

SOLUCION DEL PROBLEMA ELASTOHIDRODINAMICO DE CONTACTO LINEAL

**José Di Paolo
Fernando A. Saita
Instituto de Desarrollo Tecnológico
para la Industria Química (INTEC)
UNL-CONICET
Güemes 3450 - 3000 Santa Fe**

RESUMEN

Se presenta un nuevo método para resolver en forma simultánea las ecuaciones que gobiernan los problemas elastohidrodinámicos. Este método está basado en la técnica de elementos finitos, el método de Newton y el procedimiento de continuación de primer orden para seguir en forma eficiente el camino de solución a lo largo del parámetro de continuación.

El método es aplicado al problema de contacto lineal resuelto originalmente por Dowson y Higginson [1]; la posición desconocida de la frontera de salida de flujo, esto es la 'frontera libre', es tratada como una incógnita adicional y es determinada conjuntamente con las restantes variables.

Se reproducen los resultados de Dowson y Higginson y se evidencian nuevas características de este clásico problema.

ABSTRACT

A new method for simultaneously solving the governing equations of elastohydrodynamic problems is presented. This method is based on the finite element technique, the Newton's method and first order continuation procedures to efficiently trace the solution path along the continuation parameter.

The method is applied to the line contact problem firstly solved by Dowson and Higginson [1]; the unknown location of the flow exit boundary, i.e. the 'free boundary', is handled as an additional unknown and is determined together with the remaining variables.

Dowson and Higginson's results are reproduced and new features of this classical problem are disclosed.

INTRODUCCION

Los sistemas elastohidrodinámicos son aquellos que presentan en forma simultánea e interactuante, fenómenos de flujo de fluidos y deformaciones elásticas .

Son numerosos los ejemplos de fenómenos elastohidrodinámicos que ocurren tanto en procesos tecnológicos como en hechos de la vida diaria; por citar algunos podemos mencionar diferentes procesos de recubrimiento (coating) especialmente los relacionados a recubrimiento de papel, articulaciones mecánicas y componentes de máquinas, sellos mecánicos, cojinetes, etc. Otros fenómenos tan diversos como los procesos de lectura y/o grabación de cintas magnéticas, o el funcionamiento de las articulaciones de seres vivos, están fuertemente influenciados por fenómenos elastohidrodinámicos.

En general, el análisis riguroso de estos procesos ha presentado serios

inconvenientes; las dificultades se originan en que se debe resolver las ecuaciones que gobiernan un flujo a través de canales cuya configuración es desconocida; esta configuración depende de las deformaciones elásticas que sufren las paredes del canal como producto de la presión hidrodinámica desarrollada por el mismo flujo. En ciertos problemas, como el que se trata en este trabajo, no solo no se conoce la altura del pasaje o canal sino que tampoco se conoce la posición de la frontera donde el fluido abandona el sistema.

En síntesis, las dificultades en la resolución de los problemas elasto-hidrodinámicos devienen fundamentalmente por el acoplamiento de los dos fenómenos presentes (flujo y deformación elástica) que se traducen en un sistema de ecuaciones gobernantes altamente no lineal y que debe ser resuelto en un dominio a priori desconocido, es lo que se conoce como problema de frontera libre.

En este trabajo se presenta una metodología de solución que trata en forma simultánea al sistema de ecuaciones, a sus condiciones de contorno y a la frontera que define el dominio. Para evaluar esta metodología se la aplica a un sistema que ha sido y sigue siendo objeto de análisis, dicho sistema es el cojinete de fricción cuya longitud axial es mucho mayor que la magnitud radial y que se lo denomina académicamente con el nombre de contacto lineal.

A continuación se detallan las ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan el problema de contacto lineal y se reseñan las técnicas desarrolladas hasta el presente para lograr su solución. Luego se resume la metodología empleada para finalmente presentar los resultados obtenidos y las conclusiones.

PROBLEMA DE CONTACTO LINEAL

Como ya se dijo, este problema considera el caso de un cojinete de fricción cuya longitud axial es mucho mayor que su dimensión radial; ello implica que una aproximación aceptable para el análisis es considerar pérdidas laterales nulas y presión constante en la dirección axial lo cual transforma al problema en unidimensional. Además, la geometría del contacto puede reducirse a un problema equivalente [3] compuesto por un cilindro y un plano separados por un canal de flujo como se muestra en la figura 1.

El radio del cilindro equivalente está dado por:

$R = r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$, donde r_1 y r_2 son los radios de los cilindros del contacto original y el signo menos se aplica cuando un cilindro es interior a otro. Se considera además que el fluido es incompresible y se desprecian los efectos térmicos.

Teniendo en cuenta las hipótesis ya enunciadas, las ecuaciones que gobiernan el fenómeno son:

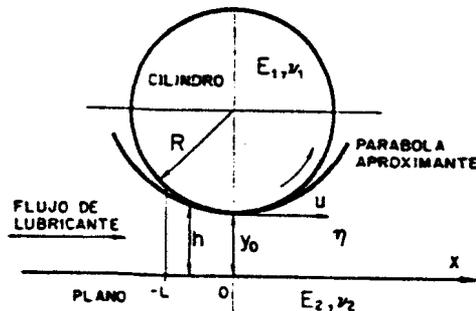


Fig. 1: geometría equivalente del sistema

$$\frac{dp}{dx} = 6 U \eta \left(\frac{h - C}{h^3} \right) \quad (1)$$

$$v(x) = - \frac{2}{\pi E'} \int_{-L}^{\bar{x}} p(t) \ln (x - t)^2 dt + V_0 \quad (2)$$

donde:

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right]$$

La ecuación (1) es la conocida ecuación para flujo de lubricación [15] donde el gradiente de presión es función de la altura de canal ($h(x)$) siendo 'C' el valor de altura de canal donde el gradiente de presión se anula. La ecuación (2) suministra los valores relativos de desplazamiento de un sólido semiinfinito cuando es actuado por una carga producida por una distribución de presión $p(x)$ arbitraria [3]; $-L$ es el extremo izquierdo del dominio (ver figura 1) el cual es fijado arbitrariamente con la única condición que en dicha zona el canal sea lo suficientemente grande como para asumir un valor de presión nulo. El otro extremo de integración (\bar{x}) corresponde a la frontera de salida del flujo, su posición es desconocida y debe determinarse (al igual que V_0) por las condiciones de contorno.

El sistema de ecuaciones se completa con la ecuación que relaciona los desplazamientos con las alturas de canal de flujo. A tal fin es usual aproximar la superficie del cilindro en el entorno de $x = 0$ por su parábola aproximante: $x^2 / 2 R$. De tal forma la tercera ecuación resulta:

$$h(x) = y_0 + \frac{x^2}{2 R} + v(x) \quad (3)$$

Una alternativa al sistema de ecuaciones dado por (1)-(3) surge al integrar la ecuación (1); si la viscosidad es constante dicha integración produce:

$$p(x) = 6 U \eta \int_{-L}^x \frac{h - C}{h^3} dx + p(-L) \quad (4)$$

Las condiciones de contorno que se aplican al sistema de ecuaciones (2)-(4) son:

$$\begin{array}{ll} x = -L & p(x) = 0 \\ x = \bar{x} & p(\bar{x}) = dp/dx = 0 \\ x = 0 & h(x) = y_0 \end{array} \quad (5)$$

Las condiciones de contorno (5) proveen las ecuaciones que permiten determinar C , V_0 , \bar{x} de la siguiente forma:

-Dado que la presión es nula en $-L$ y \bar{x} , de la ecuación (4) se obtiene:

$$C = \int_{-L}^{\bar{x}} \frac{dx}{h^2} \quad \Bigg/ \quad \int_{-L}^{\bar{x}} \frac{dx}{h^3} \quad (6)$$

-La tercera condición de contorno implica que $v(0) = 0$, luego la ecua-

ción (2) determina que:

$$v_0 = \frac{2}{\pi E'} \int_{-L}^x p(t) \ln(-t)^2 dt \quad (7)$$

-Finalmente, siendo $dp/dx|_{\bar{x}} = 0$ la ecuación (1) indica que $h(\bar{x}) = C$ y reemplazando en la ecuación (3) se tiene:

$$\bar{x} = [2R(C - v(\bar{x}) - y_0)]^{1/2} \quad (8)$$

Las ecuaciones y condiciones de contorno (2)-(8) definen totalmente el problema isoviscoso. Si el lubricante, como ocurre generalmente, presenta una característica piezoviscosa donde la viscosidad puede expresarse en función de la presión como $\eta = \eta_0 e^{\alpha p}$, donde η_0 es la viscosidad a presión ambiente y α es el coeficiente exponencial, puede demostrarse fácilmente que se recupera la ecuación de lubricación isoviscosa (4) si se define una presión reducida (q) tal que:

$$p = - (1/\alpha) [\ln(1 - q\alpha)] \quad (\text{ver [3]})$$

Finalmente reemplazando esta expresión de la presión en las ecuaciones (2) y (7) se obtiene el sistema de ecuaciones que gobierna el problema de contacto lineal en condiciones piezoviscosas y del cual se obtuvieron los resultados que se presentan en este trabajo.

TECNICAS DE SOLUCION DESARROLLADAS

Se describen aquí en forma breve las distintas técnicas empleadas hasta el presente para resolver el problema planteado, señalando sus desventajas y limitaciones.

La técnica conocida como 'Solución inversa de la ecuación de Reynolds' desarrollada por Dowson y Higginson [1]-[3] es quizás la más conocida. Está basada en el uso de la distribución de presión producida por la teoría de Hertz para contacto seco; dicha distribución, levemente corregida, se utiliza para calcular el canal de flujo a partir de la ecuación de Reynolds y a partir de la ecuación de deformaciones. Si los canales así calculados no son coincidentes se genera un proceso iterativo de estimación y corrección que converge a cargas elevadas y que ha dado los resultados más representativos a ese nivel. Sus desventajas son: el excesivo trabajo off-line del operador y el necesario buen juicio para proceder en la estimación y corrección; su aplicación está restringida al rango de altas presiones.

Posteriormente se desarrolló la denominada 'Solución directa de la ecuación de Reynolds' [5],[6]. En esta metodología se supone un canal de flujo para resolver la ecuación de Reynolds, la distribución de presión obtenida es introducida en la ecuación de deformaciones para hallar el perfil del canal deformado, si éste y el supuesto no coinciden se corrige la estimación y se reinicia el proceso hasta alcanzar la convergencia. Las desventajas del método son similares al anterior y solo converge a cargas bajas.

A mediados de la década del setenta Rohde y Oh [7],[8] presentaron un tratamiento unificado del problema de contacto lineal. Fue el primer intento por resolver en forma simultánea las ecuaciones del problema utilizando la técnica de elementos finitos con funciones de prueba de orden superior tales como las cúbicas de Hermite y cúbicas spline; los autores señalaron problemas de convergencia a altas presiones y descalificaron las funciones de prueba lineales para dar un esquema convergente de cálculo. El tratamiento de la frontera libre del dominio se

realizó fuera del lazo de iteración de manera que en cada una de ellas se resolvió el problema en un dominio perfectamente delimitado; los resultados arrojados por este método no alcanzaron los máximos obtenidos por Dowson y Higginson [1].

Recientemente Hall, Savage, Myers y otros, en una serie de trabajos [9] [10] [11] [12] han presentado una solución semianalítica del problema de contacto lineal. Esta técnica se basa en una solución en serie de las ecuaciones de deformaciones (ec. 2) la cual es obtenida a través de la teoría potencial. Esta solución permite expresar la distribución de presión en una serie infinita de polinomios de Chevishev. La satisfacción de la ecuación de Reynolds y sus condiciones de frontera genera un sistema no lineal de ecuaciones de donde se obtienen los coeficientes de la serie. Este método es útil solo a cargas moderadas y altas porque está basado en el contacto seco y no es capaz de reproducir los picos de presión que se generan a la salida del canal.

La metodología de solución que aquí se presenta tiene su origen en la solución de problemas con interface líquido- gas y específicamente en la solución del problema elastohidrodinámico del recubridor de hoja flexible [4]. Este método se caracteriza por:

- Adecuada adimensionalización del sistema de ecuaciones gobernantes.
 - Solución simultánea de dicho sistema de ecuaciones incluyendo entre ellas la ecuación que determina la posición de la frontera libre.
 - Uso de una discretización adaptativa, es decir que se modifica de manera automática en cada iteración de acuerdo a la posición de la frontera libre. En el presente caso la discretización adaptativa se utilizó solo en parte del dominio (para valores de $x > 0$) mientras que en el resto se mantuvo fija.
 - Uso de la técnica de elementos finitos, la cual es sumamente adecuada cuando debe trabajarse con discretizaciones adaptativas. Para el problema de que se trata se utilizaron funciones de prueba lineales dado que no se necesitan de mayor orden de continuidad.
 - Uso de una técnica adecuada para tratar por medio del método de elementos finitos el operador integral de la ecuación de Reynolds [4].
 - Integración por cuadratura de Gauss para obviar la singularidad que presenta el integrando de la ecuación (2) cuando $x = t$.
 - Utilización del método de Newton [13] para lograr soluciones del sistema discretizado en un número adecuado de iteraciones (≈ 4).
 - Uso de técnicas de continuación paramétrica de primer orden para obtener soluciones en forma eficiente en el espacio paramétrico y para asegurar que las estimaciones iniciales caigan dentro del radio de convergencia del sistema iterativo empleado [14].
 - Uso de técnicas adecuadas para sortear puntos singulares a lo largo del camino de continuación (puntos de retorno).
- Un detalle de todas las técnicas aquí enunciadas, y que no pueden ser explicadas en la extensión de este trabajo, son expuestas en [16].

RESULTADOS

El algoritmo numérico, codificado en lenguaje FORTRAN 77, fue ejecutado en una computadora VAX VMS versión 4.7 que posee el Centro Regional de Investigación y Desarrollo de Santa Fe (CERIDE).

A los fines de evaluar la metodología propuesta se intentó reproducir los resultados obtenidos por Dowson y Higginson [1] quienes utilizaron los siguientes valores (dimensionales) de los parámetros que definen el sistema:

$$R = 1,981 \text{ m} \quad \eta_0 = 0,137 \text{ Pa seg} \quad \nu_1 = \nu_2 = 0,3 \quad U = 1,96 \text{ m/seg}$$

$$L = 0,0381 \text{ m} \quad E_1 = E_2 = 1,06439 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad \alpha = 2,335 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$$

El dominio se discretizó utilizando 68 nodos, 36 de los cuales fueron distribuidos desde el centro del dominio hacia la zona de entrada del flujo y los restantes 32 fueron ubicados en el lado opuesto. Los primeros 36 son fijos mientras que los restantes se acomodan iteración a iteración en función de la posición de la frontera de salida de flujo que es desconocida.

El método iterativo utilizado (Newton) necesita de una estimación inicial de los valores de las variables y dicha estimación debe ser lo suficientemente aproximada a la solución para que el método converja. Por tal razón, la primera solución obtenida correspondió a una separación considerable entre los componentes sólidos, dicha separación (y_0)

es medida en el centro del dominio e implica que se obtendrán valores muy pequeños de presiones y deformaciones por lo que la inicialización es trivial. Una vez obtenida la primera solución se disminuye la aproximación entre los componentes sólidos; se utiliza el procedimiento de continuación de primer orden para lograr una adecuada estimación de las variables para el nuevo estado del sistema y se obtiene una nueva solución. Este procedimiento es exitoso siempre que la variación del parámetro de continuación (en este caso la aproximación entre los sólidos) no sea exagerada. En los resultados aquí presentados la variación del parámetro de continuación se fue regulando en forma externa de manera que el método de Newton convergiera en aproximadamente cuatro iteraciones, así es que el paso del parámetro disminuye a medida que se encuentra zonas donde la convergencia es más dificultosa y se agranda en el caso opuesto.

La figura 2 muestra la distribución de presión y la altura de canal en función del dominio; las cuatro curvas indicadas como a, b, c y d fueron obtenidas en ese orden y se corresponden con los resultados presentados originalmente por Dowson y Higginson [1]. La concordancia de ambos conjuntos de resultados es excelente excepto por el pequeño y agudo pico de presión (curvas c y d) que ocurre en las cercanías de la frontera de salida de flujo y que se debe a la abrupta restricción del canal en esa región; en los resultados de Dowson y Higginson [1] dichos picos no fueron detectados.

Es interesante examinar como evoluciona la carga por unidad de longitud soportada por el cojinete a medida que el canal de flujo se reduce. Esto se muestra en la figura 3 donde se observa que partiendo desde un valor de Y_0 cercano a 0,5 la carga soportada aumenta lentamente y en forma casi lineal, en dicha región las presiones son bajas y el cojinete se comporta como rígido mientras el flujo es aproximadamente isoviscoso. Sin embargo, en las cercanías de $Y_0 = 0,38$ el comportamiento del sistema cambia abruptamente, el ancho del canal en $x = 0$ alcanza primero un mínimo relativo y luego un máximo relativo constituyendo lo que se denomina dos puntos de retorno consecutivos; esta particularidad se observa claramente en la ampliación de la zona referida que se inserta en la misma figura. Esto significa no solo que las deformaciones comienzan a ser significativas sino también que la aproximación de los elementos sólidos en $x = 0$ no es monotonía.

Por otra parte, dichos puntos de retorno presentan inconvenientes de tipo numérico dado que el jacobiano del sistema de ecuaciones tiende a hacerse singular a medida que nos acercamos a ellos. Que el jacobiano se torna cada vez más singular se evidencia en la variación del parámetro Y_0 que debe reducirse a medida que nos acercamos al punto de retorno; sin embargo no se puede trasponer dicha región si no se hace uso de una técnica especial; la aquí empleada consistió en cambiar el parámetro de continuación y utilizar como tal el ancho de canal en una zona donde el acercamiento entre ambas superficies sólidas es monotonía.

Casi inmediatamente después de los puntos de retorno se ubica la solución de menor carga presentada por Dowson y Higginson [1] donde ya existe un comportamiento netamente elastohidrodinámico y que se señala con (a). Entre ese punto y hasta que Y_0 alcanza un valor de aproximadamente 0,28 la carga soportada aumenta en forma lenta pero constante indicando una acentuada reducción del espesor del canal mientras que la presión hidrodinámica no aumenta en la misma proporción.

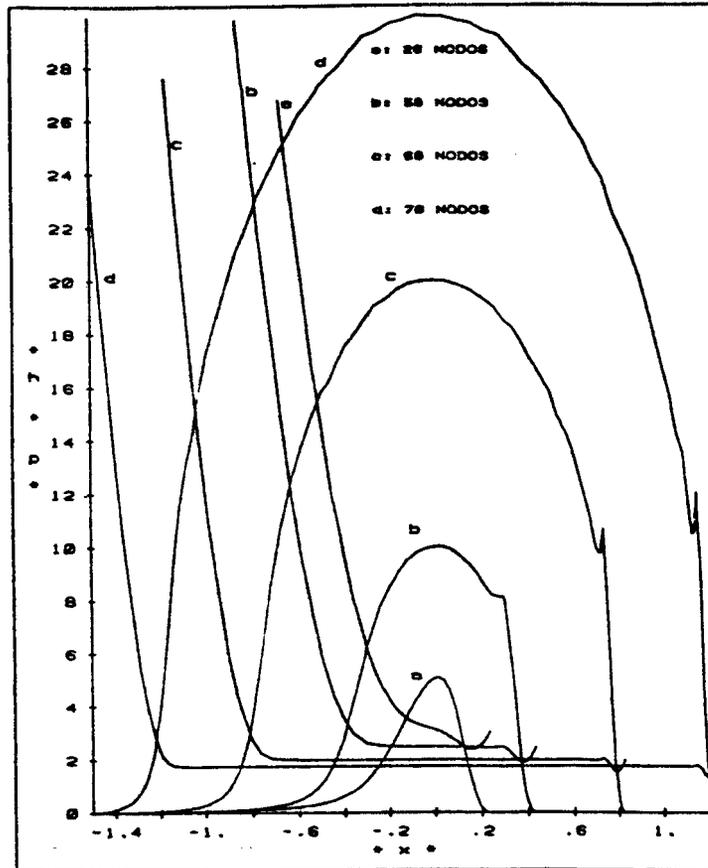


Fig. 2. Resultados obtenidos mediante el método de solución simultánea de las ecuaciones del problema elastohidrodinámico de contacto lineal. Reproducción de los resultados obtenidos por Dowson y Higginson utilizando el método de solución inversa de la ecuación de Reynolds (x en pulgadas, p en toneladas por pulgada cuadrada y h en 10^{-4} de pulgada)

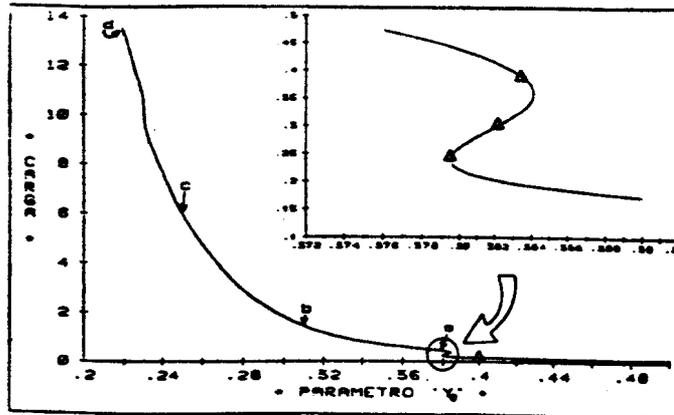


Fig. 3. Variación de la carga por unidad de longitud (adimensional) en función del parámetro de continuación adimensional (altura de canal en la línea de centro). Ampliación de la zona de comportamiento no monotónico.

Para valores de Y_0 menores que 0,28 la carga comienza a crecer rápidamente, ello se debe a que pequeñas disminuciones del canal de paso producen aumentos muy importantes en la presión desarrollada por el flujo la cual es a su vez realimentada por el incremento de viscosidad.

En la figura 3 se indican cuatro soluciones, tres de ellas en la zona de los puntos de retorno y la restante antes de los mismos, para los cuales se muestra en la figura 4 los canales de flujo correspondientes entre $S = 0$ y $S = 0,6$. Se nota claramente que las alturas de canal disminuyen cuando la carga adimensional se incrementa desde 0,1561 a 0,2478; sin embargo, incrementos posteriores a valores de 0,3014 y 0,3859 producen un incremento en la sección de flujo. Este fenómeno que parece indicar el límite entre la región de comportamiento rígido-isoviscoso y la región de comportamiento elastohidrodinámico, se magnifica para $0 < S < 0,5$.

CONCLUSION

La metodología de solución propuesta para sistemas elastohidrodinámicos, basada en el uso del método de elementos finitos, iteración de Newton y continuación paramétrica de primer orden permite resolver en forma simultánea las ecuaciones que gobiernan el flujo de fluido y las deformaciones del sólido con las condiciones de contorno apropiadas.

El método ha sido testeado con el clásico problema de contacto lineal para el cual se han desarrollado distintas técnicas de solución y cuyas características han sido resumidas al comienzo de este trabajo.

Es indudable que el método aquí presentado muestra considerables ventajas sobre las desarrolladas hasta el presente, en primer lugar es el único que ha generado resultados en todos los rangos de presión ya que no solo ha reproducido los resultados de Dowson y Higginson [1] sino que los ha extendido hacia regímenes de carga extremos [16]. Otra ventaja sobre los métodos de solución inversa y directa de la ecuación

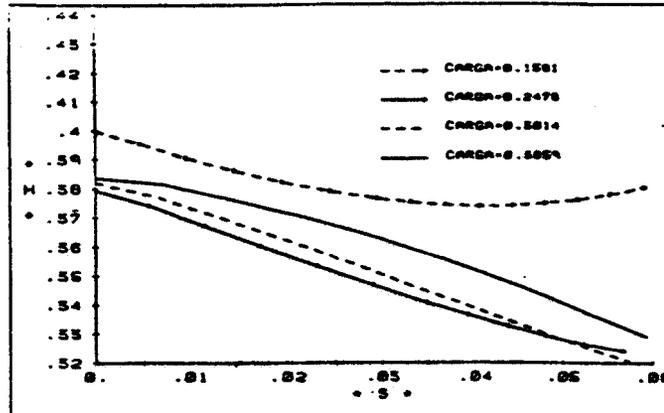


Fig. 4. Perfiles del canal de flujo en la parte positiva del dominio para cuatro valores de carga (fuerzas adimensionales) en la zona de comportamiento no monotónica.

de Reynolds es que, dada una estimación razonable de la solución, el algoritmo es ejecutado con total independencia del operador; no sucede así con los métodos mencionados anteriormente.

El uso de las técnicas enunciadas en la primera parte de estas conclusiones acopladas a una discretización adaptativa permite resolver el sistema de ecuaciones completo - incluyendo la localización de la frontera libre - en forma simultánea.

Las soluciones obtenidas muestran que en una extensión considerable del dominio el canal de flujo no siempre se reduce al aumentar la carga soportada por el cojinete, más aún, para ciertos valores de carga el aumento de ésta produce incrementos de la distancia que separa a los componentes sólidos. Si bien este efecto ha sido detectado para otros sistemas elastohidrodinámicos [4] para el problema de contacto lineal parece no haber sido percibido.

En síntesis, el método presentado ha demostrado ser superior a los desarrollados previamente y en el futuro inmediato se procederá a optimizar el algoritmo computacional, aspecto este que no fue tenido en cuenta hasta el presente dado que el objetivo era mostrar la capacidad del método para analizar sistemas elastohidrodinámicos.

NOMENCLATURA

h: altura de canal de flujo
 p: presión hidrodinámica
 q: presión hidrodinámica reducida
 r: radio de los cilindros del contacto original
 t: coordenada
 v: deformaciones de los sólidos en la dirección (y)
 x: coordenada
 \bar{x} : frontera libre del dominio

y_0 : altura de canal en la línea de centro
 C: altura de canal donde el gradiente de presión es nulo
 E: módulo de elasticidad
 H: altura de canal adimensional
 L: longitud del sector negativo del dominio
 R: radio del cilindro equivalente

S: coordenada adimensional
U: velocidad tangencial del cilindro equivalente
Vo: variable que satisface la condición de contorno de las deformaciones
Yo: altura de canal adimensional en la línea de centro (parámetro de continuación adimensional)

α : coeficiente de presión para la viscosidad
 η : viscosidad del lubricante dependiente de la presión
 η_0 : viscosidad del lubricante en condiciones ambientales
 ν : módulo de Poisson

REFERENCIAS

- [1] Dowson, D. and Higginson, G. R.. A numerical solution to the elastohydrodynamic problem. J. Mech. Engng. Sc. 1, 6, 1959.
- [2] Dowson, D. and Higginson, G. R.. The effect of material properties on the lubrication of elastic rollers. J. Mech. Engng. Sc. 2, 188 1960.
- [3] Dowson, D. and Higginson, G. R.. Elastohydrodynamic Lubrication 1977, SI Edition, Pergamon Press, G.B.
- [4] Saita, P. A.. Elastohydrodynamics and flexible blade coating. Ph D. Thesis, University of Minnesota, U.S.A., 1984.
- [5] Stephenson, R. R. and Osterle, J. F.. A direct solution of the elastohydrodynamic problem. ASLE Trans. 5, 365, 1962.
- [6] Taylor, C. and O'Callaghan, J. F.. A numerical solution of the elastohydrodynamic lubrication using finite elements. J. Mech. Engng. Sc., 14, 229, 1972.
- [7] Rohde, S. M. and Oh, K. P.. A unified treatment of thick and thin film elastohydrodynamic problems using higher order element methods. Proc. R. Soc. Lon., A, 242, 315, 1975.
- [8] Oh, K. P. and Rohde, S. M.. Numerical solution of the point contact problem using the finite element method. Int. J. Num. Meth. Engng. 11, 1507, 1977
- [9] Hall, R. and Savage, M. D.. Solutions for isoviscous line contacts using a closed form analytic solution. Elsevier Sc. Pub., Amsterdam, 1987.
- [10] Hall, R. and Savage, M. D.. Two-dimensional elastohydrodynamic lubrication. Part 1: the associated dry contact problem. Proc. Instn. Mech. Engrs., 202, C5, 347, 1988.
- [11] Hall, R. and Savage, M. D.. Two-dimensional elastohydrodynamic lubrication. Part 2: solution of the line contact problem. Proc. Instn. Mech. Engrs., 202, C5, 354, 1988.
- [12] Myers, T. G.; Hall, R. W.; Savage, M. D. and Gaskell, P. H.. The transition region of elastohydrodynamic lubrication. Proc. R. Soc. Lon., A, 432, 467, 1991
- [13] Dahlquist, G. and Björk, A.. Numerical Methods. 1974, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs. New Jersey.
- [14] Rheinboldt, W. C.. Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations. 1986, Wiley.
- [15] Cameron, A.. Basic Lubrication Theory, 2nd edition. 1976. Ellis Horwood, Chichester, England.
- [16] Di Paolo J.. Metodología Para la Resolución Simultánea de las Ecuaciones que Gobiernan los Sistemas Elastohidrodinámicos - Aplicación al Problema de contacto Lineal. Tesis de Magister de la UNL a ser presentada y defendida en 1991.