ACELERAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO PARA OBTENÇÃO DE LIMITES INFERIORES PARA PROBLEMAS DE AUTO-VALOR

VÂNIA R. VELLOSO, MARCOS S. SOUZA, *WAGNER L. MEIRELLES
Fundação de Ensino Superior de São João del Rei-FUNREI
Praça Frei Orlando, 170
36.300 - São João del Rei-MG
Brasil

RESUMO

Este trabalho apresenta uma aceleração de um método numérico de fácil implementação com a finalidade de obter limites inferiores para auto-valores associados com equações diferenciais ordinárias. Quando aplicado à problemas de auto-valores este método reduz a equação do problema original a uma equação diferencial com coeficiente constante da qual a solução exata pode ser facilmente encontrada.

ABSTRAT

This paper presents a aceleraction of a method to find lower bounds to eigenvalues associated with ordinary differential equations. When applied to eigenvalue problems, this method reduces the equation of the original problem to a differential equation with constant coefficient, for wich the exact solution can be easily obtained.

INTRODUÇÃO

Para um grande número de problemas em engenharia é extremamente importante a determinação de valores característicos de uma variável conhecida como auto-valores. Esses valores, em algumas situações, são muito difíceis de serem obtidos analiticamente.

Para problemas desta natureza, existem várias alternativas que levam à determinação de valores aproximados para os auto-valores. Entre estas alternativas o método de Rayleigh-Ritz, baseado na minimização do quociente de Rayleigh, tem sido reconhecido como um dos mais eficientes esquemas para a obtenção de boas aproximações [1-1]. Entretanto como este método fornece apenas limites superiores, a determinação dos limites inferiores faz-se necessário para se estimar o erro envolvido na aproximação.

Um método similar ao do Rayleigh-Ritz foi desenvolvido com o objetivo de determinar os limites inferiores para os auto-valores associados com equações diferenciais ordinárias. Quando aplicado a problemas de caráter geral, este método reduz a equação do problema original a uma equação diferencial com coeficiente constante, sendo que a solução exata pode ser facilmente encontrada [1-2].

Este trabalho contribui em acelerar o método para se determinar os limites inferiores de uma forma similar ao proposto por Meirovith [1-3]. Consiste em, a partir do problema original, gerar dois problemas alternativos que obedeçam somente as condições de contorno estáticas do problema original. A nova equação de solução do problema ori

* Aluno do curso de graduação em Engenharia Mecânica.

ginal deve ser uma combinação linear das soluções do problema alternativo. Essa nova solução gera resultados melhores que os obtidos no trabalho [1-2].

CONSIDERAÇÕES INICIAIS:

Assuma que um problema físico conduz a uma equação do tipo

$$\mu K(g) - \lambda^2 w M(g) = 0 \tag{1}$$

onde

$$g = g(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{2}$$

$$\mu = \mu(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{3}$$

$$w = w(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{4}$$

com um sistema de condições de contorno homogêneas, onde K e M são operadores diferenciais auto-adjuntos e positivo definidos.

Para o primeiro auto-valor a formulação variacional para este problema pode ser escrita como

$$\lambda_1^2 = \min\left[\frac{\langle \mu g_1, Kg_1\rangle}{\langle wg_1, Mg_1\rangle}\right] \tag{5}$$

Neste trabalho a notação $\langle v,y\rangle$ designará o produto interno dado por

$$\langle v,y\rangle = \int_a^b vy\,dx \tag{6}$$

onde

$$v = v(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{7}$$

$$y = y(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{8}$$

Considere, agora, um outro problema de auto-valor

$$\beta K(h) - \Omega^2 \gamma M(h) = 0 \tag{9}$$

onde

$$h = h(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{10}$$

$$\beta = \beta(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{11}$$

$$\gamma = \gamma(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{12}$$

sujeito ao mesmo sistema de condições de contorno homogêneas do problema anterior. Admita-se ainda, que o problema definido pelas equações acima tem uma solução exata e, portanto, seus auto-valores podem ser obtidos exatamente.

Sendo a Formulação Variacional

$$\Omega_1^2 = \min\left[\frac{\langle \beta h_1, Kh_1\rangle}{\langle \gamma h_1, Mh_1\rangle}\right] \tag{13}$$

Assumindo que as seguintes desigualdades são verdadeiras

$$\langle 1,\beta \rangle < \langle 1,\mu \rangle \tag{14}$$

$$\langle 1,\gamma \rangle > \langle 1,w \rangle \tag{15}$$

pode-se mostrar que

$$\langle \beta h_i, Kh_i \rangle \leq \langle \mu h_i, Kh_i \rangle \tag{16}$$

$$\langle \gamma h_i, Mh_i \rangle \geq \langle w h_i, Mh_i \rangle \tag{17}$$

temos então que

$$\Omega^2{}_1 \leq \lambda^2{}_1 \tag{18}$$

Conclui-se então que os auto-valores do segundo problema dado nesta seção, constituem-se em limites inferiores para os auto-valores do primeiro problema.

METODOLOGIA PARA DETERMINAÇÃO DE LIMITES INFERIORES

Para garantir a existência de uma solução exata para o problema de auto-valor dado pelas equações (1) a (4), as funções u(x) e w(x) são assumidas como contínuas em pequenos intervalos. Além disso, a região $a \leq x \leq b$, é divida em n subregiões onde tanto u(x) como w(x) são ' iguais a uma constante em cada subregião, isto é,

$$u(x) = C^P{}_i \quad e \quad w(x) = D^P{}_i \quad em \quad e_i \leq x \leq e_i + 1 \qquad i = 1,2,\ldots n \tag{19}$$

onde p é a ordem da equação diferencial.

Para satisfazer as equações (11) e (12), as constantes $C^P{}_i$ e $D^P{}_i$ são definida como.

$$C^P{}_i = \max(w) \qquad e_i \leq x \leq e_i + 1 \tag{20}$$

$$D^P{}_i = \min(\mu) \qquad e_i \leq x \leq e_i + 1 \tag{21}$$

Os pontos limites de cada intervalo, e_i, são encontrados da solução do problema de otimização

$$\min\left[\langle 1,u \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle 1,D^P{}_i \rangle\right] \tag{22}$$

ou

$$\min\left[\sum_{i=1}^{n} \langle 1,C^P{}_i \rangle - \langle 1,w \rangle\right] \tag{23}$$

Uma vez determinados $C^P{}_i$, $D^P{}_i$ e e_i a equação é solucionada em cada subregião e n soluções diferentes são obtidas. Para garantir a continuidade da solução em toda a região $a \leq x \leq b$, as soluções f_{i-1} e f_i, e suas derivadas até a ordem p-1, são igualadas em cada ponto limite e_i, i.e.,

$$f_i(e_{i+1}) = f_{i+1}(e_{i+1}) \tag{24}$$

$$\frac{df_i}{dx}(e_{i+1}) = \frac{df_{i+1}}{dx}(e_{i+1}) \tag{25}$$

Esta condição, juntamente com as condições de contorno, estabelece um sistema de equações homogêneas com mais incógnitas do que o número de equações, sendo uma destas incógnitas primeiro auto-valor do problema. Para se obter pelo menos uma solução diferente da trivial o determinante da matriz de coeficientes deve ser igualado a zero, fornecendo uma equação transcendental em termos de Ω^2.

Esta equação transcendental será denominada de f_o.

Uma vez apresentado o método partíremos agora para aceleração do mesmo. Inicialmente será proposto dois problemas alternativos em relação ao problema original, diferenciando deste apenas nas condições cinemáticas de contorno. Assim pelo método descrito acima obtem-se as equações transcendentais que são soluções deste problemas alternativos denominaremos f_2 e f_3. Sendo a nova equação solução do problema original, chamada agôra f_1, dada por:

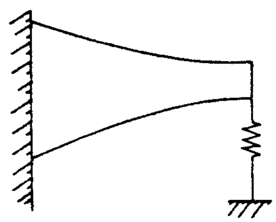
$$f_1 = f_2 + Cf_3 \tag{26}$$

Onde C é uma constante a ser determinada para que esta equação (26) obedeça às condições cinemáticas de de contorno.

A equação f_1 fornece resultados melhores que os fornecidos por f_o .

EXEMPLO NUMÉRICO

Vibração Transversal de seção Variável



O movimento vibratório de uma viga engastada-mola carregada transversalmente é dado por $\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

com as seguintes condições de contorno

$$w(0) = 0 \qquad \frac{dw}{dx}(0) = 0 \qquad 1(a,b)$$

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}(L) = 0 \qquad EI\frac{d^3w}{dx^3}(L) - KW(L) = 0 \qquad 1(c,d)$$

Para uma largura de viga constante, w, e espessura variando exponencialmente, $t = t_o e^{-\gamma x}$, a área de seção transversal é

$$A(x) = wt_o e^{-\alpha_1 x}$$

com momento de inércia igual a

$$I(x) = \frac{wt_o^3}{12} e^{-3\alpha_1 x}$$

Usando o método da separação de variáveis $y(x) = f(x)g(t)$ temos

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[I(x)\frac{d^2 f}{dx^2}\right] = \lambda_*^4 \rho \frac{A(x)}{E} f$$

onde λ_*^4 é uma constante

Substituindo-se as expressões de $I(x)$ e $A(x)$ e definindo-se as variáveis

$$n = \frac{x}{L} \; ; \quad \alpha = \alpha_1 L \qquad \text{temos}$$

$$\frac{d^2}{dn^2}\left[e^{-3\alpha n}\frac{d^2 f}{dn^2}\right] = \lambda^4 e^{-\alpha n} f$$

pode ser escrita na forma abaixo

$$\frac{d^4 f_i}{dn^4} - K_i^4 \lambda^4 f_i = 0$$

onde

$$K_i^4 = \frac{D_i^4}{C_i^4} \qquad e$$

$$D_i^4 = \max(e^{-\alpha n}) \qquad \text{em} \qquad e_i < n < e_{i+1}$$

$$C_i^4 = \min(e^{-3\alpha n}) \qquad e_i < n < e_{i+1}$$

Solução da equação diferencial acima na primeira sub-região

$$0 = e_1 < n < e_2 \,, \quad \text{é}$$

$$\delta_1 = A_1 \sin(K_1 \Omega n) + A_2 \cos(K_1 \Omega n) - A_3 \sinh(K_1 \Omega n) + A_4 \cosh(K_1 \Omega n)$$

Usando o método [1.2] acha-se a equação transcendental f_o, cujos resultados são mostrados na tabela 1, coluna f_o.

Para se calcular f_1 usou-se os seguintes problemas alternativos: Viga engastada-livre e viga engastada-pino, os quais diferem do problema original apenas na condição de contorno (1-d). Obtem-se suas equações transcendentais, f_2 e f_3, e calcula-se a constante c. Que é dada por:

$$C = \frac{Kf_2 - EIf_2^*}{EIf_3^* - Kf_3} \tag{27}$$

Assim a nova equação solução será (26), onde c foi calculado (27) para que (26) obedeça à condição (1-d).

Os resultados para a função f_1 são mostrados na tabela 1, coluna f_1.

TABELA 1

Nº de pontos	auto-valor (f_o)	auto-valor (f_1)
6	0.69010543	0.77268219
10	0.87641144	0.88230926
12	0.92459869	0.94144439
14	0.92761993	0.96199798

CONCLUSÃO

Neste trabalho procurou-se acelerar o método que permiti determinar os limites inferiores para problemas de auto-valor. Do ponto de vista do exemplo resolvido, como mostra a tabela 1, pode-se dizer ' que os resultados obtidos foram satisfatórios.

REFERÊNCIAS

[1-1] Meirovitch, L., Analytical Methods in Vibrations (London: the MacMillan Company, 1967).

[1-2] Maneschy, C.E; Velloso, V.R. Lower Bounds to Eigenvalue Problems, X COBEM, 1990.

[1-3] Meirovitch, L., On Accelerating the Convergence of the Rayleigh-Ritz Method, 1990.

[1-4] Hildebrand, F.B., Advanced Calculus for Applications (2nd edition; Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.,