

ESTUDIOS NUMERICOS EN FLUJO VISCO-PLASTICO
DE MATERIALES GRANULARES ENSILADOS

Mario A. Diez¹

Luis A. Godoy²

Departamento de Estructuras, Universidad
Nacional de Córdoba, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se estudia el comportamiento numérico de un modelo de elementos finitos, desarrollado por los autores, para simular el flujo durante el vaciado de materiales almacenados en silos. El modelo está basado en flujo viscoplastico siguiendo la ley de Drucker-Prager, y emplea técnicas de penalización para imponer incompresibilidad. Se estudia en particular el tratamiento de puntos del contorno con singularidades; la incidencia del parámetro de penalización; y la interpolación de viscosidades. Por último, se compara la solución con resultados existentes en la literatura a fin de validar el presente modelo.

ABSTRACT

The numerical behaviour of a finite element model, developed by the authors, to simulate the flow of bulk materials stored in silos is presented. The model is based on a visco-plastic flow representation that contains the Drucker-Prager law, and it uses penalty techniques to enforce incompressibility. Problems associated to points on the boundary that exhibit some singularity; to the influence of the penalty parameter; and to interpolation of viscosities are studied. Finally, the solution is compared with results from other authors in order to validate the present model.

¹SECARNO (CONICET)

²INVESTIGADOR (CONICET)

1. INTRODUCCION

La necesidad de comprender el comportamiento mecánico de materiales granulares durante el flujo, tiene importancia por dos motivos fundamentales. En primer lugar, las presiones que se ejercen sobre las paredes del silo son imprescindibles en el diseño o verificación de la estructura. En segundo lugar, los problemas relacionados con el flujo de materiales pulverulentos y granulares, que pueden interrumpir sistemáticamente los procesos industriales generando consecuentemente importantes pérdidas económicas. En ambos casos, la falta de un diseño integrado de las estructuras ha ocasionado que se ignore el comportamiento del material durante el flujo.

Si reflexionáramos en términos históricos, encontramos fórmulas para el diseño de silos a partir del año 1895, en que Janssen [1] presentó la primera de ellas, aunque en términos generales todas parten de obtener con menor o mayor precisión las presiones estáticas de llenado. Incrementando estas últimas por coeficientes -generalmente experimentales- se estiman las presiones de vaciado que gobiernan el diseño. Siete décadas después, Jenike [2] explicó el comportamiento del material durante el flujo y a partir de él, una nueva línea de investigaciones se abre hasta nuestros días. Tenemos así a Nguyen, Brenner, et. al [3,4], Meric [5], Savage [6], entre otros, quienes estudiaron el flujo gravitatorio en tolvas planas y axisimétricas de materiales granulares obteniendo en forma aproximada las ecuaciones cerradas para evaluar el campo de velocidades y presiones que el material ejerce sobre las paredes.-

El presente trabajo es parte de un proyecto de investigación en el que se busca simular numéricamente el proceso de descarga tanto de modelos axisimétricos como de deformación plana. Se analiza el comportamiento durante el estado estacionario suponiendo una relación constitutiva del material -validada experimentalmente [7]- de tipo viscoplástica. El criterio de Drucker-Prager ha sido utilizado para representar la superficie de fluencia plástica tanto por su simplicidad algebraica como por su generalidad, ya que permite representar materiales granulares friccionales y cohesivos.-

La simulación del vaciado se obtiene a partir de la hipótesis de fluido viscoso no-Newtoniano incompresible [8]. La solución discreta de las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan esta clase de problemas, se resuelve via integración directa aprovechando la analogía entre fluidos viscosos y sólidos elásticos incompresibles.-

Se presenta brevemente la formulación utilizada -un análisis más detallado ha sido presentado en [9]- enfatizando en cambio, estudios numéricos introducidos, como así también resultados comparativos de otros autores que convalidan este modelo.-

Finalmente en esta primera etapa no se tienen en cuenta efectos friccionales pared-grano, por lo tanto no es posible comparar resultados relacionados con la presión.-

2. RELACIONES CONSTITUTIVAS GENERALES Y FORMULACIÓN BÁSICA

Si se desprecian las deformaciones elásticas la descripción general del comportamiento de muchos materiales puede ser hecha en términos de modelos viscoplásticos. Siguiendo a Perzyna [10], una forma particular puede ser escrita definiendo la tasa de deformación $\dot{\epsilon}_{ij}$ por la expresión:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (1)$$

donde, $F=F(\sigma_{ij})$ describe la superficie de fluencia, $Q=Q(\epsilon_{ij})$ define el potencial plástico y γ es el parámetro de fluidez. Dado que ambas expresiones son diferentes, especifican un flujo no asociado. Aquí:

$$\langle \phi(F) \rangle = \phi(F) \quad \text{si} \quad F \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle \phi(F) \rangle = 0 \quad \text{si} \quad F < 0$$

La relación (1) puede ser escrita en forma lineal

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \Gamma_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2)$$

Especializaremos a continuación la ecuación general (1) ó (2) a materiales granulares utilizando la ley de fluencia plástica de Drucker-Prager. Este criterio permite representar convenientemente la ley de Mohr-Coulomb que tradicionalmente ha sido empleada tanto para materiales friccionales como cohesivos. La función de fluencia F se define en este caso como [11]

$$F = 3 \alpha' \sigma_e + J_2^{1/2} - k \quad (3)$$

donde

$$\alpha' = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3} (3 - \sin \varphi)} \quad k = \frac{6 c \cos \varphi}{\sqrt{3} (3 - \sin \varphi)}$$

Las constantes φ y c definen el ángulo de fricción interna y la cohesión del material respectivamente. La presión media se representa con σ_e . Reemplazando esta última expresión y la $\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$ en la Eq. (1)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \gamma (3 \alpha' \sigma_e + J_2^{1/2} - k) \frac{1}{2} \frac{1}{J_2^{1/2}} S_{ij} \quad (4)$$

Igualando esta última expresión a

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2 \mu} S_{ij} \quad (5)$$

que define la relación constitutiva de un flujo viscoso no-Newtoniano incompresible ($\dot{\epsilon}_{ii} = 0$) se obtiene finalmente [9].

$$\mu = \frac{1}{\gamma} + \frac{k}{\dot{\epsilon}} - 3 \frac{\alpha' \sigma_e}{\dot{\epsilon}} \quad (6)$$

$\dot{\epsilon}$ se define como el segundo invariante de deformaciones

La condición de incompresibilidad ha sido impuesta via función de penalización, de modo que se verifica

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{\partial \dot{\epsilon}}{\partial \dot{\epsilon}_{ii}} \dot{\epsilon}_{ii} = 0 \quad (7)$$

donde ϵ es un número suficientemente grande (parámetro de penalización). El problema en forma discretizada puede definirse como

$$K \underline{q} = f \quad \text{con } K \equiv K(\underline{q}) \quad (8)$$

donde \underline{q} es el vector de incógnitas del problema (en este caso velocidades nodales), K la matriz de rigidez (en la que se emplea Integración Selectiva) y f sistema de fuerzas. Nótese que la matriz K dependerá del nivel tensional (o de deformación). La solución del problema puede obtenerse a través de una técnica iterativa

$$\underline{q}_n = [K(\underline{q}_{n-1})]^{-1} f \quad (9)$$

La técnica de iteración directa es utilizada dada la rapidez de convergencia si el problema está bien condicionado.

En la Fig. 1 se esquematiza la marcha de cálculo que se utiliza en el código desarrollado.

Hasta el momento, se tienen disponibles elementos Serendipity de 8 nodos y Lagrangeanos de 9 nodos, para tratar problemas de estados planos de deformación y sólidos axisimétricos.-

3. ESTUDIOS NUMERICOS

3.1 Tratamiento de puntos con singularidades en el contorno

En el contexto de los problemas de interés que motivan este trabajo, se presentan puntos con singularidades cuando se pretende representar geoméricamente las condiciones de bordes en la transición tolva-cilindro de un silo. Si estos puntos no son tratados adecuadamente, además de los errores locales que se introducen en la vecindad de la singularidad, el número de iteraciones necesario para convergencia aumenta y pueden producirse poluciones en toda la malla y como consecuencia la solución se ve desmejorada.-

1. DATOS INICIALES: λ, γ, μ_0

2. Cálculo de la matriz de Rigidez

$$K(a) = K_1(a) + c\mu K_2$$

$$\begin{matrix} (9 \times 9) \\ \begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix} \\ K_1(a) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (2 \times 2) \\ \begin{matrix} X & X \\ X & X \end{matrix} \\ K_2 \end{matrix}$$

3. Campo de Velocidades

$$a_s = [K_{s-1}]^{-1} f_s$$

4. Se comprueba la convergencia (usualmente $\epsilon=0.01$)

$$\frac{\sum_i (a_i^n - a_i^{n-1})^2}{\sum_i (a_i^n)^2} \leq \epsilon$$

5. Cálculo de las viscosidades

$$\left. \begin{matrix} \ell_{ii} \\ \sigma_{ii} = c \mu^{n-1} \ell_{ii} \\ \tau \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{matrix} (2 \times 2 \text{ GAUSS}) \\ \begin{matrix} X & X \\ X & X \end{matrix} \\ \text{POSICION} \end{matrix}$$

$$\mu = \frac{1}{\tau} + \frac{k}{\tau} - 3 \frac{\sigma' \sigma \rho}{\tau}$$

Fig. 1 ESQUEMA DE CALCULO

Se dispone de distintas técnicas para el tratamiento de la singularidad empleando elementos finitos [12, 13]. En este trabajo se ha utilizado el propuesto por Henshell que es el más simple de implementar y conduce a aproximaciones adecuadas en elementos isoparamétricos. Esta técnica está basada en introducir singularidad en derivadas de velocidades (de los que se obtienen tensiones) a través de degenerar la topología del elemento. Para esto, se ubican los nodos centrales de los elementos contiguos al punto singular como se muestra en la Fig. 2.-

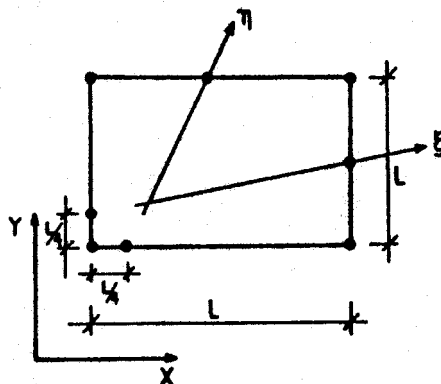
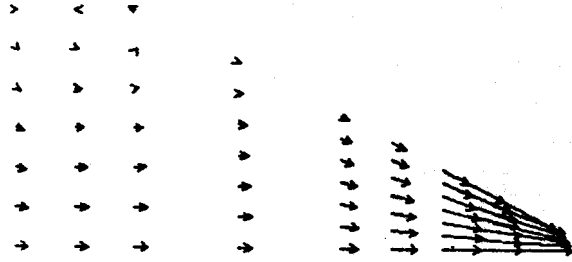
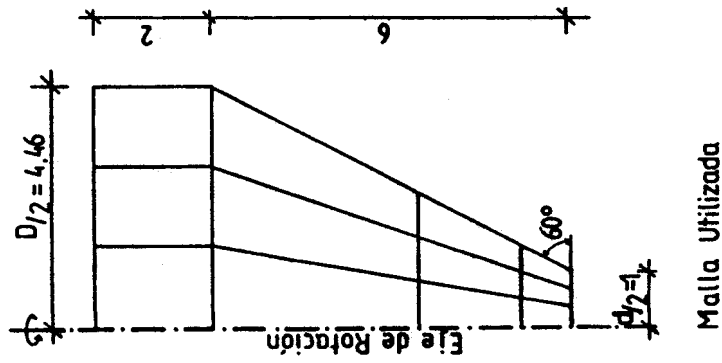


Fig. 2. ELEMENTO ISOPARAMETRICO DEGENERADO.

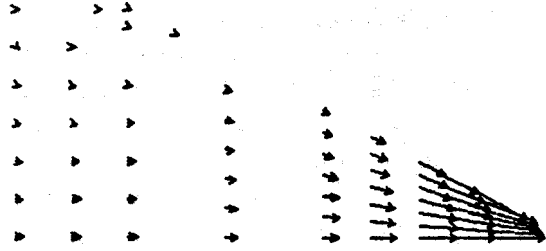
En la Fig. 3 se muestra el campo de velocidades para un ejemplo tolvacilindro. Se observa que si no se mejora la solución en la vecindad de la singularidad se tienen velocidades opuestas al flujo. Los errores en velocidades se detectan también en zonas alejadas de la intersección cono-cilindro. Cuando se modifican los 2 elementos contiguos a la singularidad, se corrigen los valores de velocidad.

3.2 Selección del parámetro de penalización α

Mencionamos anteriormente (Eq.7) que utilizamos la técnica de penalización para satisfacer la condición de incompresibilidad. Se hace notar que el parámetro α juega un rol fundamental y el interrogante inevitable es, qué valor fijar como dato. Ha sido mostrado por Oden [14] que para ciertos elementos sub-integrados, α depende del tamaño de



Sin tratamiento de singularidad



Con tratamiento de singularidad

Fig. 3 PUNTOS SINGULARES EN EL CONTORNO.
 $\nu=20^\circ$; $c=0$; $\gamma=1.507$; $\delta=1.59^\circ/\text{cm}^2$; $\alpha=10000$; $\mu_0=1$

mallas. Hughes et. al [15] por otra parte sugieren evaluar α en forma proporcional a μ

$$\alpha = c \mu \quad (10)$$

donde μ es el valor de la viscosidad de cada elemento y c una constante. Según Hughes [16], el valor de c depende de la longitud de palabra del procesador, y para los problemas estudiados por él, recomienda $c \approx 10^7$.

En nuestro caso particular el valor de c propuesto por Hughes resulta demasiado grande, probablemente porque los valores de viscosidad del material granular sean bastante bajos comparados con otros materiales de características puramente cohesivas. En la Fig. 4 se grafican los valores promedio de velocidad a la salida de la tolva para distintos c , en un silo con condiciones de velocidad inicial prescrita en la parte superior.-

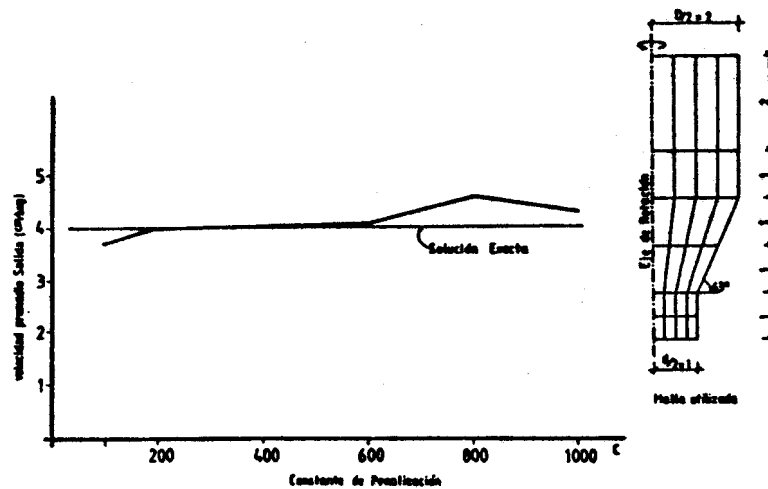


Fig. 4 RANGO DE PENALIZACION ADECUADO.

$\psi = 27^\circ$; $c = 0,12 \text{ Kg/cm}^2$; $\gamma \approx \infty$; $\mu_0 = 1$.

3.3 Interpolación bilineal de viscosidades

Como se advierte en [16], se ha demostrado que las variables conjugadas (tensiones) en elementos finitos de tipo desplazamiento tienen buena precisión sólo en algunos puntos del elemento, que se denominan comúnmente "puntos óptimos". Para un elemento tipo Serendipity de 8 nudos o Lagrangeano de 9 nudos, esos puntos coinciden con los que se emplearían en una integración de Gauss (2 x 2).-

En el presente trabajo, no sólo tensiones son necesarias, sino además viscosidades, que se calculan como se indica en la (Eq.6) a partir de $\dot{\epsilon}$ y σ . Como el análisis es no lineal debido a esa dependencia del parámetro constitutivo μ , surge la necesidad de evaluar μ con precisión a fin de evitar una acumulación de errores en el análisis. Una posibilidad sería evaluar μ en el centro de cada elemento, como se presenta en la Ref. [9].

Sin embargo, como los valores de mayor precisión de μ corresponden a los puntos de Gauss (2 x 2), en este trabajo se prefirió evaluar a partir de una interpolación bilineal desde esos puntos, para calcular μ en todo el dominio del elemento. En particular, es necesario tener μ en los puntos de Gauss (3 x 3) para la integración de la matriz desviadora.

Por razones de espacio no se presentan aquí comparaciones numéricas, pero se observan algunas mejoras con respecto al análisis con $\mu = \text{cte.}$ en el elemento, especialmente en zonas con gradientes altos de μ .

4. COMPARACION CON RESULTADOS DE OTROS AUTORES

4.1 Flujos gravitatorios en tolvas cónicas y planas.

Se han modelado flujos gravitatorios en tolvas cónicas (axisimétricas) y planas con materiales puramente friccionales. Los

resultados han sido comparados a los obtenidos por Nguyen et. al [3,4] quienes desarrollaron una solución analítica aproximada del fenómeno (vía técnica de Perturbación) para los dos tipos de tolvas. Nguyen obtiene valores adimensionalizados de velocidad promedio a la salida para diferentes ángulos de inclinación de tolva y para diversos valores de ángulo de fricción pared-grano. En la Fig. 5 se muestra el campo de velocidades para una tolva axisimétrica y en la Fig. 6 para el caso de tolva plana (celda horizontal). Se han obtenido en ambos casos diferencias menores al 2% con los resultados de [3,4], lo que evidencia la confiabilidad del modelo propuesto.-

4.2 Flujo axisimétrico en silos con velocidad prescrita en el contorno superior.

Otro ejemplo analizado corresponde al caso de un silo vertical, Fig. 7. Es introducida como dato la velocidad inicial en la parte superior del material. Se comparan los resultados a los obtenidos por Haüssler et. al [17] -quienes analizan el proceso transitorio hasta el estado de régimen de un silo circular- en las distintas posiciones del silo, nuevamente se han obtenido diferencias mínimas.-

5. CONCLUSIONES

Del trabajo desarrollado es posible extraer algunas conclusiones :

(a) el modelo permite representar flujo de materiales tanto puramente friccionales como cohesivos.-

(b) a través de los estudios numéricos, es posible observar el comportamiento integral del flujo y de esta manera comprender los distintos mecanismos de vaciado en tolvas para diversas pendientes de paredes y tamaño de boca de descarga, pudiéndose también predecir la existencia de zonas de material en reposo.-

(c) es necesario representar adecuadamente los puntos con singularidades.

(d) es necesario realizar estudios a fin de determinar rangos de parámetros de penalización α adecuados en cada clase de problemas.

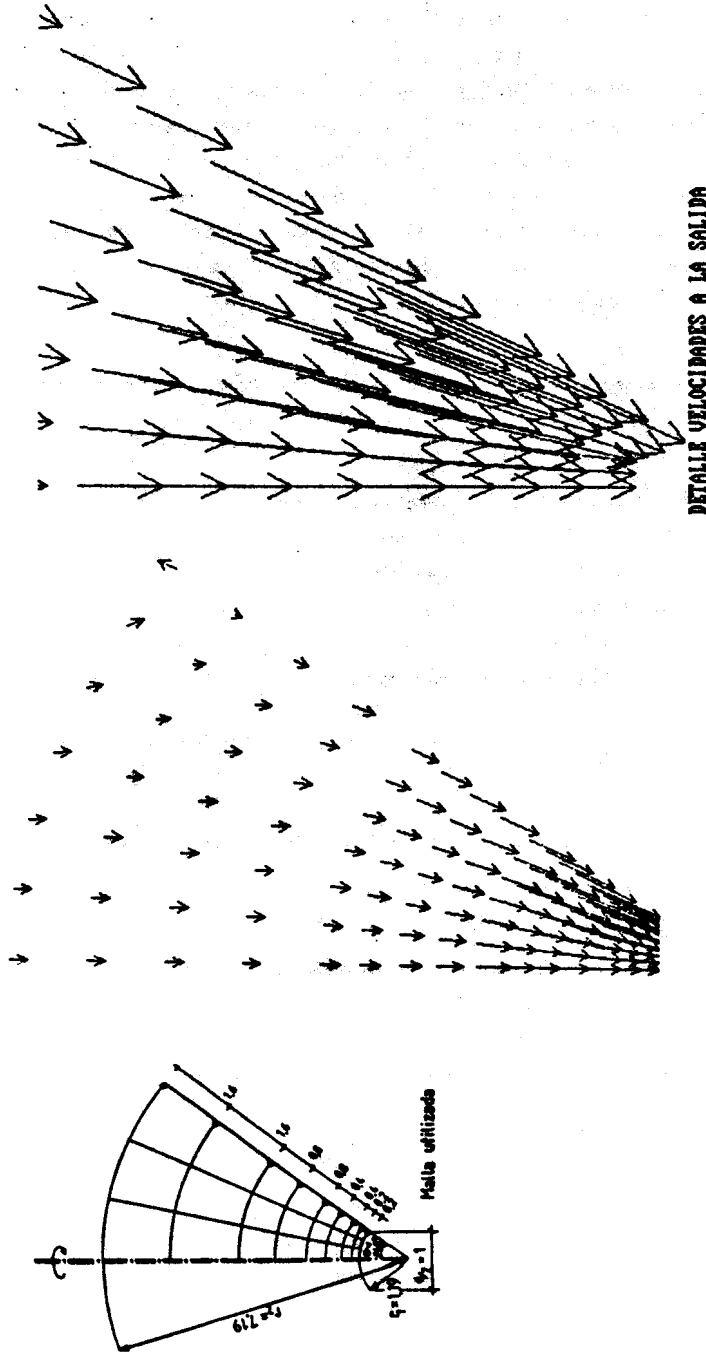


Fig. 5 FLUJO GRAVITATORIO EN TOLVA CONICA

$\psi=25^\circ$; $c=0$; $\gamma=1.1E07$; $\delta=1.5gr/cm^3$; $\alpha=1000\mu$; $\mu_0=1$

VELOCIDAD PROMEDIO A LA SALIDA: 57 cm/s.

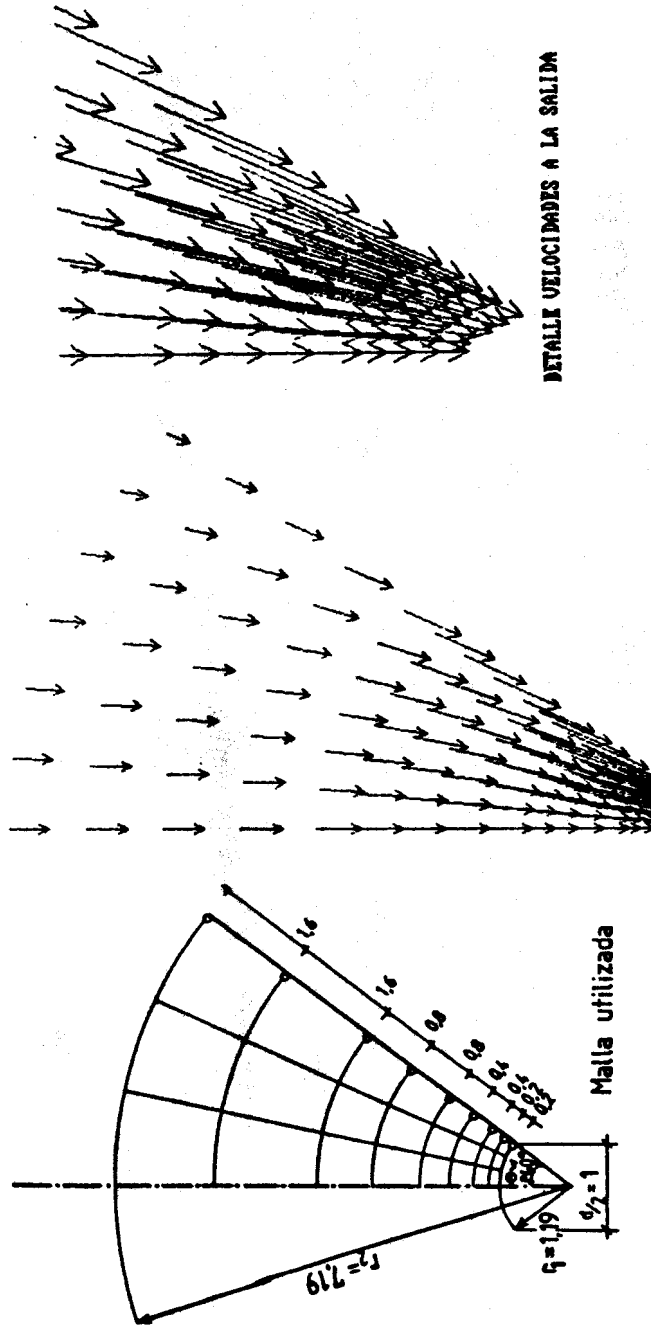


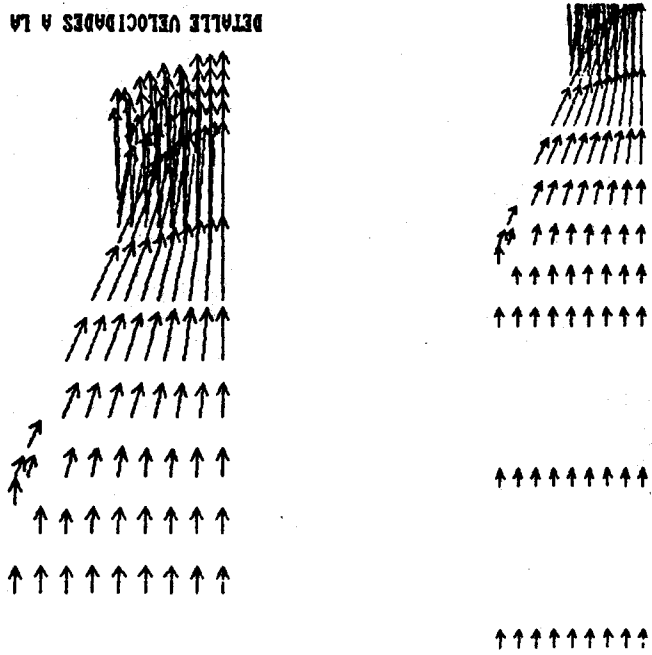
Fig. 6 FLUJO GRAVITATORIO EN TOLVA PLANA

$\psi = 25^\circ$; $c = 0$; $\gamma = 1.1 \cdot 10^7$; $\delta = 1.5 \text{ gr./cm}^2$; $\alpha = 1000 \text{ u}$; $\mu_0 = 2$
VELOCIDAD PROMEDIO A LA SALIDA: 100 cm/s.

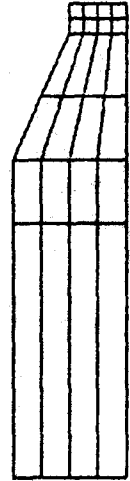
$\phi=34^\circ$; $c=0$; $\gamma=1.807$; $V_0=0.5m/s$; $\alpha=300m$; $u_0=1$

FIG. 7 FLUJO AXISIMETRICO EN SILOS CON VELOCIDAD PRESCRITA EN EL CONTORNO SUPERIOR

DETALLE VELOCIDADES A LA SALIDA



Malla utilizada



(e) por su generalidad, la formulación puede ser extendida a otros casos (3 Dimensiones), pudiéndose estudiar el campo de velocidades y presiones en silos de otras secciones (rectangulares, intercaladas, etc.).-

6. REFERENCIAS

1. JANSSEN, H. A., "Versuche über Getreidedruck in Silozellen", Vol. 39, pp. 1045 - 49, 1895.
2. JENIKE, A. W.; ELSEY, P. J. and WOOLLEY, R. H., "Flow Properties of Bulk Solids", *Proceedings, American Society for Testing and Materials*, Vol. 60, pp. 1168-1181, 1960.
3. NGUYEN, T. V.; BRENNEN, C. and SABERSKY, R. H., "Gravity Flow of Granular Materials in Conical Hoppers", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, pp. 529-535, 1979.
4. BRENNEN, C. and PEARCE, J. C., "Granular Material Flow in Two Dimensional Hoppers", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, pp. 43-50, 1978.
5. MERIC, R. A. and TABARROK, B., "On the Gravity Flow of Granular Materials", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol 24, N° 8, pp. 459-479, 1982.
6. SAVAGE, S. B., "Gravity Flow of Cohesionless Bulk Solids in a Converging Conical Channel", *Int. Journal of Mech. Sci.*, Vol. 9, pp. 631, 1963.
7. JENIKE, A. W. and SHIELD, R. T., "On the Plastic Flow of Coulomb Solids Beyond Original Failure", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 26, pp. 599, 1959.
8. ZIENKIEWICZ, O. C. and GODBOLE, P. N., "Viscous incompressible flow with special reference to non-Newtonian (plastic) flow", *Finite Element Method in Flow Problems*, (Edited by R. H. GALLAGHER, J. T. ODEN, C. TAYLOR and O. C. ZIENKIEWICZ), Chap. 2, Wiley, New York, 1975.
9. DIEZ, M. A., "Un Modelo de Elementos Finitos para Flujo de Materiales Almacenados en Silos", *Mecánica Computacional AMCA*, Vol. 7-8, 1989.
10. PERZYNA, P., "Fundamental Problems in Visco-Plasticity", Re-

- cent *Advances in Applied Mechanics*, Chap. 9, pp. 243-377, Academic Press, New York, 1966.
11. DRUCKER, D. C. and PRAGER, W., "Soil Mechanics and Plastic Analysis of Limit Design", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 10, pp. 157, 1952-1953.
 12. HENSHELL, D., "Crack Tip Finite Elements Are Unnecessary" *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 9, pp. 495-507, 1975.
 13. CAREY, G. F. and ODEN, T. J., "Finite Elements: A Second Course - Volume II", *The Texas Finite Element Series*, Prentice-Hall, Inc., 1983.
 14. ODEN, J. T., "A Theory of Penalty Methods for Finite Element Approximations of Highly Nonlinear Problems in Continuum Mechanics", *Comput. Struct.*, 8, pp. 445-449, 1978.
 15. HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. and BROOKS, A., "Review of Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation", *Journal of Computational Physics*, 30, n° 1 (1979), 1-60.
 16. BARLOW, J., "Optimal Stress Locations in Finite Element Models", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, pp. 243-251, 1976.
 17. HAUSSLER, U. and EIBL, J., "Numerical Investigations on Discharging Silos", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol 110, N° 6, pp. 957-970, 1983.

7. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a CONICET y CONICOR por el sustento de este proyecto. Quieren tambien agradecer al grupo de Mecánica Computacional del Centro Atómico Bariloche por cedernos (ENREDO y PITUCO) Pre y Pos procesador respectivamente que han sido utilizados en este trabajo.-