Mecánica Computacional Vol. XXIV
A. Larreteguy (Editor)
Buenos Aires, Argentina, Noviembre 2005

FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS NORMALES DE VIBRACIÓN TRANSVERSAL DE UNA PLACA RECTANGULAR ORTÓTROPA, LIBRE DE VINCULACIÓN

Daniel H. Felix [*], **Carlos A. Rossit** [*†], **Patricio A. A. Laura** [*] **y Diana V. Bambill** [*†]

[*] Departamento de Ingeniería – Instituto de Mecánica Aplicada
Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253 – (8000) Bahía Blanca - Argentina
e-mail: dhfelix@criba.edu.ar, ima@criba.edu.ar

[†] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
e-mail: carossit@criba.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar

Palabras Clave: Placas libres, ortótropas, Rayleigh-Ritz, frecuencias, formas modales

Resumen. *El presente estudio es de interés, tanto básico como aplicado, desde el punto de vista de vibraciones de tableros de puentes, estructuras navales y aplicaciones aeroespaciales. Se obtienen los primeros coeficientes de frecuencia natural del sistema en estudio, y las respectivas formas modales, en una extensa variedad de modelos, considerándose los modos doblemente simétricos, doblemente antisimétricos y simétricos-antisimétricos. La elección del modelo propuesto se basa además, en el creciente y renovado interés, por el uso de materiales con propiedades ortótropas, generado por construcción, laminado o presencia de refuerzos estructurales, entre otros. Si bien puede hallarse extensa bibliografía que trata el análisis dinámico del problema de la placa rectangular totalmente libre, cuando se consideran materiales isótropos, no ocurre lo mismo, cuando se agregan condiciones de ortotropía para el material considerado. Pueden citarse para tal caso, los trabajos de D. J. Gorman que ha obtenido resultados de alta precisión, mediante la aplicación del método de superposición. Se plantea la solución, mediante el método energético de Rayleigh-Ritz, bajo una interfaz matricial que agiliza considerablemente su aplicación, y permite utilizar un gran número de términos. De este modo se comparan los resultados obtenidos con los hallados en la literatura, evidenciándose que el método propuesto arroja resultados satisfactorios. Por otra parte el método variacional propuesto, hace altamente conveniente el tratamiento de complejidades mecánico-estructurales adicionales, por ejemplo presencia de masas concentradas, orificios, etc. Otras metodologías analíticas disponibles no permitirían, en principio, el tratamiento de tales complejidades*

1 INTRODUCCIÓN

La técnica analítica utilizada en el presente trabajo, combina el método de Rayleigh-Ritz, la utilización de funciones-viga como funciones coordenadas y el uso de álgebra matricial, para desarrollar los algoritmos aplicados. Tales algoritmos permiten por una vía analítico-numérica disponer de una herramienta alternativa para la determinación de frecuencias naturales y formas modales, en este caso aplicada al modelo de placa rectangular ortótropa totalmente libre.

En los últimos años el modelo de placa libre de vinculación ha adquirido interés especial, y puede ser utilizado como primera aproximación y para una interpretación simplificada de complejos sistemas estructurales que en su forma más simple tienden al comportamiento de placa libre. Ejemplos de tales sistemas lo constituyen bases marítimas, estaciones espaciales, o bien sistemas dinámicos menos complejos con condiciones de vinculación equivalentes.

Como es sabido, el tratamiento del modelo de placa totalmente libre en la literatura técnico científica es abundante cuando se consideran materiales isótropos[1], homogéneos y continuos. Esta publicación pretende contribuir adicionalmente con el tratamiento de materiales ortótropos y presencia de huecos en la placa, que por lo indicado en párrafos anteriores puede resultar más indicado para representar algunos de los sistemas estructurales mencionados.

En la primer parte del trabajo que contempla la placa ortótropa maciza, se ha realizado una comparación exhaustiva con resultados obtenidos por D. J. Gorman[2] (que ha utilizado el método de superposición), para mostrar el nivel de precisión alcanzado con la variante de Rayleigh-Ritz mencionada. No resulta de menor importancia destacar el hecho de que esta metodología no requiere satisfacer las condiciones de borde naturales en los bordes libres, lo cual la convierte en una herramienta más simple de interpretar y de aplicar.

La segunda parte del trabajo contempla la presencia de un hueco centrado en la placa ortótropa libre, destacándose el hecho de que no se han hallado trabajos similares en la literatura desarrollados por una vía analítica o semi-analítica.

La presente contribución se completa con la determinación de formas modales y el análisis de los cambios que registran los coeficientes de frecuencia, al modificar las condiciones de ortotropía del material y las dimensiones del hueco.

2 ESQUEMA DEL MODELO ANALIZADO

La figura 1 muestra esquemáticamente los modelos analizados observándose:

a) Modelo de placa ortótropa maciza, libre de vinculación
b) Modelo de placa ortótropa con un hueco centrado, libre de vinculación

El material elegido en ambos casos es el hormigón armado, por su amplia aplicación[2], adoptándose, como aproximación de sus coeficientes de Poisson a la relación: $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$.

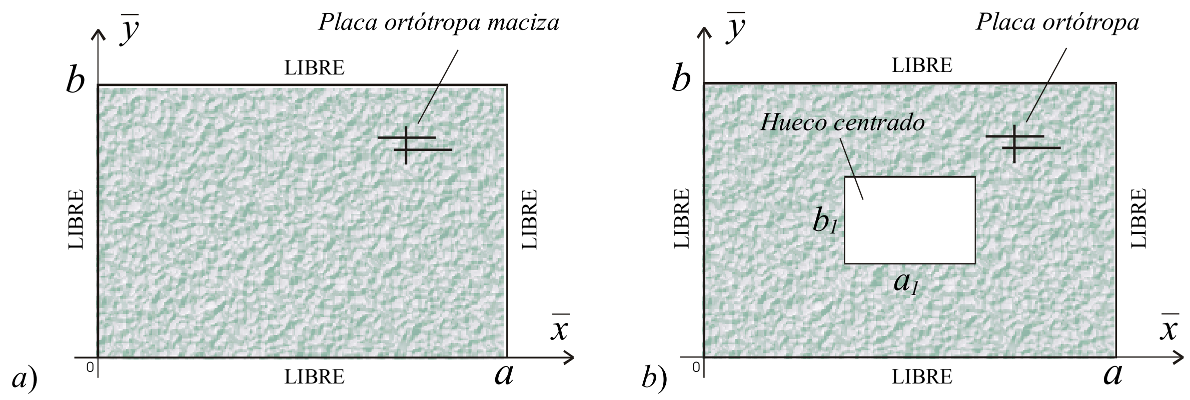


Figure 1: Esquema de los modelos analizados: *a*) placa maciza, *b*) placa con hueco centrado

En la figura 1, la línea sobre las coordenadas espaciales de la placa, $\overline{x}$ e $\overline{y}$ indica que no son adimensionales y las direcciones principales de elasticidad son coincidentes con los ejes coordenados. En la figura 1*b*, la relación a_1/a entre los lados del hueco, se mantiene igual a la relación $\lambda = a/b$, entre los lados de la placa.

3 FORMULACIÓN VARIACIONAL: RAYLEIGH-RITZ

Para lograr un enfoque auto contenido, en primer lugar se reseñan brevemente los fundamentos del algoritmo utilizado.

3.1 Fundamentos del método

El modelo de placa esquematizado en la figura 1, es gobernado por la siguiente funcional, en la que se emplea la nomenclatura utilizada por Lekhnitskii[3]:

$$
\begin{aligned}
J[W] = U_{\max} - T_{\max} = \frac{1}{2}\int_{A_n}\Bigg[& D_1\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \overline{x}^2}\right)^2 + 2\,D_1\,\nu_2\,\frac{\partial^2 W}{\partial \overline{x}^2}\,\frac{\partial^2 W}{\partial \overline{y}^2} + D_2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \overline{y}^2}\right)^2 \\
& + 4\,D_k\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \overline{x}\,\partial \overline{y}}\right)^2\Bigg] d\overline{x}\,d\overline{y} - \frac{1}{2}\,\rho\,\omega^2\int_A h\,W^2\,d\overline{x}\,d\overline{y}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

La cual, como se observa en la expresión (1), se obtiene por diferencia entre la energía de deformación máxima y la energía cinética máxima. La funcional gobernante (1), contiene los parámetros que definen las propiedades mecánicas y geométricas de la placa, siendo: D_1 y D_2, la rigidez a flexión de la placa en las direcciones principales de elasticidad, que son coincidentes con la dirección de los ejes coordenados; D_k, la rigidez torsional; ρ la densidad del material; ν_1 y ν_2 los coeficientes de Poisson en las direcciones mencionadas; *h* el espesor de la placa y A_n, el área neta de la placa, que requiere en el caso de la figura 1*b*, restar el área del hueco.

Además la funcional (1) contiene los autovalores y autofunciones a determinar, siendo: $W(x,y)$, la amplitud de desplazamiento transversal de la placa cuando ejecuta vibraciones transversales libres, y ω la correspondiente frecuencia de vibración.

Los autovalores y autofunciones mencionados se obtienen minimizando la funcional planteada por medio de la siguiente expresión variacional:

$$\delta J[W] = 0 \tag{2}$$

que indica que la primera variación de la funcional debe anularse, cuando la funcional alcance un valor mínimo.

La solución de la expresión (2), es obtenida mediante la aplicación del método de Rayleigh-Ritz[4, 5], aproximando la amplitud de desplazamiento $W(x,y)$ en la siguiente forma:

$$W(x,y) \cong \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} A_{mn}\ X_m(x)\, Y_n(y) \tag{3}$$

En la expresión anterior, la amplitud de desplazamiento se aproxima con una serie doble de funciones viga[6,7], cada una de las cuales satisface las condiciones de borde esenciales o geométricas, en el borde exterior de la placa. Las funciones coordenadas $X_m(x)$ e $Y_n(y)$, son las funciones viga mencionadas, formuladas en las direcciones de los ejes coordenados, y $M \times N$ el número de términos utilizados. Nótese que en la expresión (3), las coordenadas espaciales están expresadas en forma adimensional:

$$x = \overline{x}/a \quad ; \quad y = \overline{y}/b \tag{4}$$

siendo *a* y *b* las dimensiones de la placa. Para satisfacer las condiciones de borde geométricas, en el caso de la placa libre de vinculación se utilizan las funciones-viga libre en ambos extremos. La expresión de las mismas resulta:

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \cosh(k_m\, x) + \cos(k_m\, x) - r_m\ [\operatorname{sen} h(k_m\, x) + \operatorname{sen}(k_m\, x)] \\ Y_n(y) &= \cosh(k_n\, y) + \cos(k_n\, y) - r_n\ [\operatorname{sen} h(k_n\, y) + \operatorname{sen}(k_n\, y)] \end{aligned} \tag{5a, b}$$

con

$$r_m = \frac{cos(k_m) - cosh(k_m)}{sen(k_m) - senh(k_m)} \quad ; \quad r_n = \frac{cos(k_n) - cosh(k_n)}{sen(k_n) - senh(k_n)} \tag{6a, b}$$

Los autovalores k_m y k_n se obtienen resolviendo las raíces de la siguiente ecuación característica:

$$cos(k)\, cosh(k) = 1 \tag{7}$$

los cuales son coincidentes con los autovalores de las funciones-viga empotrada en ambos extremos, a excepción de los primeros dos, que son nulos y corresponden al modo de desplazamiento de la placa como cuerpo rígido.

Al reemplazar la función aproximada (3) en la expresión variacional (2), se genera un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo de la forma:

$$\frac{\partial J[W]}{\partial A_{ql}} = 0 \tag{8}$$

obtenido al derivar la funcional de la placa respecto a cada una de las constantes A_{mn}.

Para calcular una solución del sistema homogéneo (8), distinta de la trivial, se requiere que el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones (8), denominado determinante-ecuación, sea nulo.

3.2: Algoritmo matricial

El determinante-ecuación de la placa puede ser expresado en la forma:

$$\left| \mathbf{U} - \Omega^2 \, \mathbf{T} \right| = 0 \tag{9}$$

siendo los $\Omega_i = \sqrt{\dfrac{\rho h}{D_1}} a^2 \omega_i$, los coeficientes de frecuencia buscados, y **U** y **T**, las matrices que se relacionan con la energía de deformación y cinética máxima de la placa.

La estructura de las matrices **U** y **T** es:

$$\mathbf{U} = \left\lfloor u_{ql\,mn} \right\rfloor \quad ; \quad \mathbf{T} = \left\lfloor t_{ql\,mn} \right\rfloor \text{ con } q,\, m = 1, \ldots, M \text{ y } l,\, n = 1, \ldots N \tag{10a, b}$$

Los elementos, $u_{ql\,mn}$ y $t_{ql\,mn}$ se obtienen con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} u_{qlmn} = {} & \lambda^{-2} X^c_{qm}\, Y^a_{ln} + \nu_2 \left(X^b_{qm}\, Y^b_{nl} + X^b_{mq}\, Y^b_{ln} \right) + \lambda^2 \frac{D_2}{D_1} X^a_{qm}\, Y^c_{ln} + 4 \frac{D_k}{D_1} X^d_{qm}\, Y^{d\prime}_{ln} - \\ & \left[\lambda^{-2} X^c_{qm}\Big|_{x_1}^{x_2} Y^a_{ln}\Big|_{y_1}^{y_2} + \nu_2 \left(X^b_{qm}\Big|_{x_1}^{x_2} Y^b_{nl}\Big|_{y_1}^{y_2} + X^b_{mq}\Big|_{x_1}^{x_2} Y^b_{ln}\Big|_{y_1}^{y_2} \right) + \right. \\ & \left. \lambda^2 \frac{D_2}{D_1} X^a_{qm}\Big|_{x_1}^{x_2} Y^c_{ln}\Big|_{y_1}^{y_2} + 4 \frac{D_k}{D_1} X^d_{qm}\Big|_{x_1}^{x_2} Y^d_{ln}\Big|_{y_1}^{y_2} \right] \end{aligned} \tag{11}$$

$$t_{qlmn} = \lambda^{-2} \left(X^a_{qm}\, Y^a_{ln} - X^a_{qm}\Big|_{x_1}^{x_2} Y^a_{ln}\Big|_{y_1}^{y_2} \right) \tag{12}$$

Las expresiones (11) y (12) son función de las propiedades mecánicas y geométricas de la placa y de los denominados coeficientes-viga, que introducen las condiciones de borde esenciales, y se obtienen integrando las funciones viga dadas en las expresiones (5a, b). Se tiene así:

$$X_{qm}^{a}=\int_{0}^{1}X_q\,X_m\,dx \qquad X_{qm}^{b}=\int_{0}^{1}X_q\,\frac{d^2X_m}{dx^2}\,dx$$
$$X_{qm}^{c}=\int_{0}^{1}\frac{d^2X_q}{dx^2}\frac{d^2X_m}{dx^2}\,dx \qquad X_{qm}^{d}=\int_{0}^{1}\frac{dX_q}{dx}\frac{dX_m}{dx}\,dx \tag{13}$$

$$Y_{ln}^{a}=\int_{0}^{1}Y_l\,Y_n\,dy \qquad Y_{ln}^{b}=\int_{0}^{1}Y_l\,\frac{d^2Y_n}{dy^2}\,dy$$
$$Y_{ln}^{c}=\int_{0}^{1}\frac{d^2Y_l}{dy^2}\frac{d^2Y_n}{dy^2}\,dy \qquad Y_{ln}^{d}=\int_{0}^{1}\frac{dY_l}{dy}\frac{dY_n}{dy}\,dy \tag{14}$$

El resto de los coeficientes, utilizados únicamente en los modelos de la figura 1*b*, se obtienen colocando en los extremos de integración de las expresiones (13) y (14), las coordenadas de los vértices del hueco que contiene la placa.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Entre la variada gama de posibilidades, para elegir las propiedades del material a tratar[8], se optó por el hormigón armado, de más frecuente aplicación, considerándose diferentes grados de ortotropía. Las frecuencias obtenidas corresponden exclusivamente a los modos que presentan simetría o antimetría en ambas direcciones.

Las tablas que contienen los coeficientes de frecuencia calculados, son agrupados de acuerdo al tipo de simetría que presenta la placa. Considerando simetría en ambas direcciones se presentan cuatro casos posibles:

Tipo de simetría	*Nomenclatura*
doblemente simétricos	S-S
doblemente antisimétricos	A-A
simétricos – antisimétricos	S-A
antisimétricos – simétricos	A-S

4.1 Placa maciza, de material isótropo

Se comparan en la tabla 1 los valores calculados para los primeros 6 coeficientes de frecuencia natural de un modelo testigo, consistente en una placa cuadrada isótropa, libre de vinculación, con los obtenidos por D. J. Gorman[9] y también con valores obtenidos por A. W. Leissa[10].

Modo	D. J. Gorman[9]	A. W. Leissa[10] (Rayleigh-Ritz 36 términos)	Δ_1 %	Presente Estudio (Rayleigh-Ritz 400 términos)	Δ_2 %
1	3.367	3.372	0.15	3.3679	0.03
2	4.899	4.947	0.98	4.907	0.16
3	6.068	6.108	0.66	6.075	0.12
4	8.700	8.756	0.64	8.712	0.14
5	-	8.756	0.64	8.712	0.14
6	15.27	15.38	0.72	15.296	0.17

Tabla 1: Grado de precisión alcanzado con Rayleigh-Ritz , en la determinación de los primeros coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i^* = \sqrt{\rho/D}\ \omega\left(a/2\right)^2$, en una placa maciza, cuadrada, isótropa . ν = 0..3

Ambas diferencias porcentuales se obtuvieron con relación a los valores de D. J. Gorman. Del análisis de los resultados de la tabla puede apreciarse que las diferencias disminuyen notablemente al utilizar mayor número de términos, mostrando así la convergencia del algoritmo hacia los valores exactos, como era de esperar.

En la tabla 2 se presenta un análisis de convergencia de los primeros valores de frecuencia, para una placa cuadrada, isótropa maciza, se aprecia cómo varía el grado de precisión de los resultados, en función del número de términos $M \times N$ utilizados en el algoritmo. En las filas 1 y 2 se indica, el tipo de simetría de la forma modal correspondiente y los modos dominantes.

Simetría	A-A	S-S	S-S	S-A	A-S	S-S
Modos dominante	1-1	0-2 2-0	0-2 2-0	2-1	1-2	2-2
M = N	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
9	14.939	20.563	24.023	37.695	37.695	69.753
25	14.189	20.490	23.967	36.207	36.207	66.248
49	14.135	20.460	23.942	36.087	36.087	66.248
81	14.125	20.444	23.929	36.055	36.055	65.755
225	14.120	20.421	23.909	36.024	36.024	65.699
400	14.119	20.414	23.903	36.012	36.012	65.690

Tabla 2: análisis de convergencia de los primeros coeficientes de frecuencia $\Omega_i = \sqrt{\rho h/D}\ \omega\, a^2$, en una placa maciza, cuadrada, isótropa , ν = 0.225.

4.2 Placa maciza, de material ortótropo

Se calcularon coeficientes de frecuencia correspondientes al modelo elegido por D. J. Gorman[9], aplicando el método de Rayleigh-Ritz, con aproximaciones de 400 términos, para estudiar el grado de convergencia que puede alcanzarse con la metodología propuesta.

Cabe hacer notar que el procedimiento de Rayleigh-Ritz no exige que se satisfagan las condiciones naturales de borde en el borde exterior libre. Las comparaciones entre ambos grupos de valores se presentan en las tablas 3, 4, 5 y 6.

Se ha mantenido la forma de la presentación de resultados dada por Gorman[2], para facilitar la comparación. Es por ello que los coeficientes de frecuencia son expresados en función de las dimensiones de un cuarto de placa. Las relaciones de ortotropía adoptadas D_2/D_1 se variaron entre 1/3 y 3.

Para cada valor de frecuencia, se presenta el valor calculado por el método de Rayleigh-Ritz propuesto, el valor exacto dado en la bibliografía, Gorman, y la diferencia entre ambos dada como porcentaje. Según es posible observar en las tablas los resultados obtenidos muestran un alto grado de precisión en todos los casos analizados.

Cada tabla corresponde a un tipo de simetría diferente de placas macizas ortótropas, cuadradas o rectangulares.

La tabla 3 presenta los coeficientes de frecuencia para el caso de modos doblemente simétricos Del análisis comparativo entre ambos grupos de resultados, se observa que la convergencia del método propuesto con los valores de referencia es excelente, siendo la mayor diferencia del 0.12 %.

La tabla 4 corresponde a los coeficientes de frecuencia de modos doblemente antimétricos, para los mismos modelos estructurales. La mayor diferencia porcentual entre coeficientes de del 0.2 %.

Las tablas 5 y 6 corresponden a los coeficientes de frecuencia de modos simétricos-antisimétricos de placas cuadradas y rectangulares y también en estos casos se observa que el grado de convergencia es excelente.

A continuación se presentan una serie de gráficos, figuras 4, 5,6 y 7, que muestran el efecto que la relación de rigideces D_2/D_1 del material produce en los primeros dos coeficientes de frecuencia $\Omega_i = \sqrt{\rho h/D_1}\, \omega a^2$, $i = 1, 2$, de placas rectangulares ($\lambda = a/b = 1,\ 2/3,\ 2/5$) para los modos de simetría o antisimetría analizados previamente.

Se adoptó para el análisis un rango de variación de la relación de ortotropía D_2/D_1, de 0.10 a 4.00.

		$\lambda = a/b$								
		1			2 / 3			2 / 5		
D_2/D_1	Modo	Presente estudio	Gorman[2]	$\Delta\%$	Presente estudio	Gorman[2]	$\Delta\%$	Presente estudio	Gorman[2]	$\Delta\%$
1 / 3	1	3.127	3.124	0.10	1.396	1.395	0.07	0.5022	0.5017	0.10
	2	5.588	5.582	0.11	5.539	5.533	0.11	2.738	2.735	0.11
	3	12.557	12.55	0.06	7.668	7.660	0.10	5.562	5.557	0.09
	4	17.356	17.34	0.09	9.231	9.224	0.08	6.734	6.727	0.10
1 / 2	1	3.805	3.801	0.11	1.710	1.708	0.12	0.6152	0.6147	0.08
	2	5.625	5.620	0.09	5.551	5.546	0.09	3.353	3.349	0.12
	3	13.76	13.75	0.07	9.299	9.288	0.12	5.575	5.570	0.09
	4	21.24	21.22	0.09	9.995	9.988	0.07	7.309	7.302	0.10
2 / 3	1	4.345	4.340	0.12	1.974	1.972	0.10	0.7106	0.7099	0.10
	2	5.689	5.684	0.09	5.557	5.552	0.09	3.869	3.865	0.10
	3	14.73	14.72	0.07	10.27	10.26	0.10	5.584	5.579	0.09
	4	24.51	24.49	0.08	11.03	11.02	0.09	7.573	7.565	0.11
3 / 2	1	5.321	5.315	0.11	2.951	2.948	0.10	1.066	1.065	0.09
	2	6.968	6.962	0.09	5.581	5.576	0.09	5.444	5.438	0.11
	3	18.04	18.03	0.06	12.24	12.23	0.08	5.962	5.957	0.08
	4	30.02	29.99	0.10	16.37	16.35	0.12	8.460	8.452	0.09
2	1	5.381	5.376	0.09	3.397	3.394	0.09	1.232	1.230	0.16
	2	7.955	7.948	0.09	5.599	5.594	0.09	5.522	5.516	0.11
	3	19.46	19.45	0.05	13.04	13.03	0.08	6.787	6.780	0.10
	4	30.04	30.01	0.10	18.89	18.87	0.11	8.849	8.842	0.08
3	1	5.416	5.411	0.09	4.120	4.116	0.10	1.508	1.507	0.07
	2	9.678	9.669	0.09	5.656	5.651	0.09	5.544	5.539	0.09
	3	21.75	21.73	0.09	14.32	14.31	0.07	8.263	8.255	0.10
	4	30.06	30.03	0.10	23.12	23.10	0.09	9.491	9.484	0.07

Tabla 3: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i^* = \omega_i\,(a/2)^2\,\sqrt{\rho h/D_1}$ de modos doblemente simétricos, en una placa maciza ortótropa, libre de vinculación, para diferentes relaciones D_2/D_1 y diferentes valores de $\lambda = a/b$. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. $M = N = 30$

		$\lambda = a/b$								
		1			2 / 3			2 / 5		
D_2/D_1	Modo	Presente estudio	Gorman[2]	$\Delta\%$	Presente estudio	Gorman[2]	$\Delta\%$	Presente estudio	Gorman[2]	$\Delta\%$
1 / 3	1	2.635	2.635	0.00	1.739	1.739	0.00	1.029	1.029	0.00
	2	11.85	11.83	0.17	6.605	6.599	0.09	3.462	3.461	0.03
	3	17.31	17.29	0.12	15.24	15.21	0.20	6.960	6.953	0.10
	4	30.05	30.02	0.10	16.43	16.41	0.12	11.99	11.97	0.17
1 / 2	1	2.921	2.920	0.03	1.930	1.930	0.00	1.141	1.141	0.00
	2	13.85	13.83	0.14	7.592	7.585	0.09	3.911	3.909	0.05
	3	17.78	17.76	0.11	16.32	16.29	0.18	8.067	8.058	0.11
	4	32.92	32.89	0.09	18.45	-	-	14.14	14.12	0.14
2 / 3	1	3.141	3.140	0.03	2.079	2.078	0.05	1.229	1.229	0.00
	2	15.48	15.46	0.13	8.403	8.395	0.10	4.272	4.269	0.07
	3	18.21	18.19	0.11	16.54	16.51	0.18	8.983	8.973	0.11
	4	35.18	35.15	0.09	20.82	20.79	0.14	15.59	15.57	0.13
3 / 2	1	3.846	3.846	0.00	2.558	2.557	0.04	1.514	1.514	0.00
	2	18.96	18.93	0.16	11.33	11.31	0.18	5.523	5.519	0.07
	3	22.31	22.28	0.13	17.20	17.17	0.17	12.32	12.30	0.16
	4	43.09	43.05	0.09	29.17	29.14	0.10	16.06	16.04	0.12
2	1	4.130	4.130	0.00	2.752	2.751	0.04	1.630	1.630	0.00
	2	19.59	19.57	0.10	12.65	12.63	0.16	6.071	6.066	0.08
	3	25.24	25.21	0.12	17.49	17.47	0.11	13.82	13.81	0.07
	4	46.55	46.52	0.06	31.23	31.20	0.10	16.21	16.18	0.19
3	1	4.565	4.564	0.02	3.049	3.048	0.03	1.810	1.809	0.06
	2	20.52	20.49	0.15	14.80	14.78	0.14	6.960	6.954	0.09
	3	29.99	29.94	0.17	18.02	18.00	0.11	15.92	15.90	0.13
	4	52.05	52.00	0.10	34.22	34.20	0.06	16.85	16.83	0.12

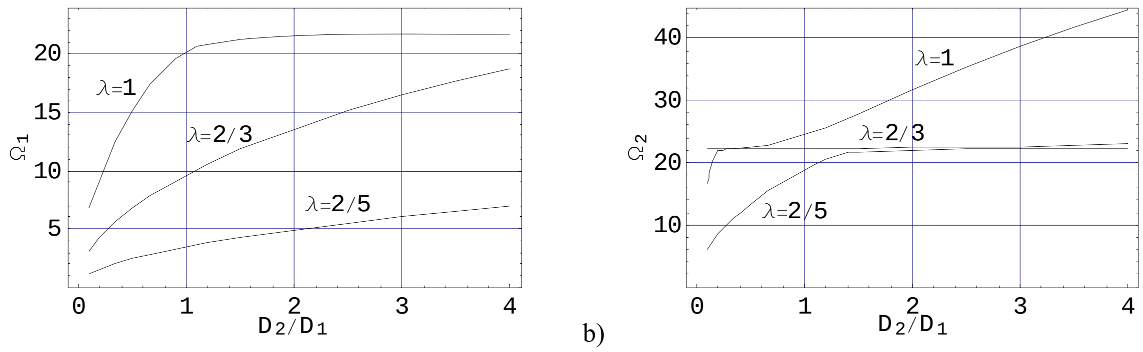
Tabla 4: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i^* = \omega_i \left(a/2\right)^2 \sqrt{\rho h/D_1}$ de modos doblemente antisimétricos, en una placa maciza ortótropa, libre de vinculación, para diferentes relaciones D_2/D_1 y diferentes valores de $\lambda = a/b$. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. $M = N = 30$

		$\lambda = a/b$								
		1			2 / 3			2 / 5		
D_2/D_1	Modo	Presente estudio	Gorman [2]	$\Delta\%$	Presente estudio	Gorman [2]	$\Delta\%$	Presente estudio	Gorman [2]	$\Delta\%$
1 / 3	1	6.216	6.212	0.06	3.816	3.814	0.05	2.153	2.152	0.05
	2	15.30	15.29	0.07	10.41	10.39	0.19	5.041	5.037	0.08
	3	20.20	20.17	0.15	15.37	15.35	0.13	9.268	9.257	0.12
	4	22.70	22.68	0.09	18.78	18.76	0.11	15.03	15.01	0.13
1 / 2	1	7.076	7.070	0.08	4.295	4.293	0.05	2.406	2.405	0.04
	2	15.32	15.30	0.13	12.18	12.16	0.16	5.769	5.764	0.09
	3	23.47	23.44	0.13	15.39	15.38	0.06	10.86	10.84	0.18
	4	24.74	24.71	0.12	19.53	19.51	0.10	15.38	15.36	0.13
2 / 3	1	7.775	7.768	0.09	4.677	4.675	0.04	2.605	2.604	0.04
	2	15.33	15.31	0.13	13.63	13.61	0.15	6.365	6.359	0.09
	3	24.93	24.90	0.12	15.43	15.42	0.06	12.18	12.17	0.08
	4	27.72	27.68	0.14	20.13	20.11	0.10	15.39	15.38	0.06
3 / 2	1	10.25	10.24	0.10	5.991	5.987	0.07	3.270	3.268	0.06
	2	15.36	15.35	0.07	15.30	15.28	0.13	8.497	8.488	0.11
	3	28.99	28.96	0.10	19.24	19.21	0.16	15.33	15.32	0.07
	4	39.87	39.81	0.15	22.30	22.28	0.09	17.06	17.03	0.18
2	1	11.34	11.33	0.09	6.560	6.555	0.08	3.549	3.548	0.03
	2	15.39	15.38	0.06	15.31	15.30	0.07	9.457	9.447	0.11
	3	30.71	30.69	0.07	21.65	21.62	0.14	15.36	15.34	0.13
	4	45.46	45.39	0.15	23.35	23.33	0.09	18.31	18.29	0.11
3	1	13.06	13.04	0.15	7.479	7.473	0.08	3.990	3.988	0.05
	2	15.53	15.52	0.06	15.32	15.31	0.07	11.04	11.03	0.09
	3	33.47	33.44	0.09	24.38	24.35	0.12	15.38	15.36	0.13
	4	49.57	49.52	0.10	26.38	26.34	0.15	19.05	19.03	0.10

Tabla 5: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i^* = \omega_i \left(a/2\right)^2 \sqrt{\rho h/D_1}$ de modos simétricos-antisimétricos con $\lambda \leq 1$, en una placa maciza ortótropa, libre de vinculación, para diferentes relaciones D_2/D_1 y diferentes valores de $\lambda = a/b$. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. $M = N = 30$

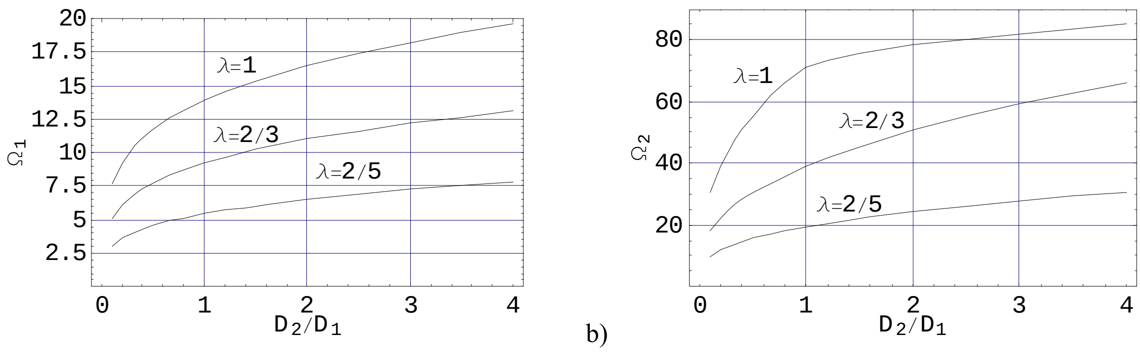
		$\lambda = a/b$								
		1			3 / 2			5 / 2		
D_2/D_1	Modo	Presente estudio	Gorman [2]	Δ%	Presente estudio	Gorman [2]	Δ%	Presente estudio	Gorman [2]	Δ%
1 / 3	1	6.216	6.212	0.06	4.746	4.741	0.11	2.412	2.410	0.08
	2	15.30	15.29	0.07	6.832	6.825	0.10	3.860	3.856	0.10
	3	20.20	20.17	0.15	13.19	13.18	0.08	7.602	7.596	0.08
	4	22.70	22.68	0.09	18.70	18.67	0.16	7.990	7.983	0.09
1 / 2	1	7.076	7.070	0.08	5.474	5.468	0.11	2.414	2.412	0.08
	2	15.32	15.30	0.13	6.867	6.860	0.10	4.581	4.575	0.13
	3	23.47	23.44	0.13	14.34	14.33	0.07	7.910	7.901	0.11
	4	24.74	24.71	0.12	21.89	21.86	0.14	8.580	8.574	0.07
2 / 3	1	7.775	7.768	0.09	6.028	6.021	0.12	2.415	2.412	0.12
	2	15.33	15.31	0.13	6.947	6.941	0.09	5.186	5.178	0.15
	3	24.93	24.90	0.12	15.27	15.25	0.13	7.926	7.918	0.10
	4	27.72	27.68	0.14	22.06	22.03	0.14	9.296	9.290	0.06
3 / 2	1	10.25	10.24	0.10	6.670	6.663	0.10	2.413	2.410	0.12
	2	15.36	15.35	0.07	8.628	8.618	0.12	7.330	7.319	0.15
	3	28.99	28.96	0.10	18.47	18.45	0.11	8.053	8.045	0.10
	4	39.87	39.81	0.15	22.09	22.07	0.09	11.89	11.88	0.08
2	1	11.34	11.33	0.09	6.692	6.685	0.10	2.412	2.409	0.12
	2	15.39	15.38	0.06	9.672	9.660	0.12	7.766	7.757	0.12
	3	30.71	30.69	0.07	19.84	19.83	0.05	8.867	8.655	2.39
	4	45.46	45.39	0.15	22.11	22.09	0.09	13.04	13.03	0.08
3	1	13.06	13.02	0.15	6.704	6.697	0.10	2.410	2.408	0.08
	2	15.53	15.52	0.06	11.44	11.42	0.17	7.840	7.832	0.10
	3	33.47	33.44	0.09	21.73	21.71	0.09	10.35	10.33	0.19
	4	49.57	49.52	0.10	22.48	22.46	0.09	14.93	14.91	0.13

Tabla 6: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i^* = \omega_i \left(a/2\right)^2 \sqrt{\rho h/D_1}$ de modos simétricos-antisimétricos con $\lambda \geq 1$, en una placa maciza ortótropa, libre de vinculación, para diferentes relaciones D_2/D_1 y diferentes valores de $\lambda = a/b$. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. $M = N = 30$



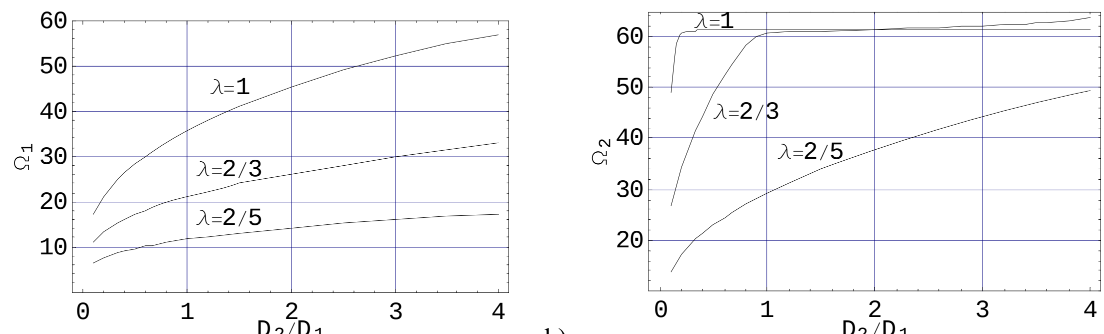
a) b)

Figura 4: Modos S-S : $\lambda \leq 1$ Primeros dos coeficientes de frecuencia $\Omega_i = \omega_i \, a^2 \sqrt{\rho h / D_1}$ en función de la relación D_2/D_1, en una placa maciza ortótropa, para diferentes relaciones de lado $\lambda = a/b$: a) Ω_1, b) Ω_2.



a) b)

Figura 5: Modos A-A : $\lambda \leq 1$ Primeros dos coeficientes de frecuencia $\Omega_i = \omega_i \, a^2 \sqrt{\rho h / D_1}$ en función de la relación D_2/D_1, en una placa maciza ortótropa, para diferentes relaciones de lado $\lambda = a/b$: a) Ω_1, b) Ω_2.



a) b)

Figura 6: Modos S-A $\lambda \leq 1$: Primeros dos coeficientes de frecuencia en función de la relación , en una placa maciza ortótropa, para diferentes relaciones de lado $\lambda = a/b$: a) Ω_1, b) Ω_2.

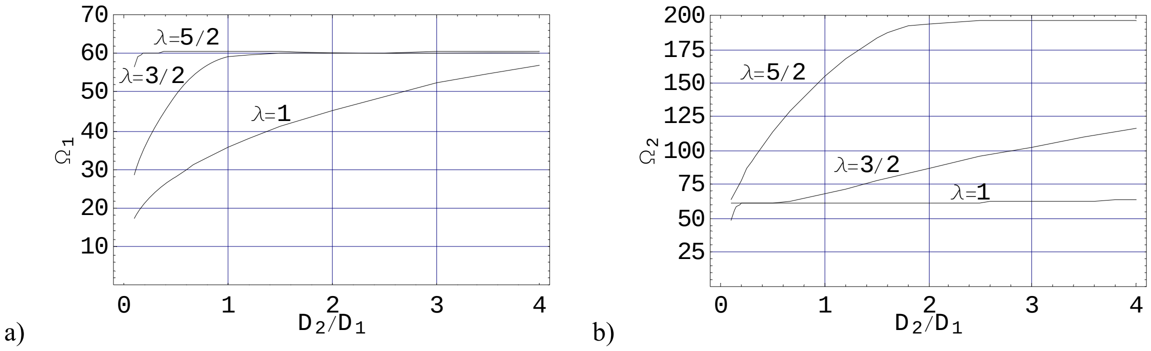


Figura 7: Modos S-A $\lambda \geq 1$: Primeros dos coeficientes de frecuencia $\Omega_i = \omega_i \, a^2 \sqrt{\rho\, h / D_1}$ en función de la relación D_2 / D_1, en una placa maciza ortótropa, para diferentes relaciones de lado $\lambda = a/b$: a) Ω_1, b) Ω_2.

4.3 Análisis de los coeficientes de vibración de la placa ortótropa, con un hueco central

En la segunda parte del trabajo se analizaron modelos de una placa ortótropa a la que se le ha practicado un orificio rectangular central, con la misma relación de lados λ que la placa, figura 1*b*.

Los coeficientes de frecuencia se calcularon utilizando dos métodos diferentes: En primer lugar se utilizó el método variacional de Rayleigh-Ritz[4], con el algoritmo propuesto, y en segundo lugar se implementó el método de elementos finitos[11]. Se modeló la placa cuadrada con una malla de 50×50 elementos, y la placa rectangular con una malla de 60×40 elementos, y en ambos casos se utilizaron elementos tipo placa de cuatro nodos.

Las tablas 7 a 10 muestran los resultados obtenidos para una placa ortótropa cuadrada, $\lambda = 1$, con tres diferentes tamaños del hueco central, $a_1/a = 0{,}20;\ 0{,}30 \text{ y } 0{,}40$. Cada una de las tablas mencionadas contiene resultados de modos de vibración clasificados de acuerdo a la simetría y antisimetría de la forma modal correspondientes .

Las tablas 11 a 14 muestran un ordenamiento similar para los coeficientes de frecuencia placas rectangulares con orificio central de relación de lados $\lambda = a/b = 1.5 = a_1/a$.

Comparado con el caso de placas macizas, se observa que la convergencia del método propuesto es más lenta cuando se consideran placas con huecos. Por ese motivo se utilizó una función aproximante de mayor cantidad de términos ($M \times N = 900$ términos).

Del análisis del modelo resuelto mediante elementos finitos, se sabe que los resultados son aproximados son necesariamente cota superior de los valores exactos, dadas las aproximaciones del algoritmo en cuestión. Comparando ambos grupos de resultados puede considerarse que los valores calculados por ambas metodologías, presentan entre sí una buena concordancia y resultan válidos para fines de aplicación práctica, o como valor de referencia.

Los modelos planteados también consideran el material isótropo $D_1/D_2 = 1$, como caso particular, permitiendo así realizar comparaciones con los que presentan ortotropía.

D_2/D_1	Modo	a_1/a					
		0.2		0.3		0.4	
		Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]
1/2	1	14.479	*14.416*	13.776	*13.721*	13.001	*12.947*
	2	21.195	*21.121*	20.474	*20.404*	20.155	*20.074*
	3	55.296	*55.144*	57.148	*57.000*	59.619	*59.375*
	4	85.058	*84.685*	85.132	*84.600*	81.248	*80.102*
1	1	19.135	*19.044*	18.038	*17.962*	16.790	*16.721*
	2	22.692	*22.621*	22.125	*22.053*	22.081	*21.992*
	3	65.484	*65.304*	67.863	*67.688*	71.234	*70.952*
	4	115.50	*115.02*	111.60	*110.73*	102.05	*100.35*
2	1	20.477	*20.388*	19.483	*19.404*	18.386	*18.310*
	2	29.974	*29.869*	28.954	*28.855*	28.504	*28.389*
	3	78.201	*77.985*	80.820	*80.610*	84.314	*83.968*
	4	120.29	*120.02*	120.39	*119.64*	114.90	*113.28*

Tabla 7: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_1}\, a^2 \omega_i$ de modos doblemente simétricos, en una placa ortótropa cuadrada, libre de vinculación y con un hueco centrado, para diferentes relaciones de ortotropía D_2/D_1 y distintas dimensiones de hueco a_1/a. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. $M = N = 30$.

D_2/D_1	Modo	a_1/a					
		0.2		0.3		0.4	
		Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]
1/2	1	31.932	*31.879*	31.565	*31.501*	30.733	*30.656*
	2	42.542	*42.335*	40.288	*39.971*	37.889	*37.534*
	3	85.337	*84.971*	84.308	*83.889*	85.556	*85.027*
	4	128.02	*127.47*	126.43	*125.89*	122.62	*121.76*
1	1	35.445	*35.395*	34.936	*34.862*	33.855	*33.761*
	2	59.637	*59.318*	55.893	*55.401*	52.181	*51.659*
	3	104.71	*104.19*	102.62	*102.04*	103.86	*103.19*
	4	131.75	*131.25*	130.25	*129.69*	126.96	*126.16*
2	1	39.773	*39.721*	39.062	*38.976*	37.606	*37.492*
	2	83.589	*83.096*	77.103	*76.312*	71.299	*70.512*
	3	129.86	*129.10*	126.62	*125.85*	127.77	*126.95*
	4	136.97	*136.48*	134.55	*133.98*	131.06	*130.33*

Tabla 8: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_1}\, a^2 \omega_i$ de modos simétrico-antisimétrico de una placa ortótropa cuadrada, libre de vinculación y con un hueco centrado, para diferentes relaciones de ortotropía D_2/D_1 y distintas dimensiones de hueco a_1/a. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. $M = N = 30$.

D_2/D_1	Modo	a_1/a					
		0.2		0.3		0.4	
		Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]
1/2	1	28.124	*28.087*	27.621	*27.560*	26.591	*26.511*
	2	59.106	*58.758*	54.520	*53.960*	50.416	*49.860*
	3	91.825	*91.288*	89.537	*88.991*	90.349	*89.766*
	4	96.855	*96.504*	95.143	*94.741*	92.678	*92.156*
1	1	35.445	*35.395*	34.936	*34.862*	33.855	*33.761*
	2	59.637	*59.318*	55.893	*55.401*	52.181	*51.659*
	3	104.71	*104.19*	102.62	*102.04*	103.86	*103.19*
	4	131.75	*131.25*	130.25	*129.69*	126.96	*126.16*
2	1	45.158	*45.084*	44.640	*44.550*	43.464	*43.355*
	2	60.163	*59.870*	56.976	*56.527*	53.583	*53.081*
	3	120.68	*119.76*	119.23	*118.64*	120.98	*120.25*
	4	181.05	*180.27*	178.79	*178.03*	173.41	*172.19*

Tabla 9: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_1}\, a^2 \omega_i$ de modos antisimétrico-simétrico de una placa ortótropa cuadrada, libre de vinculación y con un hueco centrado, para diferentes relaciones de ortotropía D_2/D_1 y distintas dimensiones de hueco a_1/a. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. $M = N = 30$.

D_2/D_1	Modo	a_1/a					
		0.2		0.3		0.4	
		Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]
1/2	1	11.226	*11.216*	10.679	*10.668*	9.9683	*9.9565*
	2	54.797	*54.608*	54.092	*53.934*	53.203	*53.017*
	3	70.109	*69.857*	69.015	*68.790*	67.784	*67.515*
	4	128.55	*128.20*	126.64	*126.26*	128.62	*128.07*
1	1	13.369	*13.356*	12.723	*12.710*	11.883	*11.869*
	2	70.968	*70.681*	70.771	*70.533*	69.984	*69.699*
	3	75.577	*75.349*	73.684	*73.476*	72.035	*71.790*
	4	151.48	*151.08*	149.40	*148.96*	152.03	*151.40*
2	1	15.877	*15.862*	15.102	*15.087*	14.097	*14.081*
	2	77.495	*77.228*	76.498	*76.275*	75.241	*74.977*
	3	99.149	*98.793*	97.602	*97.283*	95.862	*95.481*
	4	181.80	*181.31*	179.10	*178.56*	181.89	*181.12*

Tabla 10: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_1}\, a^2 \omega_i$ de modos antisimétrico-antisimétrico de una placa ortótropa cuadrada, libre de vinculación y con un hueco centrado, para diferentes relaciones de ortotropía D_2/D_1 y distintas dimensiones de hueco a_1/a. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. $M = N = 30$.

D_2/D_1	Modo	a_1/a					
		0.2		0.3		0.4	
		Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]
1/2	1	20.591	*20.509*	19.629	*19.552*	18.586	*18.516*
	2	33.521	*33.381*	32.316	*32.173*	31.708	*31.556*
	3	83.216	*82.958*	85.793	*85.489*	89.001	*88.603*
	4	120.51	*120.09*	121.46	*120.73*	117.88	*116.34*
1	1	20.766	*20.686*	19.861	*19.784*	18.896	*18.824*
	2	46.912	*46.706*	45.069	*44.861*	44.006	*43.789*
	3	100.25	*99.920*	101.69	*101.33*	101.98	*101.43*
	4	121.29	*120.87*	124.80	*124.11*	127.73	*126.44*
2	1	20.859	*20.778*	19.986	*19.908*	19.049	*18.976*
	2	65.808	*65.509*	63.066	*62.766*	61.444	*61.135*
	3	116.09	*115.71*	114.14	*113.70*	110.21	*109.48*
	4	128.32	*127.85*	135.92	*135.24*	145.61	*144.50*

Tabla 11: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_1}\, a^2\, \omega_i$ de modos doblemente simétricos, de una placa ortótropa rectangular ($\lambda = 1.5$), libre de vinculación y con un hueco centrado, para diferentes relaciones de ortotropía D_2/D_1 y distintas dimensiones de hueco a_1/a. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. M=N=30.

D_2/D_1	Modo	a_1/a					
		0.2		0.3		0.4	
		Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]
1/2	1	41.467	*41.420*	40.669	*40.572*	39.048	*38.934*
	2	93.662	*92.999*	85.758	*84.724*	78.992	*77.972*
	3	137.04	*136.45*	135.52	*134.83*	132.74	*132.12*
	4	142.32	*141.57*	137.38	*136.47*	137.65	*136.61*
1	1	47.189	*47.133*	46.059	*45.941*	43.814	*43.668*
	2	129.46	*128.42*	115.16	*113.44*	104.80	*103.23*
	3	146.21	*145.76*	143.63	*143.13*	139.44	*138.89*
	4	179.35	*178.00*	173.03	*171.68*	174.01	*172.76*
2	1	54.135	*54.072*	52.524	*52.373*	49.371	*49.181*
	2	151.87	*151.34*	141.52	*139.71*	130.69	*128.78*
	3	182.93	*181.23*	163.40	*161.98*	153.72	*152.87*
	4	230.99	*229.14*	224.53	*222.93*	225.76	*224.26*

Tabla 12: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_1}\, a^2\, \omega_i$ de modos simétrico-antisimétrico, de una placa ortótropa rectangular ($\lambda = 1.5$), libre de vinculación y con un hueco centrado, para diferentes relaciones de ortotropía D_2/D_1 y distintas dimensiones de hueco a_1/a. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. M=N=30.

D_2/D_1	Modo	a_1/a					
		0.2		0.3		0.4	
		Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]
1/2	1	49.078	*48.962*	48.547	*48.402*	47.291	*47.149*
	2	60.465	*60.212*	57.429	*57.006*	54.165	*53.699*
	3	127.04	*126.51*	125.81	*125.16*	127.70	*126.95*
	4	193.20	*191.98*	192.52	*191.49*	189.58	*188.09*
1	1	58.403	*58.154*	56.544	*56.210*	53.797	*53.426*
	2	66.489	*66.314*	65.073	*64.807*	63.374	*63.090*
	3	149.09	*148.53*	148.43	*147.75*	150.07	*149.24*
	4	194.71	*193.49*	195.77	*194.69*	204.38	*203.24*
2	1	59.508	*59.249*	57.498	*57.143*	54.759	*54.362*
	2	86.552	*86.301*	85.434	*85.129*	83.685	*83.360*
	3	177.26	*176.71*	176.44	*175.79*	174.56	*173.70*
	4	195.45	*194.21*	196.94	*195.78*	211.33	*210.16*

Tabla 13: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_1}\ a^2\, \omega_i$ de modos antisimétrico-simétrico, de una placa ortótropa rectangular ($\lambda = 1.5$), libre de vinculación y con un hueco centrado, para diferentes relaciones de ortotropía D_2/D_1 y distintas dimensiones de hueco a_1/a. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. M=N=30.

D_2/D_1	Modo	a_1/a					
		0.2		0.3		0.4	
		Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]	Presente Estudio	Elementos Finitos [11]
1/2	1	16.822	*16.805*	15.996	*15.978*	14.924	*14.905*
	2	79.441	*79.204*	78.333	*78.104*	77.003	*76.776*
	3	109.92	*109.41*	108.28	*107.75*	106.34	*105.80*
	4	194.23	*193.62*	191.19	*190.45*	193.81	*192.86*
1	1	19.915	*18.894*	18.906	*18.884*	17.602	*17.579*
	2	86.158	*85.921*	84.738	*84.508*	83.145	*82.917*
	3	150.04	*149.29*	147.86	*147.09*	145.07	*144.25*
	4	222.61	*221.62*	221.01	*220.06*	217.50	*216.45*
2	1	23.542	*23.517*	22.300	*22.273*	20.701	*20.674*
	2	94.741	*94.496*	92.951	*92.714*	90.960	*90.720*
	3	205.45	*204.32*	201.95	*200.76*	197.81	*196.51*
	4	233.63	*232.70*	231.73	*230.85*	226.70	*225.74*

Tabla 14: Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural $\Omega_i = \sqrt{\rho h / D_1}\ a^2\, \omega_i$ de modos antisimétrico-antisimétrico, de una placa ortótropa rectangular ($\lambda = 1.5$), libre de vinculación y con un hueco centrado, para diferentes relaciones de ortotropía D_2/D_1 y distintas dimensiones de hueco a_1/a. Con $\sqrt{\nu_1 \nu_2} = 0.25$. M=N=30.

5 CONCLUSIONES

En la primer parte del trabajo, en que se analizó la placa maciza ortótropa, comparándose luego los resultados calculados con los valores exactos obtenidos por D. J. Gorman[2], puede concluirse que, resulta alentador el alto grado de precisión obtenido con el algoritmo propuesto, teniendo en cuenta que se trata de una metodología aproximada que no requiere satisfacer las condiciones de borde naturales en el borde libre.

En la segunda parte del trabajo en que se consideró la placa con un hueco centrado, el grado de precisión se reduce tal como era de esperar. En este caso puede observarse que mientras los valores obtenidos con elementos finitos se incrementan al aumentar el número de elementos de la malla utilizada, ocurre lo contrario con los valores obtenidos con Rayleigh-Ritz, que al ser cota superior de los valores exactos, disminuyen al incrementar el número de términos del algoritmo. De este modo, y para los modelos analizados, la diferencia en los resultados que arrojan ambas metodologías disminuye conforme se incrementa la precisión de ambas.

6 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue financiado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología (SGCyT) de la Universidad Nacional del Sur y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

7 REFERENCIAS

1. A. W. Leissa, *Vibration of Plates*. NASA S.P. 160, (1969).
2. D. J. Gorman, Accurate free vibration analysis of the completely free orthotropic rectangular plate by the method of superposition, *Journal of Sound and Vibration,* **165**(3), 409-420, (1993).
3. S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publishers, (1968).
4. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*. Segunda edición, Vol. 1 Mac Millan, London (1894), Sec 88 (Re-Edición por Dover, New York, (1945).
5. W. Ritz, Theorie der Transversalschwingungen, einer quadratischen Platte mit freien Rändern. *Ann. Physik*, Bd. 28, pp. 737-786, (1909).
6. D. Young, R. P. Felgar Jr., Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam*, The University of Texas Publication*, Nº 4913, (1949).
7. D. Young, Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method*, Journal of Applied Mechanics,* 17, pp. 448-453, (1950).
8. T. K. Ooi, J. A. Gilbert, M. V. Bower, R. E. Vaughan and R. C. Engberg. Modal analysis of lightweight graphite reinforced silica/polymer matrix composite plates. *An International Journal of Experimental Mechanics*. Vol. **45** Num.3, 221-225, (2005).

9. D. J. Gorman, Free vibration analysis of completely free rectangular plates by the method of superposition-Galerkin method, *Journal of Sound and Vibration,* **237**(5), 901-914, (2000).
10. A. W. Leissa, The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), 257-293, (1973).
11. ALGOR inc., *Linear Stress and Vibration Analysis Processor Reference Manual*. Part Nº 6.000.501, Revision 5.00, Pittsburgh, PA, USA, (1999).