

APLICACION del METODO de LAGRANGE a la SOLUCION NUMERICA  
de un FLUJO LAMINAR TRANSVERSAL a un CILINDRO INFINITO.

Norberto E. Molina, Departamento de Engenharia Mecânica III  
Pontificia Universidade Católica Rio de Janeiro (PUC RJ)  
Rua Marques de São Vicente 225, (22453) R. J., Brasil.  
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur  
Avda. Alem 1258, (8000) Bahía Blanca, B. As., Rep. Argentina.

RESUMEN

Este trabajo tiene por objeto simular en forma numérica el flujo externo de una corriente laminar incompresible, en régimen permanente para bajos números de Reynolds alrededor de un cuerpo sólido de sección cilíndrica.

La solución del problema, es obtenida al resolver las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento bidimensionales.

El método numérico escogido para resolver el acoplamiento entre la presión y la velocidad juntamente con las ecuaciones no lineales de conservación, es una combinación del método transiente de las características y el de los volúmenes finitos. Se adoptó el sistema de coordenadas curvilíneas para que de ésta forma, la malla, se adapte a la geometría del cuerpo. La malla se definió a partir de la solución potencial alrededor de un cilindro.

Una vez que se alcanzó el régimen permanente de la corriente, son analizados el campo de velocidades, la distribución de presiones y la tensión de corte. Posteriormente se calcula el coeficiente de resistencia debido a la presión dinámica y a la tensión de origen viscoso generado entre el fluido y la pared sólida del cuerpo.

Los resultados locales y valores medios se comparan con los resultados disponibles, obtenidos estos, en forma tanto experimental como numérica; lograndose una buena concordancia entre los ensaos.

ABSTRACT

This work intends to give numerical simulation of the external flow of incompressible laminar stream at permanent stage to low Reynolds number around a cylindrical body. The solution to the present problem is obtained by means of the resolution of the equations of mass and momentum conservation. The presented numerical method to solved the

couple velocity-pressure and the non-linearity of the equations of conservation is a combination of the transient of the characteristics and finite volumes methods. It is applied a curvilinear system of coordinates to the application of the grid to the body geometry. This grid is defined after the solution of the potential flow around the cylinder. When the permanent stage of the stream is obtained, the velocity profile, the pressure distribution and shear stress around the cylinder are analysed. The determination of the drag from the dynamic pressure and viscosity against the cylinder is still done.

The local and average results are compared with the experimental and numerical results available, with a good agreement.

#### Breve reseña histórica:

En el pasado para el desarrollo de los proyectos eran necesarios los experimentos en laboratorio los cuales implicaban instalaciones extremadamente costosas y una inversión de tiempo grande; hoy es posible pensar en grandes obras y obtener su viabilidad a través de la simulación numérica.

El estudio del comportamiento del flujo alrededor de un objeto, particularmente representado por un cilindro de longitud infinita data de la antigüedad. Tanto Navier como Stokes (1823/45) presentaron en conjunto, un modelo matemático completo para estudiar y analizar el flujo. Helmholtz y Kirchoff desarrollaron la teoría conocida ampliamente de corriente y vorticidad. Junto a éste avance teórico en el análisis del flujo también fueron mejorándose las técnicas de ensayo en laboratorio. Simultáneamente se incorporaron distintos métodos y sus técnicas para resolver las ecuaciones de conservación. A modo de ejemplo, podemos citar:

- a) Diferencias Finitas: diferencias centradas, Up Wind, etc.
- b) Elementos Finitos: método para tratar geometrías arbitrarias.
- c) Volúmenes Finitos: conservando las magnitudes físicas.

Los métodos anunciados sucintamente se diferencian entre sí por las técnicas de discretización y linearización de la función: términos lineales más el acoplamiento de la presión y velocidad, particularmente fuerte, para un flujo incompresible.

Objeto: Resolver el problema en forma numérica para un conjunto de números de Reynolds pequeño [1].

Emplearemos para ello, variables primitivas  $p$  y  $v$ , en el plano (2D) junto a las hipótesis de trabajo, es decir "formulación Lagrangeana más Volúmenes finitos".

Rango	Estructura	Características
$Re \ll 1$		permanente
$Re \approx 1$		permanente c/ recirculación
$Re \approx 10^2$		permanente c/ recirculación
$Re \approx 10^3$		estable c/ vórtices estables
$Re > 10^5$		turbulento c/ ondas.

Fig.1, Esquema de los flujos

Los regímenes del flujo analizados en la presente simulación fueron establecidos y evaluados por diferentes autores: mediante ensayos de laboratorio como en algunos casos, por métodos numéricos y / o analíticos en otros. En la figura 1, precedente pueden observarse en forma esquemática las distintas estructuras que puede adquirir, donde la separación ocurre aproximadamente para un  $Re \approx 5$ ; en y un flujo estable y simétrico, para  $Re = 40$ .

Hipótesis: Flujo incompresible, estacionario, laminar y simétrico, para bajos números de Reynolds. El cuerpo es de forma cilíndrica con paredes impermeables y rígidas.

Desarrollo matemático: Ecuación de la cantidad de movimiento para un fluido Newtoniano, donde  $\mu$  es la viscosidad absoluta, considerando la fuerza de campo despreciable.

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

a- Formulación Euleriana:

$$\frac{D}{Dt} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} \quad (3)$$

ecuaciones estas últimas no lineales y acopladas.

b- Formulación Lagrangeana:

Suponemos a la partícula en la posición  $r$  en el tiempo  $t$ , asociándole el valor escalar  $\phi(r,t)$ , el cual es integrado y aplicado a un problema discreto [2], en general, para dos posiciones cualesquiera de la malla

$$F(r_2, t_2) - F(r_1, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \phi(r, t) dt \quad (4)$$

discretizando convenientemente, y expresando en forma implícita la función, para la posición genérica  $k$

$$F_k^{n+1} - F_k^n = \phi_k^{n+1} \delta t \quad (5)$$

Luego la ecuación de Navier-Stokes puede expresarse como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{V}^{n+1} - \bar{V}^n) = -\nabla p^{n+1} + \mu \nabla^2 \bar{V}^{n+1} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \bar{V}^{n+1} = g \quad (7)$$

donde '+' indica el valor característico. Sistema este último acoplado y discretizado en forma general, al aplicar el operador divergente a ambos miembros el sistema pasa a estar desacoplado siendo su característica elíptica, luego su expresión es

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{V}^n \quad (8)$$

Procedimiento de cálculo: del sistema de ecuaciones obtenido se tienen  
Etapa 1- de aceleración: partiendo en el instante de tiempo  $t^n$ , asumimos conocidos los valores de  $p$  y  $v$ ; y con la aplicación del método de las características obtenemos la posición  $r^n$  característica y las componentes de la velocidad  $\bar{V}^n$  característica.

Etapa 2- de presión y la Etapa 3- de velocidad, ambas por el método de los volúmenes finitos.

Geometría del problema estudiado y sistema de coordenadas utilizadas.

Adoptóse un cilindro de radio  $\alpha$ , bi-dimensional, lo que permite adoptar la mitad superior del dominio de cálculo mostrado en la figura 2. Para el análisis, se definen las fronteras del dominio en el infinito

mediante la solución potencial. Las coordenadas coinciden con  $\phi$  y  $\psi$  potencial de corriente y de velocidad.

$$\zeta = U_{\infty} \left( r + \frac{\rho_0 a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (9)$$

$$\eta = U_{\infty} \left( r - \frac{\rho_0 a^2}{r} \right) \sin \theta \quad (10)$$

una vez calculadas las coordenadas  $x_{\zeta}$  e  $y_{\eta}$ , podemos determinar  $r$  y  $\theta$  y el factor de curvatura, quedando definido el campo computacional, en el cual es aplicada la discretización; la malla así obtenida nos asegura la ortogonalidad para cada dirección  $\zeta$  y  $\eta$  en cada uno de los nodos. Los límites del campo computacional finito son  $\zeta_{-\infty}$ ,  $\zeta_{\infty}$  y  $\eta_{-\infty}$  respectivamente. El vector velocidad lo definimos

$$\vec{V} = u_{\zeta} \vec{e}_{\zeta} + u_{\eta} \vec{e}_{\eta} \quad (11)$$

La formulación completa del problema es mostrada en la figura 2, sobre la línea de simetría, la componente perpendicular a ésta, de la velocidad es nula, y el gradiente de presión también lo es. Sobre el cilindro, y en la proximidad de éste, las componentes de la velocidad son muy pequeñas pudiéndose despreciar, respecto al gradiente de presión, resulta más difícil su especificación ya sea mediante la utilización de la teoría de la capa límite, o bien derivando los términos correspondientes en la ecuación de conservación: se adoptó gradiente nulo. A la entrada, solo existe la componente de la velocidad en la dirección del flujo, en el infinito, y una presión igual a la del potencial.

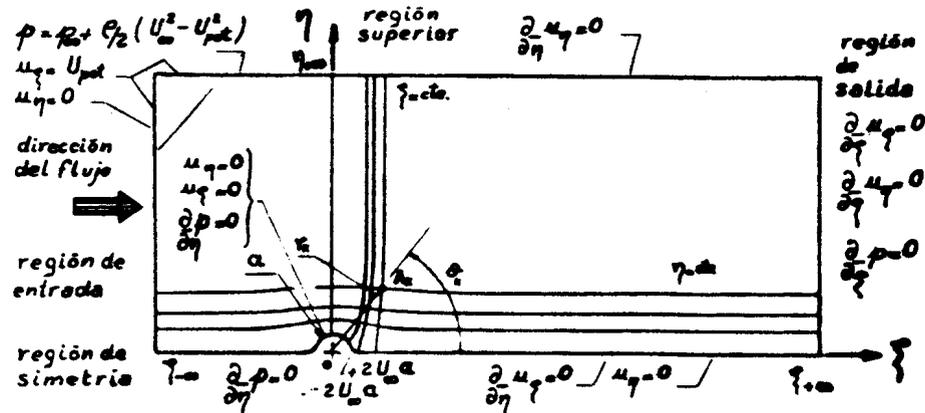


FIG.2. Geometría, coordenadas y condiciones de contorno.

En la región superior, la componente es la especificada, siendo nula la componente de difusión; en la salida se considera el flujo difusivo despreciable [3].

En suma, las ecuaciones elípticas de cantidad de movimiento y de presión presentan la misma forma, luego en la forma escalar

$$\nabla^2 \xi + S_c + S_p \xi = 0 \quad (12)$$

El término fuente  $S_j$  toma la forma, según corresponda la función  $\xi$  a la presión, o la velocidad siguiente:

$$S_c = - \frac{\rho}{\delta t} \nabla \cdot \bar{V}^* \quad \text{y} \quad S_p = 0 \quad (13)$$

$$S_c = - \frac{1}{\mu} \nabla p + \frac{1}{\nu \delta t} \bar{V}^* \quad \text{y} \quad S_p = - \frac{1}{\nu \delta t} \quad (14)$$

En esta etapa del cálculo, y en base a la ubicación de las coordenadas características  $\zeta^*$  y  $\eta^*$  determinamos  $h_\zeta$  y  $h_\eta$ , donde los vectores unitarios varían instante a instante, de acuerdo con la posición.

#### Método numérico:

a) Método de las características, enfoque Lagrangeano. Asumiendo que la velocidad  $\bar{V}$  permanece constante a lo largo de la curva característica, podemos determinar  $\bar{V}^{n+1}$  por medio del cálculo previo de las coordenadas  $\zeta_i$  y  $\eta_j$ , conocidas para el punto nodal  $i, j$ ; quedando entonces definidos los valores de  $\zeta_i^*$  y  $\eta_j^*$ ,

$$h_\zeta \frac{d}{dt} \zeta = u_\zeta^n(\zeta, \eta) \quad (15)$$

$$h_\eta \frac{d}{dt} \eta = u_\eta^n(\zeta, \eta) \quad (16)$$

El sistema se resuelve aplicando el método de Runge-Kutta de 2do orden estando definida las componentes de la velocidad por el polinomio del tipo

$$u_\zeta^* = a + b \zeta^* + c \eta^* + d \zeta^* \eta^* + e \zeta^{*2} \quad (17)$$

$$u_\eta^* = A + B \zeta^* + C \eta^* + D \zeta^* \eta^* + E \eta^{*2} \quad (18)$$

b) Método de los volúmenes finitos. Dicho método es aplicado a los términos elípticos y difusivos, consistiendo el mismo en integrar la ecuación discretizada sobre el campo computacional definido, asociando

el volúmen a cada nodo de la malla. Entre nodos, adoptamos un perfil lineal para el cálculo de los términos fuentes, manteniendo estos constantes para cada volúmen. Los parámetros geométricos, según la componente, son calculados en función de la variable dependiente, la evaluación de las derivadas en las facas de estos volúmenes es calculada en base a éste perfil. La ecuación de recurrencia es del tipo

$$a_p \bar{\phi}_p = a_E \bar{\phi}_E + a_V \bar{\phi}_V + a_N \bar{\phi}_N + a_S \bar{\phi}_S + b \quad (19)$$

el término independiente está dado en función de las fuentes constantes en el volúmen establecido

$$b = S_c \Delta V \quad (20)$$

calculando los coeficientes por medio de

$$a_p = \sum a_{nb} - S_p \Delta V \quad (21)$$

Solución del sistema de ecuaciones algébrico descripto.

Se utilizó el algoritmo de Thomas junto a la resolución por Gauss-Seidel (TDM). Para garantizar la convergencia de la solución del sistema, se implementó el criterio de los 'residuos'; siendo éste, un residuo de valor medio menor que una tolerancia establecida porcentual. Para garantizar la variación media para cada variable en todo el dominio de cálculo, se implementó el algoritmo de tal forma que ésta variación, en su conjunto, no superara a un valor de referencia.

#### Resultados:

- 1- Para efectuar la prueba de mallas, se emplearon diferentes pares de nodos, escogiendo entre ellos el correspondiente a  $74_{m25}$ ; tomándose cuidado de evitar la concentración de nodos en zonas desnecesarias, mediante una distribución no lineal, previamente calculada. Figura 3.
- 2- Los resultados expuestos, Tabla I, corresponden a valores locales y medios, comparándose los valores obtenidos en la simulación (Cyber 170/800) con los disponibles en la literatura consultada.
- 3- Observase una independencia entre los valores obtenidos para los distintos números de Reynolds analizados.

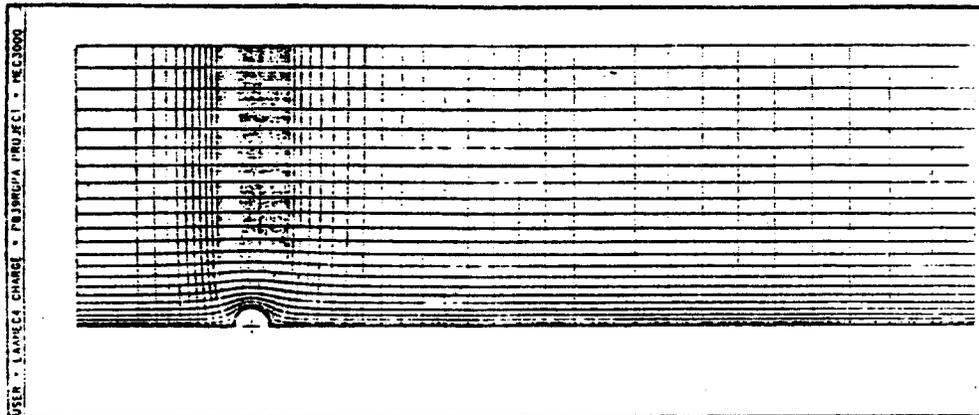


Fig. 3, Malla del campo computacional.

Tabla I, Coeficientes de arrastre.

Re	Coeficiente Cd.				Error %		
	Tritton	Batchelor	Fox	Simulación	Tritton	Batchelor	Fox
0,1	—	57,54	60,00	64,258222	—	4,1	7,1
0,4	—	19,72	18,00	19,135435	—	5,95	2,94
0,416	18,6	19,05	18,2	18,530573	2,7	1,83	0,37
1,0	—	10,96	11,5	9,540585	—	11,11	15,3
1,06	11,7	10,47	—	9,179527	21,54	11,03	—
1,32	8,69	9,12	8,4	7,898452	10,02	15,46	6,43
1,6	—	8,13	7,6	6,969140	—	14,37	8,3
1,64	8,19	8,13	7,6	6,860236	16,23	15,62	9,73
3,51	5,2	5,24	5,2	4,337560	16,58	17,22	16,52
5,45	3,8459	3,98	3,8	3,357998	12,6862	15,6281	11,6316
10,0	2,884	2,8	2,9	2,324863	19,3875	16,9691	19,8323
*5,0	4,1209	3,98	3,9	3,750883	8,7849	5,5557	3,6183
**5,45	3,8459	3,98	3,8	3,67295241	4,4969	7,7148	3,3434

\* mallas más densas: 90x27 nodos.

\*\* ídem \* , utilizando un equipo VAXii, perteneciente al CRIBAB.

**Resumen:**

1- Distribución de presión: se observa similitud entre los valores comparados, a medida que el número de Reynolds aumenta, se tiene el comportamiento esperado de la curva debido al gradiente adverso en la región posterior al cilindro, figura 4.

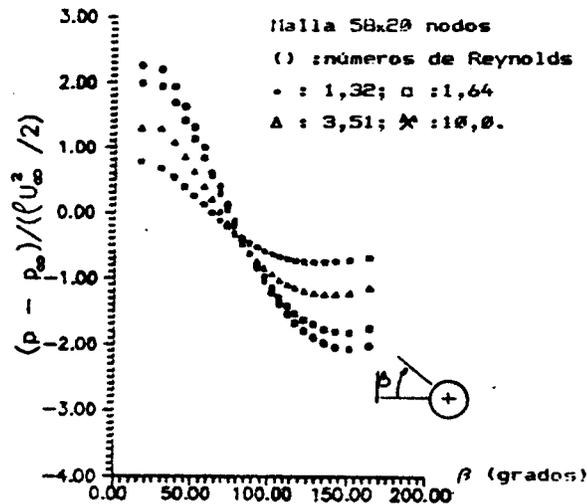


Fig.4, Distribución de presión.

2- Distribución de tensión: En el rango de números Reynolds simulados, no aparece la separación del flujo (diferencia 3%) para  $Re \leq 1.0$  la curva es simétrica; tornándose asimétrica a medida que aumenta el número de  $Re$ , en la región posterior al cuerpo, obsérvese la Figura 5.

4- Visualización del flujo. Por medio de la implementación de una salida gráfica, figura 6, es posible apreciar la distribución de la velocidad en torno del cuerpo, observándose una buena concordancia y la ausencia de recirculación.

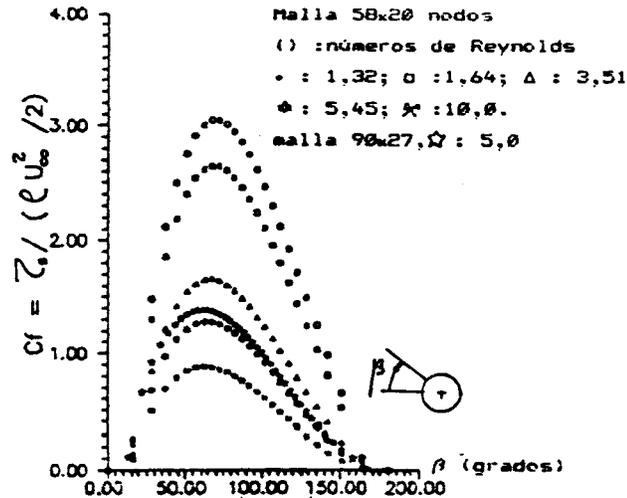


Fig.5, Distribución de la tensión.

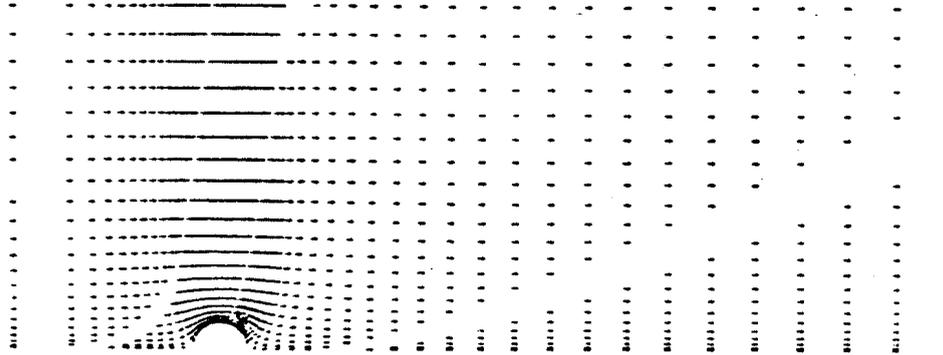


Fig.6, Visualización del flujo, vectores veloc., en el centro del V.C..

**Comentarios finales:**

- c1) La(s) malla(s) adoptada(s) satisfacen en un todo la geometría del problema, pudiendo implementarse la(s) misma(s) con relativa facilidad.
- c2) Obtuvieronse valores del coeficiente de arrastre  $C_d$ , similares con los existentes en la literatura.
- c3) No fue captada recirculación en la gama de números de Reynolds simulada.
- c4) El tiempo de CPU ( $\approx 12$ hs.) fue razonable para el caso particular de una malla de  $90 \times 27$ ,  $\Delta t = 0.001$  y un  $Re = 5.45$ , en un equipamiento VAX11.
- c5) De lo expresado precedentemente, se deduce que el método de Lagrange fue utilizado exitosamente mediante la combinación de los métodos de las características y volúmenes finitos.

**REFERENCIAS**

1. Molina, M.E., "Escoamento laminar transversal a un cilindro infinito: solución numérica mediante la aplicación del método de las características", Pontificia Universidade Católica de Rio de Janeiro, Dissertação de Mestrado, M.Sc., agosto 1990.
2. Hunffenus, J.P. and Khaletzh, D., "The lagrangian approach of advective term treatment and its application to the solution of Navier Stokes equations", Int.J. Num. Meth. in Fluids, Vol4, págs.247-269, 1984.
3. Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flows", Mc. Graw Hill, 1980.