

CAMPO DE VALIDEZ DE DIFERENTES TEORIAS EN EL ANALISIS DINAMICO DE VIGAS INCLUYENDO GRANDES DESPLAZAMIENTOS

Oscar Müller, Marcelo Rubinstein
Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Facultad de
Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario,
Ricamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina.

RESUMEN

Se analiza el campo de validez de las teorías de pequeños desplazamientos y de cables frente a la teoría "exacta" de no linealidad geométrica con grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones.

La discusión se realiza a través de la función flecha-espesor vs. carga última en una viga simple con cargas estáticas y dinámicas aplicadas súbitamente, obteniéndose resultados de aplicación práctica.

ABSTRACT

The range of validity of infinitesimal displacement and cable theories are investigated with regard to the "exact" theory of geometric nonlinear analysis with large displacements but small strains.

The discussion is carried out through the ratio central displacement-thickness vs. ultimate load for a simple beam with static and suddenly applied dynamic loads. Practical results are obtained.

INTRODUCCION

En general cuando una barra esbelta, de material elástico, es sometida a cargas transversales, en la respuesta coexisten curvaturas y momentos flectores vinculados por la rigidez a flexión, con deformaciones axiales y esfuerzos normales vinculados por la rigidez axial.

Mientras los desplazamientos permanecen por debajo de ciertos límites, los efectos de flexión prevalecen sobre los axiales e inversamente cuando se hacen suficientemente importantes.

En el primer caso la respuesta puede ser calculada con la teoría de la elasticidad para deformaciones infinitesimales aplicada a barras, conocida como teoría técnica de flexión de vigas.

En el segundo caso el problema exige reconocer grandes desplazamientos, es decir no linealidad geométrica, pero podrá simplificarse despreciando la rigidez a flexión y en consecuencia resulta aplicable la teoría de cables.

Para situaciones comprendidas entre las anteriores se deberán tener en cuenta grandes desplazamientos y efectos de flexión y axiales acoplados, siendo necesario aplicar un método de análisis general. El método utilizado corresponde a una formulación Lagrangeana actualizada expresada en elementos finitos y aplicada a estructuras aporticadas planas, de material linealmente elástico, con grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones, bajo la acción de cargas estáticas o dinámicas.

La resolución numérica se efectúa planteando un proceso incremental-iterativo con aplicación del método de integración directa de Newmark para el problema dinámico, y del

método de Newton-Rachson modificado para el problema no lineal [1].

Resulta de interés práctico investigar sobre los límites de aplicabilidad de las teorías simplificadas, tratando de asociarlos con determinados valores de algún parámetro adimensional, por ejemplo la relación flecha-espesor.

METODO DE ANALISIS

La ecuación de equilibrio dinámico puede expresarse a partir del principio de los desplazamientos virtuales. Utilizando la formulación Lagrangeana actualizada, y luego de realizar una descomposición incremental necesaria para la solución del problema dinámico, y de linealizar la ecuación de movimiento se llega a [1]

$$\int_V C_{ijrs} \epsilon_{rs} \delta \epsilon_{ij} \, t dV + \int_V \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} \, t dV = t+\Delta t R - \int_V \rho \, t+\Delta t \ddot{u}_i \delta u_i \, t dV - \int_V \mu \, t+\Delta t \dot{u}_i \delta u_i \, t dV - \int_V \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} \, t dV \quad (1)$$

en la cual:

$$t+\Delta t \epsilon_{ij} = t \epsilon_{ij} + t \delta \epsilon_{ij} = \tau_{ij} + t \delta \epsilon_{ij} \quad , \quad t+\Delta t \epsilon_{ij} = t \epsilon_{ij} = t \epsilon_{ij} + t \delta \epsilon_{ij}$$

$$\text{con: } t \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (t u_{ij} + t u_{ji}) \quad , \quad t \tau_{ij} = \frac{1}{2} t u_{ki} t u_{kj}$$

$$t \delta \epsilon_{ij} = t C_{ijrs} t \epsilon_{rs} \approx t C_{ijrs} t \epsilon_{rs} \quad , \quad t \delta \epsilon_{ij} \approx t \delta \epsilon_{ij}$$

donde $t+\Delta t \epsilon_{ij}$ son las componentes cartesianas del 2^{do} tensor de Piola-Kirchhoff y $t+\Delta t \epsilon_{ij}$ son las componentes cartesianas del tensor de deformaciones de Green-Lagrange. τ_{ij} son las componentes cartesianas del tensor de tensiones de Cauchy. $t+\Delta t R$ es el trabajo virtual de las cargas externas. ρ es la densidad de masa. $t+\Delta t \ddot{u}_i$ son las componentes cartesianas de la aceleración. μ es un parámetro de amortiguamiento, y $t+\Delta t \dot{u}_i$ son las componentes cartesianas de la velocidad.

El superíndice izquierdo indica el instante en que se evalúa, cuando no se escribe significa que es un incremento de t a $t+\Delta t$. El subíndice izquierdo indica la configuración de referencia, cuando no se escribe significa que es igual al superíndice.

Para resolver la ecuación (1) se introduce la técnica del método de elementos finitos. En este trabajo se utilizará el elemento de barra mostrado en la fig.1. Allí se representa al elemento en sus posiciones extremas correspondientes a un intervalo incremental genérico, entre los instantes t y $t+\Delta t$, y en su configuración inicial, referido a los respectivos sistemas de coordenadas locales y al sistema de referencia global estacionario.

El vector de incrementos de desplazamientos nodales se escribe:

$$\delta \vec{u}^T = (u_1^i, u_2^i, \theta^i, u_1^j, u_2^j, \theta^j) \quad (2)$$

a partir de los cuales se calculan los siguientes desplazamientos generalizados actualizados

$$\begin{aligned} t+\Delta t u_1^j &= t u_1^j + u_1^j \\ t+\Delta t u_2^j &= t u_2^j + u_2^j \\ t+\Delta t \theta^j &= t \theta^j + \phi \end{aligned} \quad j = 1, 2 \quad (3)$$

donde ϕ es el incremento de giro de cuerda de la barra.

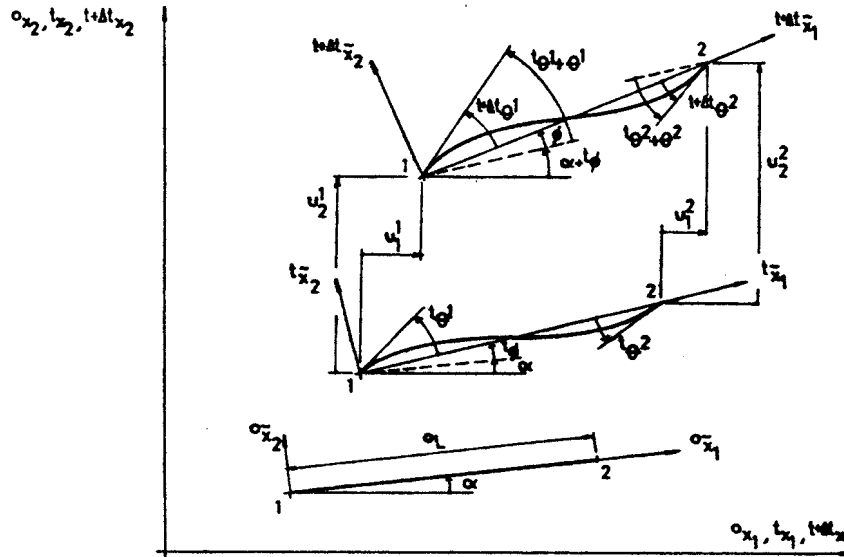


Figura 1: Elemento de barra y sistemas de referencias.

El campo de desplazamientos del elemento supuesto sin cargas en el tramo y referido al sistema de coordenadas locales es:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} = \bar{H} \hat{u} \quad (4)$$

contiene los incrementos de desplazamientos de un punto genérico de la barra en dirección axial y transversal.

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & h_3 & 0 & h_5 & h_6 \end{bmatrix} \quad (5)$$

es la matriz de las funciones de formas, donde se ha supuesto variación lineal y cúbica para los desplazamientos axiales y transversales.

$$\hat{u} = {}^tT \hat{U} \quad (6)$$

son los incrementos de desplazamientos nodales expresados en las coordenadas locales del tiempo \$t\$, y \${}^tT\$ es la matriz de rotación en función del ángulo \$\alpha + \phi\$.

En el elemento de barra se trabaja con resultantes de tensiones y desplazamientos generalizados, obteniéndose la siguiente relación constitutiva entre sus incrementos:

$$\begin{pmatrix} {}^t\bar{N} \\ {}^t\bar{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} EA & \\ & EI \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\bar{u}_{1,t} \\ {}^t\bar{u}_{2,t} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} {}^t\bar{u}_{1,t} \\ {}^t\bar{u}_{2,t} \end{pmatrix} \quad (7)$$

No se han tenido en cuenta deformaciones por corte, luego el incremento de esfuerzo de corte \${}^t\bar{Q}\$ se obtiene por equilibrio del elemento

Se analizan ahora los términos de la ecuación (1)

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int_V C_{ijrs} \epsilon_{rs} \delta_i \epsilon_{ij} \, t dV &= \int_0^{t_1} EA \, {}_t \bar{U}_{1,1} \delta_i \bar{U}_{1,1} \, t d\bar{x}_1 + \int_0^{t_1} EI \, {}_t \bar{U}_{2,1,1} \delta_i \bar{U}_{2,1,1} \, t d\bar{x}_1 \\
 &= \delta \hat{U}^T \left[\int_0^{t_1} \begin{matrix} {}_t \bar{B}_L^T C \, {}_t \bar{B}_L \, t d\bar{x}_1 \end{matrix} \right] \hat{U} = \delta \hat{U}^T \, {}_t \bar{K}_L \, \hat{U}
 \end{aligned} \tag{8}$$

donde ${}^t \bar{B}_L$ es la matriz de deformación lineal referida a la configuración t y al sistema local de coordenadas actualizadas, C es la matriz constitutiva incremental, constante en este análisis.

$${}^t \bar{B}_L = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & h_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{2,1,1} & h_{3,1,1} & 0 & h_{4,1,1} & h_{5,1,1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\text{con } h_{i,j} = \frac{d\eta_i}{d\bar{x}_j} \quad , \quad h_{i,j,j} = \frac{d^2 \eta_i}{d\bar{x}_j^2}$$

Luego de las integraciones se obtiene la matriz de rigidez lineal ${}^t \bar{K}_L$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int_V t_{ij} \delta_i \eta_{ij} \, t dV &= \int_V (t_{r11} \delta_i \eta_{1,1} + t_{r12} \delta_i \eta_{1,2}) \, t dV \\
 &= \int_0^{t_1} \frac{t_{r1}}{2} \delta_i ({}^t \bar{U}_{1,1})^2 \, t d\bar{x}_1 + \int_0^{t_1} \frac{t_{r2}}{2} \delta_i ({}^t \bar{U}_{2,1})^2 \, t d\bar{x}_1 + \int_0^{t_1} t_{r3} \delta_i ({}^t \bar{U}_{1,1} \, {}^t \bar{U}_{2,1}) \, t d\bar{x}_1 \\
 &= \delta \hat{U}^T \left[\int_0^{t_1} \begin{matrix} {}_t \bar{B}_{NL}^T \, {}^t \bar{F} \, {}_t \bar{B}_{NL} \, t d\bar{x}_1 \end{matrix} \right] \hat{U} = \delta \hat{U}^T \, {}_t \bar{K}_{NL} \, \hat{U}
 \end{aligned} \tag{10}$$

donde ${}^t \bar{B}_{NL}$ es la matriz de deformación no lineal y ${}^t \bar{F}$ es la matriz de esfuerzos internos en el tiempo t , ambas referidas a la configuración t y al sistema de coordenadas locales actualizadas

$${}^t \bar{B}_{NL} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & h_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{2,1} & h_{3,1} & 0 & h_{4,1} & h_{5,1} \\ h_{1,1} & 0 & 0 & h_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{2,1} & h_{3,1} & 0 & h_{4,1} & h_{5,1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$${}^t \bar{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}^t \bar{\epsilon}^t & & & & & \\ & \bar{\sigma}^t \bar{\epsilon}^t & & & & \\ & & \bar{\sigma}^t \bar{\epsilon}^t & & & \\ & & & \bar{\sigma}^t \bar{\epsilon}^t & & \\ & & & & \bar{\sigma}^t \bar{\epsilon}^t & \\ & & & & & \bar{\sigma}^t \bar{\epsilon}^t \end{bmatrix} \tag{12}$$

Luego de las integraciones se obtiene la matriz de rigidez no lineal o matriz de tensiones iniciales ${}^t\mathbf{K}_{NL}$.

$$c) \int_{V_0} {}^t\tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} {}^t dV = \delta \mathbf{U}^T {}^t\mathbf{F} \quad (13)$$

donde ${}^t\mathbf{F}$ es el vector de las fuerzas en extremos del elemento en el tiempo t

$${}^t\mathbf{F}^T = ({}^tN^1, {}^tQ^1, {}^tM^1, {}^tN^2, {}^tQ^2, {}^tM^2) \quad (14)$$

Las fuerzas en extremos de barra se van actualizando en cada paso incremental:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F} + {}^t\hat{\mathbf{F}} \quad (15)$$

El incremento de fuerzas ${}^t\hat{\mathbf{F}}$ se calcula a partir del incremento de desplazamientos $\hat{\mathbf{U}}$. En lugar de utilizar la relación (7) donde se han linealizado las deformaciones, una mejor aproximación para tener en cuenta el acoplamiento entre desplazamientos axiales y transversales es:

$$\begin{aligned} {}^t\hat{N} &= EA \hat{\epsilon}_{11} = EA \left(\hat{u}_{1,1} + \frac{1}{2} (\hat{u}_{2,1})^2 \right) = EA \frac{{}^{t+\Delta t}u_1 - u_1}{L} \\ {}^t\hat{M} &= EI \hat{\epsilon}_{2,11} = EI \left(\left(\frac{\hat{u}_2}{L^2} \hat{x}_1 - \frac{\hat{\theta}}{L} \right) \theta^1 + \left(\frac{\hat{u}_2}{L^2} \hat{x}_1 - \frac{\hat{\theta}}{L} \right) \theta^2 \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Resulta finalmente:

$$\begin{aligned} -{}^t\hat{N}^1 &= {}^t\hat{N}^2 = EA \frac{{}^{t+\Delta t}u_1 - u_1}{L}, \quad {}^t\hat{M}^1 = \frac{2EI}{L} (2\theta^1 + \theta^2), \quad {}^t\hat{M}^2 = \frac{2EI}{L} (\theta^1 + 2\theta^2) \\ {}^t\hat{Q}^1 &= -{}^t\hat{Q}^2 = \frac{{}^t\hat{M}^1 + {}^t\hat{M}^2}{L} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} d) \int_{V_0} {}^t\sigma_{ij} \delta u_{ij} {}^t dV &= \delta \mathbf{U}^T \left[\int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} {}^t d\alpha_1 + \rho \int_0^L \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 {}^t d\alpha_1 \right] {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}} \\ &= \delta \mathbf{U}^T {}^t\mathbf{M} \quad {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (18)$$

donde en la matriz de masa ${}^t\mathbf{M}$ se tienen en cuenta las fuerzas de inercia debidas a la traslación y a la rotación t de la sección, y

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{2,1} & h_{3,1} & 0 & h_{6,1} & h_{7,1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$e) \int_{V_0} {}^t\tau_{ij} \delta u_{ij} {}^t dV = \delta \mathbf{U}^T {}^t\mathbf{C} \quad {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}} \quad (20)$$

donde la matriz de amortiguamiento ${}^t\mathbf{C}$ se expresa como combinación lineal de las matrices de masa y rigidez.

Entonces la expresión (1) para un elemento generico, expresada en el sistema de coordenadas locales actualizadas al instante t resulta:

$$\left({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL} \right) \hat{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{M} \quad {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}} - {}^t\mathbf{C} \quad {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}} - {}^t\mathbf{F} \quad (21)$$

Los cálculos correspondientes al paso incremental genérico entre los instantes t y $t+\Delta t$ se inician transformando las matrices y vectores de cada elemento de coordenadas locales ${}^t x_i$ a globales ${}^t x_j$ mediante la matriz de rotación ${}^t T$ en función del ángulo $\alpha+t\phi$.

La matriz ${}^t K_{NL}$ en coordenadas actualizadas es igual a la matriz ${}^t K_{NL}$ en coordenadas globales y en consecuencia no es necesario proceder a su rotación [1].

Luego se procede al ensamble, y sobre la expresión resultante se aplica el algoritmo de Newmark de integración directa y el esquema iterativo de Newton Raphson modificado en cada paso:

$${}^t_M {}^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(i)} - {}^t_C {}^{t+\Delta t} \dot{U}^{(i)} + ({}^t K_L + {}^t K_{NL}) M U^{(i)} = {}^{t+\Delta t} R - \frac{{}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}}{{}^{t+\Delta t}} \quad (22)$$

En cada incremento o paso de tiempo t , $t+\Delta t$, las iteraciones de equilibrio (i) continúan hasta que se satisfagan los siguientes criterios de convergencia [1]:

$$\frac{\left| \begin{matrix} {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} - {}^t_M {}^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(i-1)} - {}^t_C {}^{t+\Delta t} \dot{U}^{(i-1)} \end{matrix} \right|_2}{\left| \begin{matrix} {}^{t+\Delta t} R - {}^t F - {}^t_M \ddot{U} - {}^t_C \dot{U} \end{matrix} \right|_2} \leq RTOL$$

$$\frac{M U^{(i)T} \left(\begin{matrix} {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} - {}^t_M {}^{t+\Delta t} \ddot{U}^{(i-1)} - {}^t_C {}^{t+\Delta t} \dot{U}^{(i-1)} \end{matrix} \right)}{M U^{(i)T} \left(\begin{matrix} {}^{t+\Delta t} R - {}^t F - {}^t_M \ddot{U} - {}^t_C \dot{U} \end{matrix} \right)} \leq ETOL \quad (23)$$

donde se ha tomado $RTOL = 10^{-2}$, $ETOL = 10^{-3}$

DISCUSION DEL CAMPO DE VALIDEZ DE LAS TEORIAS

Con el objetivo expuesto se considera el caso básico de la barra recta con apoyos fijos articulados en sus extremos, de material elástico lineal con límite de fluencia definido, con carga transversal uniforme.

Para determinados valores de la luz y de la sección transversal se calcula, aplicando cada una de las teorías mencionadas, la carga que provoca la tensión de fluencia en la fibra más exigida, y la flecha correspondiente.

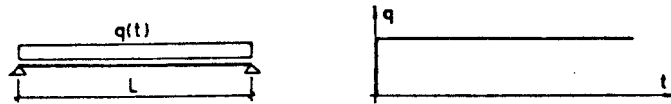
De este modo variando únicamente el espesor se puede representar la carga vs. la relación flecha-espesor, para cada teoría. Esta operación se ha realizado para dos valores significativamente disímiles de la luz, obteniéndose un buen acuerdo entre los resultados en el intervalo en el que existe superposición.

Se consideraron dos formas de aplicación de la carga, estática y dinámica, por aplicación súbita del total de la carga o incorporación de la misma como masa activa.

Los resultados fueron obtenidos aplicando, para todos los casos, el método de análisis general expuesto en el apartado anterior, implementado en un código de computación verificado con ejemplos publicados [2], [3].

La respuesta correspondiente a la teoría de flexión de vigas se obtiene cancelando la actualización de coordenadas y la formación de la matriz de rigidez no lineal, y la correspondiente a la teoría de cables, anulando la rigidez a flexión.

Como observación interesante cabe señalar que para carga estática la convergencia mejoró sensiblemente simulando un comportamiento dinámico con carga súbita y amortiguamiento crítico.



MATERIAL : ACERO $E=210000 \text{ MPa}$ $G_R=240 \text{ MPa}$

RELACION DE AMORTIGUAMIENTO : $\xi=0.05$

LUZ : $L=500 \text{ cm}$, 50 cm

SECCION TRANSVERSAL :

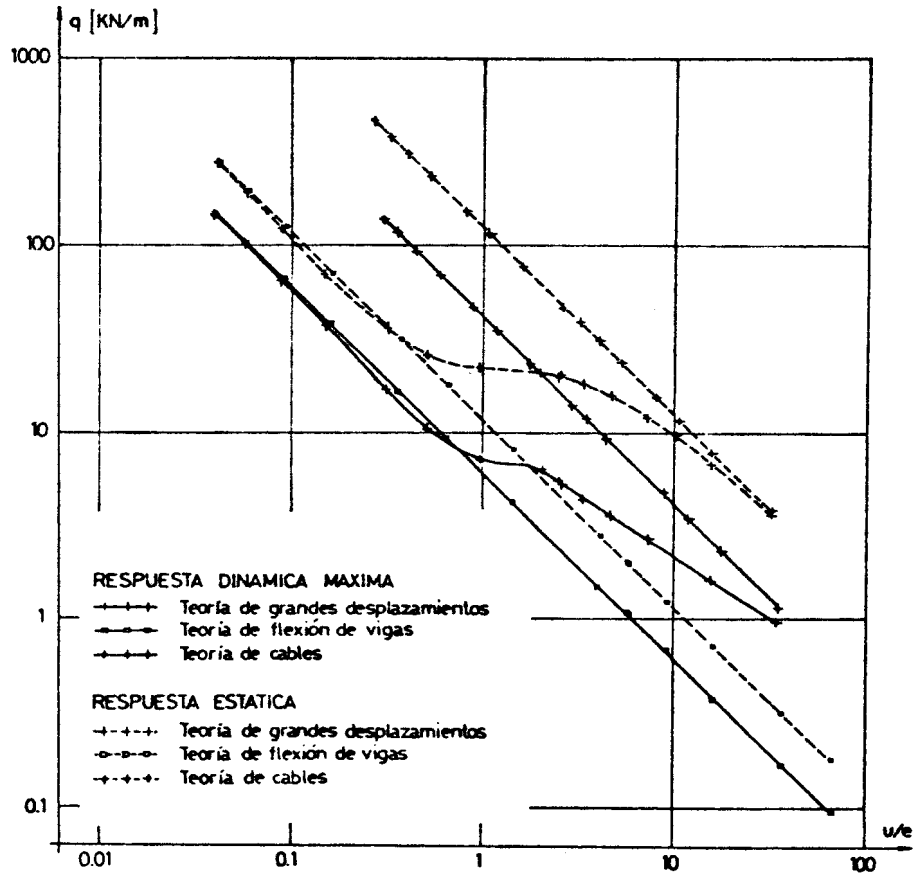
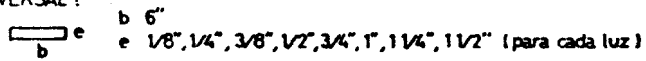


Figura 2: Carga que provoca la tensión de fluencia vs. relación flecha-espesor

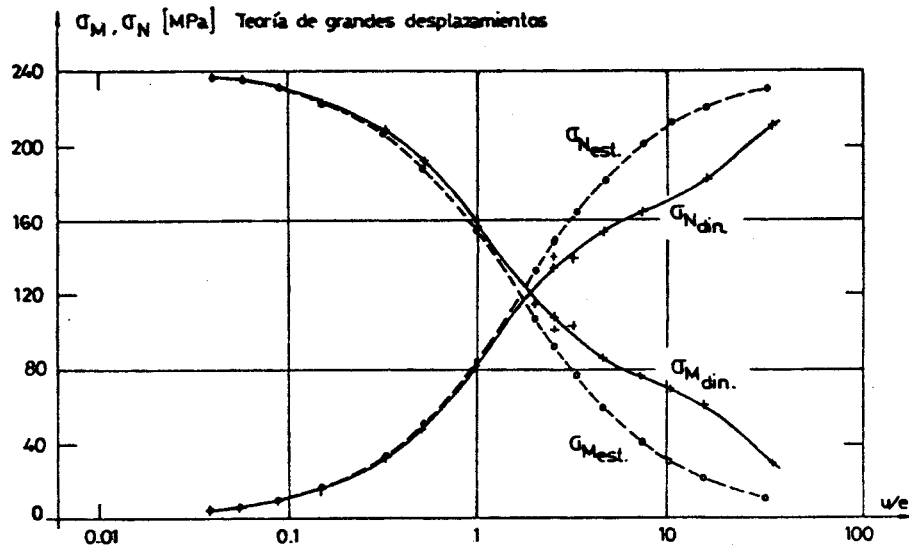


Figura 3: Componentes de la tensión normal máxima vs. relación flecha-espesor

Los datos y resultados se muestran en las figuras 2 y 3. En la fig.2 se representa la carga que provoca la tensión de fluencia vs. la relación flecha-espesor, para la respuesta estática y máxima respuesta dinámica de cada una de las teorías analizadas. En la fig.3 se representan las componentes de la tensión normal máxima, de la teoría de grandes desplazamientos, correspondientes al esfuerzo normal y al momento flector, cuya suma es la tensión de fluencia, vs. la relación flecha-espesor.

Definiendo como carga exacta a la correspondiente a la teoría de grandes desplazamientos, para el caso estático se observa que el error relativo de la teoría de flexión de vigas se encuentra acotado entre $\pm 10\%$ hasta una relación flecha-espesor $w/e=0.5$ y luego crece rápidamente.

Los resultados de la teoría de cables comienzan a aproximarse a los exactos para una relación $w/e=20$ (error relativo 11.6%) y a partir de $w/e=30$ el error relativo resulta inferior a 7.5%.

Para el caso de la respuesta máxima con carga dinámica el error relativo de la teoría de flexión de vigas es inferior al 10% hasta una relación $w/e=0.2$, y entre este valor y $w/e=1$ está aproximadamente acotado entre $\pm 15\%$.

Los resultados de la teoría de cables se acercan a los exactos en forma notoriamente más lenta que para el caso estático y para la máxima relación analizada $w/e=35$, el error relativo es 23%.

En términos de tensiones puede definirse como error relativo para la teoría de flexión de vigas al cociente entre la tensión de fluencia y la componente de flexión de la teoría de grandes desplazamientos, y para la teoría de cables al cociente entre la tensión de fluencia y la componente debida al esfuerzo axial de la teoría de grandes desplazamientos.

Así de acuerdo con la fig.3 resulta que para ambos casos, estático y dinámico, para acotar el error relativo de la teoría de flexión de vigas en 10%, la relación w/e no debe superar el valor 0.2.

Para la teoría de cables en el caso estático el error se encuentra por debajo del 10% a partir de $w/e=14$, y para el caso dinámico para la máxima relación analizada $w/e=35$, el error relativo es igual al 14%.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados del caso básico tratado surgen las siguientes conclusiones:

Para ambos casos, estático y dinámico, los resultados de la teoría de flexión de vigas pueden ser utilizados hasta una relación flecha-espesor $w/e=0.20$. Esto está aproximadamente de acuerdo con lo indicado en [5] para la aplicación de la teoría de placas delgadas con flechas pequeñas, con cargas estáticas.

Los resultados de la teoría de cables para el caso estático son aplicables a partir de $w/e=20$, y para el caso dinámico hasta $w/e=35$, máxima relación analizada, no llegaron a ser admisibles.

Estas conclusiones deberán ser confrontadas con los resultados de otros ejemplos como el de la barra biarticulada con carga concentrada o el caso de la barra empotrada en sus extremos con carga uniforme o concentrada.

La incorporación de la no linealidad física en la teoría "exacta" permitirá ampliar el espectro de problemas correspondientes a esta discusión.

REFERENCIAS

1. Bathe, K-J., "Finite Element Procedure in Engineering Analysis", Prentice Hall, 1982.
2. Hsiao, K-M, Jang, J-Y, "Nonlinear Dynamic Analysis of Elastic Frames", Comp. & Struc., Vol. 33, N° 4, págs. 1057-1063, 1989.
3. Wong, M.B., Tin-Loi, F., "Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures", Comp. & Struc., Vol. 34, N° 4, págs. 633-640, 1990.
4. Yang, Y-B, McGuire, W., "Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis", J. Struc. Eng., ASCE, Vol. 112, N° 4, págs. 853-877, 1986.
5. Barés, R., "Tablas para el Cálculo de Placas y Vigas Pared", G. Gili, 1970.

