ecuación y una incógnita, la expresión del método se escribe según McCracken - Dorn [2]:

$$y_{i+1} = y_i - \frac{F(y_i)}{F'(y_i)} \tag{8}$$

donde :

$$F(y_i) = f(y_i) - y_i \tag{9}$$

$$F'(y_i) = \frac{\partial F(y_i)}{\partial y_i} \tag{10}$$

Las condiciones de convergencia se expresan :

a) El valor de y con el cual comienza el proceso iterativo, y_1 , debe estar suficientemente cerca de una raíz de $F(y) = 0$.

b) La derivada segunda de F(y), $F''(y)$, no debe ser excesivamente grande.

c) La derivada primera de F(y), $F'(y)$, no debe ser muy próxima a 0.

Cuando el valor absoluto de la diferencia entre dos soluciones sucesivas, $|y_{i+1} - y_i|$, es menor que un error prefijado ε, concluye el proceso iterativo con la solución y_{i+1}.

APLICACION DEL METODO

El esquema de las secciones transversales y la expresión de sus parámetros hidráulicos se muestran en la figura 1. En el cálculo de la profundidad uniforme se emplearon las siguientes ecuaciones generales:

$$F(y_n) = \frac{Q\,n}{S^{1/2}} - A(y_n)\,R(y_n)^{2/3} \tag{11}$$

donde Q, n y S son datos del problema. $A(y_n)$ y $R(y_n)$ son funciones de la profundidad normal, variables según la forma de la sección transversal. A modo de ejemplo, cuando esta es trapecial :

$$F(y_n) = \frac{Q\,n}{S^{1/2}} - \frac{\left((b + z\,y_n)\,y_n\right)^{5/3}}{\left(b + 2\,y_n\sqrt{1 + z^2}\right)^{2/3}} \tag{12}$$

$$F'(y_n) = -\frac{(5/3)\,A(y_n)^{2/3}\,T(y_n)\,P(y_n)^{2/3} - (4/3)\,A(y_n)^{5/3}\,P(y_n)^{-1/3}\sqrt{1+z^2}}{P(y_n)^{4/3}} \tag{13}$$

donde :
$P_{(y_n)}$ = perímetro mojado, función de y_n
$T_{(y_n)}$ = ancho superior, función de y_n

Se reemplazan las ecuaciones (12) y (13) en (8) y se ejecuta el procedimiento iterativo. Cuando el valor absoluto de la diferencia entre dos iteraciones es menor o igual a ϵ, se detiene el proceso de cálculo.

En la determinación de la profundidad crítica se emplearon las ecuaciones :

$$F(y_c) = \frac{Q}{\sqrt{g/\alpha}} - A(y_c)\sqrt{D(y_c)} \qquad (14)$$

D es una función de y_c, según la forma de la sección. Cuando esta es trapecial :

$$F(y_c) = \frac{Q}{\sqrt{g/\alpha}} - (b + z\, y_c)\, y_c \sqrt{\frac{b + z\, y_c}{b + 2 z\, y_c}\, y_c} \qquad (15)$$

$$F'(y_c) = - \frac{\partial A(y_c)}{\partial y_c}\sqrt{D(y_c)} - A(y_c)\frac{\partial \sqrt{D(y_c)}}{\partial y_c} \qquad (16)$$

Se reemplazan las ec. (15) y (16) en la ec. (8) y se itera hasta lograr la convergencia.

El procedimiento aplicado en las demás secciones transversales es enteramente similar al ejemplo anterior, y según sus particularidades. En canales con sección triangular se puede calcular y_n e y_c en forma explícita, al igual que y_c para secciones rectangulares. En esas situaciones, el programa las calcula y compara con los resultados obtenidos del proceso iterativo.

DESCRIPCION DEL PROGRAMA DE CALCULO

El programa es autoejecutable. Permite primero seleccionar desde un Menú Principal la forma de la sección transversal del canal. Luego se ingresan por pantalla los parámetros de diseño y una opción de confirmación permite subsanar posibles errores en la entrada de datos. Posteriormente en forma automática comienza el proceso iterativo para calcular y_n. Se determinan la velocidad, área de la sección transversal, radio hidráulico, perímetro mojado, ancho superior, profundidad hidráulica y el número de Froude. Un procedimiento similar sigue para el cálculo de y_c. Finalmente una opción permite imprimir los resultados, otra, repetir el proceso para diferentes datos de diseño y volver al menú principal.

CONCLUSIONES

1 - El método de Newton-Raphson se adapta muy bien al cálculo de las profundidades normal y crítica en canales abiertos con secciones transversales como las ejemplificadas.
2 - La programación computacional es simple, y el procedimiento de cálculo converge con un bajo número de iteraciones.
3 - La amplitud del intervalo de convergencia permite automatizar el proceso de cálculo, a partir de un valor inicial dado.

4 - El método iterativo dá una solución numérica prácticamente igual a la obtenida en las situaciones en que es posible obtener una ecuación explícita en y_n e y_c .

REFERENCIAS

1 - Chow V.T., "Hidráulica de los Canales Abiertos". Diana, 1982.
2 - McCracken D.D. and Dorn W.S.,"Métodos Numéricos y Programación Fortran". Limusa, 1975.

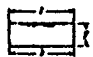
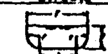
Sección	Area A	Perímetro mojado P	Radio hidráulico R	Ancho superior T	Profundidad hidráulica D	Factor de la sección Z
 Rectángulo	by	$b+2y$	$\frac{by}{b+2y}$	b	y	$by^{1.5}$
 Trapezoide	$(b+zy)y$	$b+2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}$	$b+2zy$	$\frac{(b+zy)y}{b+2zy}$	$\frac{[(b+zy)y]^{1.5}}{\sqrt{b+2zy}}$
 Triángulo	zy^2	$2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{zy}{2\sqrt{1+z^2}}$	$2zy$	$\frac{1}{2}y$	$\frac{\sqrt{2}}{2}zy^{2.5}$
 Círculo	$\frac{1}{8}(\theta - \operatorname{sen}\theta)d_0^2$	$\frac{1}{2}\theta d_0$	$\frac{1}{4}\left(1-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)d_0$	$(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta)d_0$ or $2\sqrt{y(d_0-y)}$	$\frac{1}{8}\left(\frac{\theta-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}\right)d_0$	$\frac{\sqrt{2}}{32}\frac{(\theta-\operatorname{sen}\theta)^{1.5}}{(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta)^{0.5}}d_0^{2.5}$
 Rectángulo con ángulos redondeados	$\left(\frac{\pi}{2}-2\right)r^2+(b+2r)y$	$(\pi-2)r+b+2y$	$\frac{(\pi/2-2)r^2+(b+2r)y}{(\pi-2)r+b+2y}$	$b+2r$	$\frac{(\pi/2-2)r^2}{b+2r}+y$	$\frac{[(\pi/2-2)r^2+(b+2r)y]^{1.5}}{\sqrt{b+2r}}$
 Triángulo con fondo redondeado	$\frac{T^2}{4z}-\frac{r^2}{z}(1-z\cot^{-1}z)$	$\frac{T}{z}\sqrt{1+z^2}-\frac{2r}{z}(1-z\cot^{-1}z)$	$\frac{A}{P}$	$2[z(y-r)+r\sqrt{1+z^2}]$	$\frac{A}{T}$	$A\sqrt{\frac{A}{T}}$

Figura 1 : Esquema de las secciones transversales y definición de los parámetros hidráulicos. V.T. CHOW [1]