

APLICACION DEL METODO INVERSO AL ANALISIS DE ENSAYOS DE POZOS PETROLIFEROS

Gabriela B. Savioli* y Mirtha S. Bidmer

Laboratorio de Ingeniería de Reservorios-Universidad de Buenos Aires
Pabellón Industrias-Ciudad Universitaria-1428-Buenos Aires-Argentina

* Becaria de la Comisión de Investigaciones Científicas de la
Provincia de Buenos Aires (CIC)

RESUMEN

Se estiman ciertos parámetros característicos de un reservorio petrolífero ajustando un modelo matemático a mediciones de presión realizadas durante un ensayo de pozo. Para lograrlo se utilizan distintas técnicas de optimización con restricciones en las variables que representan la realidad física. El modelo matemático usado es la ecuación de difusividad, que rige el flujo radial de petróleo hacia el pozo productor en un reservorio isotrópico, homogéneo y acotado. Se analizan dos ejemplos de ensayos de caída de presión.

El objetivo del primer ejemplo es comparar cuatro técnicas de optimización: Davidon-Fletcher-Powell (DFP), Fletcher-Reeves (FR), Aproximaciones Quasi-Newton para el problema de mínimos cuadrados (AQN) y Levenberg-Marquardt (LM). Los parámetros buscados son porosidad y permeabilidad. Aplicando cualquiera de los cuatro métodos se obtienen valores óptimos únicos de dichos parámetros, pero el que presenta el mejor comportamiento es AQN. Entonces, esta técnica se aplica a un segundo ejemplo: un ensayo de caída de presión realizado en un pozo fracturado hidráulicamente. También se obtienen valores óptimos únicos de los parámetros, que en este caso son permeabilidad, factor de daño y radio de drenaje; y se los compara con los proporcionados por los métodos gráficos tradicionales presentados por Matthews & Russell [1].

ABSTRACT

Reservoir parameters are estimated by matching a mathematical model to pressure measurements taken during an oil well test. Multivariate optimization techniques with physically realistic constraints on the parameters are used in order to obtain the best match. The mathematical model is the diffusivity equation which rules the single-phase radial flow of oil in an isotropic, homogeneous and bounded reservoir. Two examples of draw-down tests are shown.

The purpose of the first example is to compare four optimization techniques: Davidon-Fletcher-Powell (DFP), Fletcher-Reeves (FR), Quasi Newton Approximation for the Least-Squares Problem (AQN) and Levenberg-Marquardt (LM) methods. Permeability and porosity are the parameters to be determined. The application of any of the four methods leads to unique values of optimal parameters, although AQN shows the best behavior finding the optimum. Therefore, this technique is applied in the second example which is an extended draw-down test run on a hydraulically fractured well to estimate the size of the oil accumulation. A unique set of optimal parameters: permeability, skin factor and drainage radius is found. These parameters are compared with the results obtained by applying the traditional graphical methods presented by Matthews & Russell [1].

INTRODUCCION

Los simuladores numéricos de reservorios requieren el conocimiento de los parámetros de la formación productiva tales como permeabilidad, porosidad, factor de daño y radio de drenaje, para predecir el petróleo recuperable de un yacimiento. Estos

parámetros no pueden ser medidos en forma directa. Un modo de estimarlos es mediante los ensayos de pozos.

Por ejemplo, en un ensayo de caída de presión (draw-down test) el pozo de petróleo se pone en producción a caudal constante durante un período de tiempo que puede alcanzar varios días. Durante dicho período se miden las presiones a nivel de la capa productiva del pozo. Un modelo matemático que representa el flujo radial de petróleo hacia el pozo productor a través de un reservorio acotado, isotrópico y homogéneo, está dado por la ecuación radial de difusividad en términos de presión, cuya solución suministra la distribución de presiones teórica. Dicha ecuación es en derivadas parciales, de segundo orden, y se le imponen condiciones iniciales y de contorno apropiadas para simular el ensayo. Una vez obtenidos los datos teóricos de presión, se aplica una técnica de optimización a efectos de encontrar los parámetros que minimicen las diferencias entre las presiones medidas y calculadas. Dichos parámetros óptimos son la solución del problema inverso presentado.

Tradicionalmente se recurrió a soluciones analíticas del modelo de flujo y técnicas gráficas de mínimos cuadrados para la "Interpretación de los Ensayos de Pozos" (Matthews & Russell [1]). Pero no siempre existen soluciones cerradas para las ecuaciones diferenciales con apropiadas condiciones iniciales y de contorno que rigen el flujo hacia el pozo ensayado. Por eso se están aplicando simuladores numéricos y técnicas de regresión no lineal para el análisis de los ensayos de pozos (Darderes y otros [2,3]; Cannon y Dogru [4]; Dogru y otros [5]; y demás autores).

En este trabajo también se presentan algoritmos automáticos de cálculo para interpretar ensayos de caída de presión, basados en modelos matemáticos de flujo y métodos de optimización con restricciones en las variables que permiten representar la realidad física. La aplicación de los mismos se realiza en dos etapas. En la primera etapa, se comparan cuatro técnicas de optimización distintas (DFP, FR, AQN, LM) con el fin de seleccionar la más efectiva en encontrar los parámetros deseados, que en este caso son porosidad y permeabilidad. Se consideran como datos experimentales tres distribuciones de presión en función del tiempo; la primera es calculada exactamente por el modelo matemático y las otras dos se obtienen a partir de la anterior, perturbándola estadísticamente. Las cuatro técnicas obtienen valores óptimos únicos para los parámetros, pero la que indudablemente muestra una mayor eficiencia en encontrarlos es AQN. Una vez elegido este método y en una segunda etapa, se lo aplica a la interpretación de mediciones reales realizadas en un pozo fracturado hidráulicamente. La caída de presión medida en función del tiempo ha sido presentada por Matthews & Russell [1]. Con el método propuesto aquí no es necesario separar el análisis en los casos transitorio, transitorio final y semi-estacionario, sino que esta técnica ajusta la distribución completa de presión obteniendo con éxito únicos valores de los parámetros, que en este caso son permeabilidad, factor de daño y radio de drenaje.

Este método podría también usarse para el análisis de ensayos con caudales múltiples o ensayos de pozos inyectores, e incluso para el análisis de ensayos a caudales variables que no pueden ser interpretados por los métodos tradicionales.

MODELO MATEMATICO

La ecuación radial de difusividad

El flujo isotérmico y monofásico de petróleo hacia el pozo productor está regido por la ecuación radial de difusividad que, expresada en términos adimensionales es:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad 1 \leq r_D \leq r_{eD} \quad (1)$$

donde se supone que:

- el reservorio es homogéneo, isotrópico y tiene espesor uniforme.
- la porosidad y la permeabilidad son constantes.

- el petróleo tiene compresibilidad constante y pequeña y viscosidad constante.
- las fuerzas de gravedad son despreciables.
- los gradientes de presión son pequeños.

Las condiciones iniciales y de contorno para un reservorio circular, acotado, con un pozo situado en el centro que produce a caudal constante son:

$$p_D = 0 \quad ; \quad t_D = 0 \quad \forall \quad r_D \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} = -1 \quad t_D > 0 \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=r_{eD}} = 0 \quad t_D > 0 \quad (4)$$

donde

$$t_D = \frac{k t}{\phi \mu c r_w^2} \quad ; \quad r_D = \frac{r}{r_w} \quad ; \quad p_D = \frac{p_{IN} - p}{q \mu} (2 \pi k h) \quad ; \quad r_{eD} = \frac{r_e}{r_w}$$

La solución analítica completa de la Ec.(1) con las condiciones (2),(3) y (4) puede encontrarse en Matthews & Russell [1]; e involucra un desarrollo en serie. Cada término de la serie presenta funciones de Bessel cuyos argumentos deben ser determinados en forma independiente; por lo tanto, es necesario calcularla numéricamente con alta precisión. Afortunadamente, para la presión en el pozo existen dos soluciones asintóticas simples: 1.- a tiempos adimensionales pequeños es válida la solución que considera el reservorio como un medio infinito y 2.- a valores grandes del tiempo adimensional los términos dentro de la sumatoria de la solución analítica se aproximan a cero. Van Poolen [6] define el tiempo de estabilización como aquel tiempo para el cual la solución del reservorio infinito se desvía de la solución del reservorio finito. El tiempo de estabilización t_{Ds} es:

$$t_{Ds} = 0.25 r_{eD}^2 \quad (5)$$

Savioli y otros [7] verificaron que la solución analítica en el pozo ($r_D = 1$) para el reservorio infinito

$$p_D \Big|_{r_D=1} = -\frac{1}{2} E_i\left(-\frac{1}{4t_D}\right) \quad (6)$$

es válida para $t < t_{Ds}$ siendo E_i la función integral exponencial. También probaron que la solución para valores grandes de tiempo adimensional,

$$p_D \Big|_{r_D=1} = \frac{2}{(r_{eD}^2 - 1)} (0.25 + t_D) - \frac{(3r_{eD}^4 - 4r_{eD}^4 \ln r_{eD} - 2r_{eD}^2 - 1)}{4(r_{eD}^2 - 1)^2} \quad (7)$$

es válida para $t \geq t_{Ds}$.

En consecuencia, la presión como función del tiempo, se calcula con las Ec.(6) o (7).

El problema inverso

El proceso de estimar parámetros del reservorio a partir de datos de presión medidos durante un ensayo de pozo se conoce como problema inverso o "history matching". En la siguiente sección se presentarán dos ejemplos en los que se aplica esta técnica a un ensayo de caída de presión (test draw-down).

En el primer ejemplo se determinan la porosidad y la permeabilidad minimizando la función objetivo F,

$$F(s, k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [p_i^o - p_i^c(s, k)]^2 \quad (8)$$

sujeto a

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_{\max} \quad ; \quad 0 \leq k \leq k_{\max}$$

donde N es el número de datos; p_i^0 es la presión observada en el pozo y p_i^c es la presión calculada en el pozo para el paso de tiempo i ,

$$p_i^c = p_{IK} - \frac{q \mu}{2 \pi k h} p_D(r_D=1, t_{D_i}) \quad (9)$$

$p_D(r_D=1, t_{D_i})$ se obtiene a partir de la Ec.(6) para tiempos menores que el tiempo de estabilización y a partir de la Ec.(7) para tiempos mayores; usando valores aproximados de permeabilidad y porosidad.

La Ec.(8), junto con Ec.(6) (o Ec.(7)) constituye un problema de optimización con restricciones que puede ser transformado en un problema irrestricto reemplazando las variables originales en función de nuevas variables

$$\sigma = \sigma_{\max} \text{sen}^2 x_1 \quad ; \quad k = k_{\max} \text{sen}^2 x_2 \quad (10)$$

Luego, la nueva función objetivo será

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i^2(x_1, x_2) \quad (11)$$

donde

$$f_i(x_1, x_2) = p_i^0 - p_i^c(\sigma_{\max} \text{sen}^2 x_1, k_{\max} \text{sen}^2 x_2) \quad (12)$$

El segundo ejemplo es un ensayo de caída de presión realizado en un pozo que presenta una fractura hidráulica. La fracturación origina un aumento de la permeabilidad en las cercanías del pozo. Este efecto puede ser considerado incluyendo un factor de daño o de piel, s (skin), que relaciona la caída de presión en la fractura con el caudal adimensional,

$$\Delta p_{\text{skin}} = s \cdot \left(\frac{q \mu}{2 \pi k h} \right) \quad (13)$$

Durante el ensayo, el pozo produce a caudal constante, q , durante largo tiempo y se mide la disminución de la presión. De ese modo se afectan porciones del yacimiento cada vez más alejadas del pozo, con el objeto de estimar el radio máximo que el pozo es capaz de drenar. Por eso, en este caso los parámetros buscados son la permeabilidad, el radio de drenaje y el factor de daño (la porosidad es conocida). La función objetivo es,

$$F(r_e, k, s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [p_i^0 - \bar{p}_i^c(r_e, k, s)]^2 \quad (14)$$

sujeto a

$$0 \leq r_e \leq r_{\max} \quad ; \quad 0 \leq k \leq k_{\max} \quad ; \quad s_{\min} \leq s \leq s_{\max} \quad (15)$$

donde,

$$\bar{p}_i^c = p_i^c - s \frac{q \mu}{2 \pi k h}$$

Una vez más se obtiene un problema de optimización sin restricciones reemplazando k como en la Ec.(10); r_e y s de la siguiente manera,

$$r_e = r_{\max} \text{sen}^2 x_1 \quad ; \quad s = (s_{\max} - s_{\min}) \text{sen}^2 x_3 + s_{\min} \quad (16)$$

y minimizando $F(x_1, x_2, x_3)$.

La función objetivo F se minimiza en dos formas diferentes:

A- Aplicando métodos irrestrictos generales (Gill y otros [8])

A.1- Métodos Quasi-Newton: Algoritmo de Davidon-Fletcher-Powell (DFP)

A.2- Métodos del tipo Gradientes-Conjugados: Algoritmo de Fletcher-Reeves (FR)

B- Aplicando métodos específicos para el problema de mínimos cuadrados (Gill y otros [8])

B.1- Método de Levenberg-Marquardt (LM)

B.2- Aproximaciones Quasi-Newton para el problema de mínimos cuadrados, usando la fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (AQN).

Las primeras tres técnicas forman parte de la biblioteca de rutinas INSL mientras que la última fue implementada para este trabajo en FORTRAN 77.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

La teoría descripta fue aplicada a dos ejemplos de ensayos de caída de presión (draw-down tests).

En el primer ejemplo se analizan tres conjuntos de hipotéticos datos experimentales y se ajustan los parámetros permeabilidad y porosidad. El primer conjunto de datos de presión en función del tiempo es suministrado por la solución exacta de la ecuación de difusividad para $k=96 \text{ mD}$ y $s=0.1$. En este caso se verifica la capacidad del método AQN para arribar a esos valores de permeabilidad y porosidad exactos partiendo desde distintos puntos iniciales. El segundo y tercer conjunto de distribuciones temporales de presión son perturbaciones estadísticas, una más pronunciada que la otra, de la solución exacta. El objetivo de estos dos casos es comparar y evaluar la capacidad de las cuatro técnicas de optimización DFP, FB, AQN y LM para encontrar el valor óptimo partiendo desde distintos puntos iniciales.

El segundo ejemplo es un ensayo "draw-down" de un pozo petrolífero fracturado hidráulicamente. Se aplica la técnica AQN para encontrar tres parámetros: permeabilidad, radio de drenaje y factor de daño.

TABLA I - Características del reservorio y caudal de extracción		
	Ejemplo 1	Ejemplo 2
Radio del pozo..... r_w	0.33 ft = 0.1 m	0.33 ft = 0.1 m
Radio externo..... r_e	1000 ft = 304.8 m	
Espesor de formación..h	20 ft = 6.096 m	8 ft = 2.44 m
Porosidad..... ϕ		0.14
Viscosidad del petróleo..... μ	1 cp = $10^{-3} \text{Pa}\cdot\text{s}$	1 cp = $10^{-3} \text{Pa}\cdot\text{s}$
Compresibilidad total.c	$17.7 \times 10^{-6} \text{psi}^{-1} = 2.57 \times 10^{-9} \text{Pa}^{-1}$	$17.7 \times 10^{-6} \text{psi}^{-1} = 2.57 \times 10^{-9} \text{Pa}^{-1}$
Caudal de extracción..q	400 bbl/d = $7.36 \times 10^{-4} \text{m}^3/\text{s}$	800 bbl/d = $1.47 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$
Presión inicial del reservorio..... p_{iN}	3000 psi = $20.68 \times 10^6 \text{Pa}$	1895 psi = $13.062 \times 10^6 \text{Pa}$

Verificación del método AQN

Para simular una distribución temporal de presiones medidas en un ensayo, se resuelve la Ec.(6) para $t < t_{Ds}$ y la Ec.(7) para $t \geq t_{Ds}$, considerando los datos que se muestran en la TABLA I - Ejemplo 1 que fueron extraídos de Dogru y otros [5]. Con el objeto de tener el mismo orden de magnitud en los valores de permeabilidad $k=96 \text{ mD} = 0.0947 \times 10^{-12} \text{m}^2$ y de porosidad $s=0.1$, se escalan los valores de permeabilidad. Se define así una permeabilidad escalada $k'(\text{m}^2) = k \times 10^{12}$.

Partiendo de la distribución exacta de presiones obtenida como se indicó con estos valores de porosidad y permeabilidad, se aplica el método inverso utilizando la

técnica de optimización AQN. En la Ec.(10) se utiliza $\rho_{\max} = 0.5$ y $k_{\max} = 1.0 \times 10^{-12} \text{ m}^2$.

Se prueba esta técnica con 45 valores iniciales: todas las combinaciones posibles de tres valores de $\rho = 0.1/0.2/0.3$, y 15 valores de permeabilidad desde $k' = 0.01$ hasta $k' = 0.09$ variando en 0.02 y desde $k' = 0.1$ hasta $k' = 1.0$ variando en 0.1. Se observa que la solución converge al valor exacto $k' = 0.0947$ y $\rho = 0.1$ para 37 de las combinaciones anteriores. En las ocho restantes la solución se estanca en un límite de la porosidad y es $k' = 0.0826$, $\rho = 0.5$. Estos ocho puntos iniciales son $(k', \rho) = (0.01, 0.3)/(0.1, 0.3)/(0.5, 0.3)/(0.6, 0.3)/(1.0, 0.3)/(0.03, 0.2)/(0.4, 0.1)/(0.5, 0.2)$. El número de iteraciones necesarias para obtener la convergencia varía entre 7 para el valor inicial más cercano al óptimo y hasta 50 para los valores iniciales más alejados.

Comparación de las cuatro técnicas de optimización

Para simular el error en las mediciones de presión, se perturba la distribución exacta de presiones obtenida anteriormente del modo siguiente:

$$p_i^0 = p_i^e + \epsilon_i \quad i = 1, N \quad (17)$$

donde el supraíndice o significa observada y el e exacta. Los ϵ_i son errores independientes que siguen, en el caso de la perturbación pequeña, la distribución,

$$\epsilon_i \approx 0.9 N(0,1) + 0.1 N(0,3) \quad (18)$$

y se obtienen buscando primero un número aleatorio en el intervalo $[0, 1]$ con la función GGUBFS de IMSL: si el valor obtenido es mayor que 0.1 se genera un error $N(0,1)$ con la rutina MDNRIS de IMSL, si no lo es, se genera con la misma rutina un valor $N(0,3)$. De tal modo se obtiene $p^0(t)$ graficado en la Fig.1(a).

Se aplica a continuación el método inverso utilizando las cuatro técnicas DFP, FR, AQN y LM a 21 pares de datos iniciales: $\rho = 0.1/0.2/0.3$ combinado con $k' = 0.01/0.05/0.09/0.1/0.5/0.9/1.0$. Las soluciones muestran convergencia al valor óptimo $k' = 0.0942$, $\rho = 0.103$; estancamiento en dos distintos extremos, $k' = 0.0825$, $\rho = 0.5$ y $k' = 1.0$ para todos los valores de ρ ; o no convergencia. Estos comportamientos se resumen en la siguiente tabla:

	Convergencia a $k' = 0.0942$ $\rho = 0.103$	Estancamiento en $k' = 0.0825$ $\rho = 0.5$	Estancamiento en $k' = 1.0$ $\rho = 0.1/0.2/0.3$	No convergencia
DFP	11	5	0	5
FR	7	5	3	6
LM	12	9	0	0
AQN	19	2	0	0

La función objetivo en el óptimo es $F(0.0942; 0.103) = 45.27$. La distribución de presiones simuladas para este óptimo se grafica en la Fig.1(a).

El procedimiento anterior se repitió con una segunda perturbación de oscilaciones más pronunciadas que sigue una distribución

$$\epsilon_i \approx N(0,10) \quad (19)$$

y se grafica en la Fig.1(b). Se aplican las cuatro técnicas a 33 pares de datos iniciales $\rho = 0.1/0.2/0.3$ combinados con $k' = 0.01/0.03/0.05/0.07/0.09/0.1/0.3/0.5/0.7/0.9/1.0$. El comportamiento de la solución es semejante al anterior como se resume en el cuadro siguiente:

	Convergencia a $k' = 0.0941$ $\beta = 0.104$	Estancamiento en $k' = 0.0825$ $\beta = 0.5$	Estancamiento en $k' = 1.0$ $\beta = 0.1/0.2/0.3$	No convergencia
DFP	14	3	0	16
FR	13	8	3	9
LM	14	18	0	1
AQN	27	4	0	2

La función objetivo en el óptimo es $F(0.0941, 0.104) = 247.20$ y la distribución temporal de presiones en el óptimo se muestra en la Fig.1(b).

Observando las dos tablas anteriores se concluye que el método AQN presenta el mejor comportamiento convergiendo al óptimo en la mayoría de los casos. Sin embargo su capacidad para obtener el óptimo se debe a que exige el descenso irrestricto de la función en cada iteración, y esta exigencia incrementa el tiempo de cálculo.

El método LM sigue en eficiencia al AQN, aunque se estanca frecuentemente en un valor extremo. Los métodos DFP y FR, no específicos para el problema de los cuadrados mínimos, tienen problemas en la convergencia.

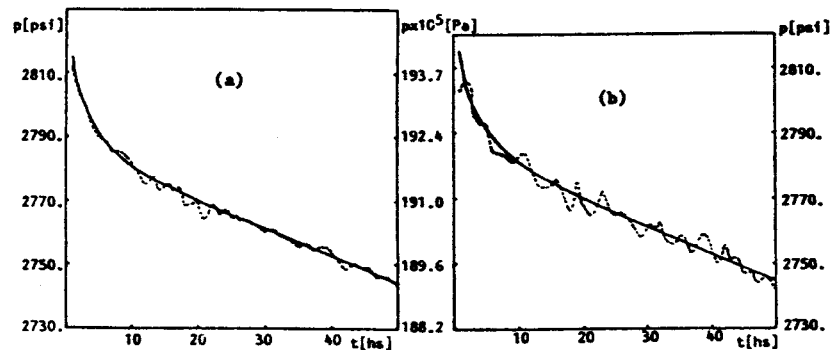


Figura 1: Distribución de presión en función del tiempo. Comparación entre los resultados del método inverso (---) y datos experimentales simulados (....) con: (a) - Ec.(18) y (b) - Ec.(19)

Aplicación a un ensayo de caída de presión en un pozo productor

Para la aplicación de esta técnica a un caso real, se eligieron datos de presión presentados por Matthews & Russell [1]. Corresponden a un ensayo de caída de presión de 50 hs. de duración realizado en un pozo de una cuenca en Denver, Estados Unidos. Las 16 medidas de presión tomadas durante ese ensayo se muestran como puntos en la Fig.2. El ensayo se realizó a caudal de producción constante y los datos pertinentes pueden verse en la TABLA 1 - Ejemplo 2.

El ensayo fue de larga duración (extended draw-down test) con el objeto de encontrar el radio de drenaje del pozo. Además, el pozo había sido fracturado hidráulicamente, por lo tanto presentaba un incremento de la permeabilidad en sus alrededores caracterizado por el factor de daño o de piel (Ec.(13)). Por otra parte, la porosidad

es un valor conocido. Entonces, los parámetros buscados son permeabilidad, k , factor de daño, s , y radio de drenaje, r_e . Para encontrarlos se aplica el método inverso con la función objetivo definida en la Ec.(14) y las restricciones de la Ec.(15) donde

$$k_{\max} = 300 \text{ mD} = 2.96 \times 10^{-13} \text{ m}^2 \quad ; \quad r_{e\max} = 1000 \text{ ft} = 304.8 \text{ m}$$

$$s_{\min} = -10 \quad ; \quad s_{\max} = 10$$

Se utiliza la técnica AQN partiendo desde tres puntos iniciales, distantes entre sí. En los tres casos converge al óptimo:

$$k = 69.48 \text{ mD} = 6.86 \times 10^{-14} \text{ m}^2 \quad ; \quad r_e = 467.7 \text{ ft} = 142.55 \text{ m} \quad ; \quad s = -5.16$$

donde la función objetivo es $F = 3280.74$. Otros valores de interés se resumen en la siguiente tabla:

Punto Inicial	Iteraciones	Orden del gradiente en el óptimo	Número de evaluaciones de la función
$k = 10 \text{ mD}$ $r_e = 100 \text{ ft}$ $s = 0$	65	10^{-4}	238
$k = 25 \text{ mD}$ $r_e = 700 \text{ ft}$ $s = 4$	33	10^{-5}	79
$k = 200 \text{ mD}$ $r_e = 800 \text{ ft}$ $s = -1$	84	10^{-6}	495

Con los valores óptimos y otras propiedades enunciadas en la TABLA I - Ejemplo 2, se aplica la Ec.(5) para hallar el tiempo de estabilización. Este es de 5.28 hs y separa el límite de validez de la solución para tiempos cortos, Ec.(6) de la solución para tiempos largos Ec.(7). Se lo muestra en la Fig. 2.

Es interesante comparar esta solución con la obtenida por Matthews & Russell (Apéndice D) [1] mediante los métodos gráficos tradicionales. Estos métodos gráficos obligan a dividir los datos de presión en tres etapas de tiempo, antes de comenzar el cálculo. Por eso la separación resulta algo subjetiva y arbitraria. Las tres etapas son estado transitorio, último estado transitorio y estado semi-estacionario. Los valores encontrados en cada etapa por dichos autores son:

	Estado transitorio	Ultimo estado transitorio	Estado semi-estacionario
$k(\text{mD})$	96	46.4
s	-5.0	-5.4
$r_e(\text{ft})$	482	482

Los valores muy altos de k en el estado transitorio reflejan la situación en las cercanías del pozo donde posiblemente el flujo hacia la fractura sea más lineal que radial. Nuestros valores son intermedios a los hallados por Matthews & Russell en estos tres períodos y reflejan las características promedio de la totalidad del reservorio afectado, desde el pozo hasta el radio de drenaje. Nótese que el denominado último estado transitorio en nuestro método pasa a formar parte de la solución a tiempos largos (Fig. 2). Además la división que se realiza en este "history matching" entre tiempos menores y mayores que el de estabilización es un paso intermedio del cálculo. Por eso, no es necesario hacerla en forma subjetiva de antemano.

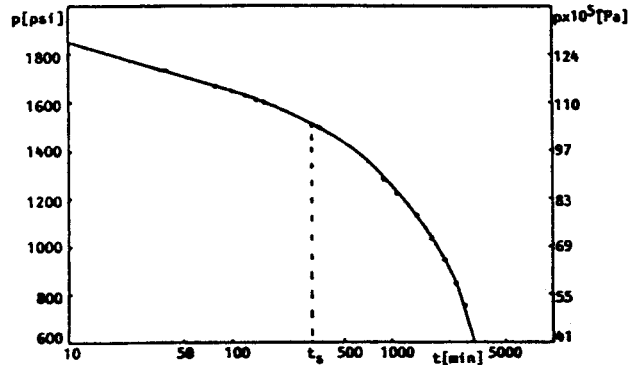


Figura 2: Mediciones de presión en función del logaritmo del tiempo realizadas durante el ensayo draw-down (Matthews & Russell)

CONCLUSIONES

A efectos de interpretar la distribución temporal de presiones medidas durante un ensayo "draw-down" de un pozo petrolífero se aplica el método inverso. El flujo de petróleo hacia el pozo productor está gobernado por la ecuación radial de difusividad en términos de presión que considera un reservorio isotrópico, homogéneo y acotado. Su solución proporciona la distribución de presiones teórica que se ajusta a las mediciones realizadas en el ensayo mediante el método de mínimos cuadrados y técnicas de optimización en multivariable. El análisis de los casos presentados permite concluir lo siguiente:

- 1 - Se resuelve la ecuación de difusividad radial en términos de presión, con valores de permeabilidad y porosidad conocidos. Su solución suministra la distribución temporal de presiones exacta que se utiliza como dato para verificar la capacidad del método inverso con la técnica de aproximaciones Quasi-Newton (AQN) de encontrar los valores verdaderos de permeabilidad y porosidad. En efecto, el método converge a dichos valores de permeabilidad y porosidad partiendo desde 37 pares de valores iniciales, sobre 45 pares dispersos que fueron probados. Los ocho pares restantes se estancan en un valor límite.
- 2 - Se analiza el comportamiento de cuatro técnicas de optimización para converger a los valores óptimos de permeabilidad y porosidad, partiendo de distribuciones de presión con errores al azar que simulan mediciones experimentales. Ellas son las técnicas de Davidon-Fletcher-Powell (DFP), Fletcher y Reeves (FR), Levenberg - Marquardt (LM) y AQN. Se parte desde 54 pares de valores iniciales considerando dos distribuciones temporales de presión. Las técnicas específicas para mínimos cuadrados (AQN y LM) se comportan mejor que las otras dos ya que las técnicas DFP y FR tienen problemas en la convergencia. El método AQN se muestra superior al LM pues este último se estanca, con frecuencia, en un valor límite. Pero esta habilidad de AQN para obtener el óptimo se basa en asegurar el descenso irrestricto de la función en cada iteración, lo que aumenta el tiempo de cálculo.
- 3 - Se aplica este "history-matching" a un ensayo de caída de presión de larga duración realizado en un pozo fracturado hidráulicamente para encontrar el radio de drenaje, el factor de daño y la permeabilidad. Se comparan los resultados obtenidos con los suministrados aplicando los métodos gráficos tradicionales. En estos últimos hay que dividir "a priori" la distribución temporal de presiones en tres etapas: el estado transitorio, último estado transitorio y estado semi-estacionario. Los valores de los parámetros hallados en cada etapa difieren entre sí, pues reflejan la llegada de la perturbación originada por el pozo a zonas cada vez más alejadas del mismo. En cambio, este método inverso utiliza todas las mediciones de presión. Por eso los resultados de

permeabilidad, radio de drenaje y factor de daño son únicos e intermedios entre los hallados por las técnicas tradicionales.

NOMENCLATURA

c	compresibilidad, Pa ⁻¹
E _i	integral exponencial
F	función objetivo
h	altura del reservorio, m
k	permeabilidad, m ²
N	número de observaciones
p	presión, Pa
P _{IN}	presión inicial, Pa
q	caudal, m ³ /s
r	radio, m
r _e	radio exterior del reservorio, m
r _w	radio del pozo productor, m
s	factor de daño
t	tiempo, s
t _s	tiempo de estabilización, s
x ₁ , x ₂ , x ₃	variables auxiliares

Letras Griegas

μ	viscosidad, Pa.s
σ	porosidad
Δp _{skin}	caída de presión en la fractura, Pa

Subíndices

D	adimensional
i	correspondiente al i-ésimo valor de tiempo
max	máximo valor del parámetro
min	mínimo valor del parámetro

Supraíndices

c	calculado
e	exacto
o	observado

REFERENCIAS

1. Matthews, C.S. & Russell, D.G. "Pressure Buildup and Flow Test in Wells". Monograph Volume 1, Henry L. Doherty Series, Society of Petroleum Engineers, 1967.
2. Darderes, E.; Vampa, V.; Sorarrain, O. y Bidner, M., "Gas well Testing Analysis Using Finite-Difference Models and Optimization Techniques". Revue de L'Institut Francais du Pétrole, Vol. 43(3), 1988, págs. 371-387.
3. Darderes, E.; Vampa, V.; Sorarrain, O. y Bidner, M., "Metodología para la Determinación de la Permeabilidad de un Yacimiento Gasífero aplicando Simulación Numérica y Regresión no Lineal". Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 4(3), 1988, págs. 297-311.
4. Cannon, J.R. y Dogru, A.H., "Estimation of Permeability and Porosity From Well Test Data". (Forum SPE5345). JPT, Vol. 32, 1980, págs. 1323-1324.
5. Dogru, A.; Dixon, T. y Edgar, T. "Confidence Limits on the Parameters and Predictions of Slightly Compressible Single-Phase Reservoirs", Transaction AIME, Vol. 263, 1977, págs. 42-56.
6. Van Poolen, H.K.; "Radius-of-Drainage and Stabilization Time Equations", Oil and Gas Journal, Vol. 62, 1964, págs. 138-146.
7. Savioli, G.B.; Goldschmit, M.B. y Bidner, M.S.; "Discusión sobre las soluciones analíticas y numéricas de la ecuación radial de difusividad que representa el flujo en medios porosos". Revista Brasileira de Engenharia, Vol. 5(2), 1988, págs. 65-79.
8. Gill, P.E.; Murray, W. y Wright, M.H. "Practical Optimization", Academic Press inc., London, Great Britain, 1981.