

VIGAS SOBRE FUNDACIONES BI-PARAMETRICAS  
DEL TIPO CUASI-WINKLER.

Gabriel E. Barrientos  
Departamento Ingeniería Mecánica  
Universidad del Bío-Bío  
Casilla 5-C  
Concepción - Chile

RESUMEN

Se aplica el método de elementos finitos al estudio del comportamiento de vigas sobre fundaciones bi-paramétricas, considerando el modelo cuasi-Winkler. Los resultados obtenidos -deflección, momento y corte en la sección- se comparan con resultados analíticos, observándose una buena concordancia. Se demuestra que para vigas relativamente largas, sin restricciones en los extremos, el modelo de Winkler entrega resultados altamente conservadores.

ABSTRACT

The finite element method is applied to study comportation of beams on bi-parametrics foundations by considering a quasi-Winkler model. Results obtained-deflection, moment and shear on section- and analytical results are compared. A good agreement is observed. For relativity long beams without restrictions at the end is demonstrated that Winkler model gives highly conservative results.

## INTRODUCCION.

Fué Winkler [1], en el año 1867, quien por primera vez propuso un modelo matemático del comportamiento de una viga apoyada sobre una fundación elástica, el cual aún es muy utilizado en la práctica. El advenimiento de la computación ha permitido el estudio del problema utilizando técnicas computacionales que han desplazado a los métodos analíticos, los cuales son tediosos y extensos. Al respecto, diversos autores [2-3-4-5], proponen algunos métodos analíticos alternativos a la solución de Winkler. Estudios experimentales de Terzaghi [6], han permitido obtener relaciones para la determinación de los parámetros que caracterizan a la fundación.

A partir de la década del 40, diversos investigadores proponen un efecto adicional de la fundación sobre la viga, cuya explicación física es diferente, pero que matemáticamente conducen a la misma ecuación diferencial. Keer [7] presenta los modelos de fundación más utilizados, entre los que destacan: Fundación Filonenko-Borodich, F. de Hetényi, F. de Pasternak, F. Generalizada, F. de Vlasov y F. de Reissner. Cada uno de estos autores ha propuesto soluciones analíticas con un cierto grado de complejidad que las hace poco atractivas.

Todos los autores mencionados han centrado su interés en analizar la viga desde el punto de vista de una premisa: La deflexión de la fundación es la misma que la de la viga, es decir, viga y fundación se mantienen unidas de acuerdo al modelo planteado por Winkler. Este hecho es válido para vigas "cortas", donde siempre hay deflexión positiva. Cuando la viga es relativamente larga, hay puntos donde ella tiende a levantarse o separarse de la fundación, lo que se conoce como fundaciones del tipo Cuasi-Winkler. Pavlovic [8], estudió analíticamente este fenómeno, obteniendo un set de ecuaciones algebraicas de características no lineales y de trabajoso manejo. El método es extenso, dependiendo del número de zonas donde la viga se separa de la fundación, y está limitado al hecho de que debemos presuponer la forma de la deflexión de la viga, lo que para un sistema de cargas múltiples, a veces es difícil. Además, sólo permite trabajar con parámetros de la viga y fundación, constantes.

En el presente trabajo, se implementa un programa de elementos finitos, que permite estudiar, con un simple manejo de datos, los modelos de Winkler y Cuasi-Winkler, con opciones que permiten variar los parámetros de la viga y la fundación y estudiar la influencia de cada uno de ellos.

En general los investigadores han encontrado que el Modelo de Winkler tiene un buen comportamiento para vigas cortas ( $\beta L = 0.8$ ) y que el error es mínimo para valores hasta  $\beta L = 2.25$ . Para valores superiores, los efectos de considerar el problema de acuerdo al modelo Cuasi-Winkler empiezan a ser significativos, especialmente cuando la carga aplicada se encuentra en las cercanías de los puntos donde la viga se levanta.

PLANTEAMIENTO ANALITICO

Consideremos una viga continua, apoyada sobre un medio elástico, tal como se muestra en la figura 1(a). La figura 1(b) representa un elemento de viga, donde  $M(x)$  es el momento,  $V(x)$  el corte,  $P$  la carga axial,  $q(x)$  la carga distribuida y,  $p(x)$  la reacción de la fundación elástica sobre la viga, por unidad de longitud. Al respecto, consideraremos el modelo bi-paramétrico, para el cual los investigadores han propuesto una serie de modelos que simulan esta reacción  $p(x)$ , que considera el efecto de un segundo parámetro de la fundación "k1", cuya formulación matemática es la forma:

$$p(x) = k(x) y(x) - k_1(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad (1)$$

en donde "k" es el módulo de Winkler [N/m<sup>2</sup>],  $y(x)$  la deflexión de la viga y "k1" el segundo parámetro de la fundación.

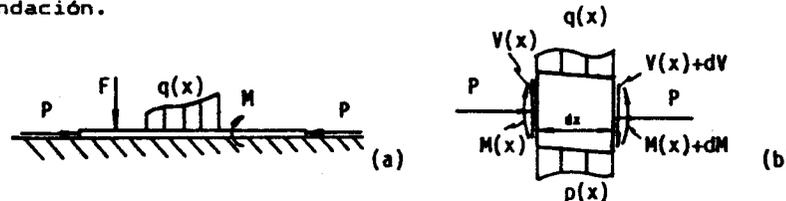


FIG.1. (a) Viga sobre fundación elástica  
(b) elemento de viga.

La diferencia del efecto de  $k_1(x)$  para los diferentes autores citados, es sólo de interpretación física, ya que todas conducen a la misma ecuación matemática (1).

El modelo físico de (1) puede ser simulado considerando que la fundación se comporta como una superficie elástica representada por la figura 2, en donde la rigidez  $k(x)$  es simulada por un set de resortes  $k_i$  y  $k_1(x)$  por una membrana elástica.

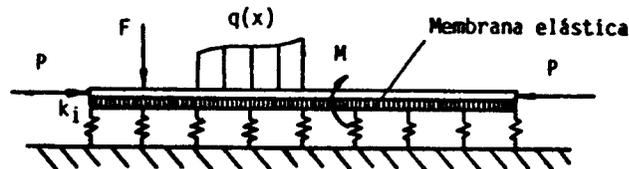


FIG. 2. Modelo físico de la fundación bi-paramétrica.

Las simplificaciones de las soluciones analíticas, consisten en suponer constancia en los módulos  $k$  y  $k_1$  de la fundación y, en los parámetros de la viga:  $E$  (módulo de elasticidad) e  $I$  (momento de inercia). Los métodos numéricos permiten considerar fácilmente la variación de todos estos parámetros.

La ecuación matemática que rige el comportamiento de la viga sometida a las cargas mostradas en la figura 2, está dada por [9]:

$$\frac{d^2 E(x) I(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + k(x) y(x) - (k_1(x) \pm P) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = q(x) \quad (2)$$

donde el signo asociado a la carga axial P, será positivo si es de compresión y negativo si es de tracción.

Estudios de la ecuación (2), considerando la fundación del tipo Winkler se han desarrollado en extenso, utilizando distintos métodos analíticos y numéricos [10-11-12].

#### METODO DE ELEMENTOS FINITOS

La viga se discretiza en un número finito de elementos con cuatro grados de libertad:  $\phi_i$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ . La figura 3 muestra las cargas que actúan en cada elemento y sus correspondientes grados de libertad.

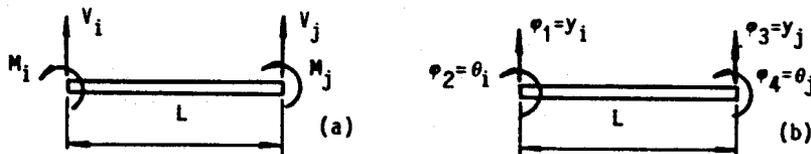


FIG.3. (a) Cargas en el elemento, (b) Grados de libertad.

Se implementa un programa computacional, basado en el método numérico de elementos finitos (M.E.F.), considerando todos los efectos que involucra la ecuación (2). La variable continua "y" (deflexión), es aproximada en términos de sus valores nodales (incógnitas) discretos:

$$y(x) = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 + N_4 \phi_4 = N \phi \quad (3)$$

donde los  $N_i$ , representan funciones de forma cúbicas, obtenidas de acuerdo a la forma generalizada de los polinomios de Hermite [13].

Reemplazando (3) en (2) y aplicando el Método de Galerkin [14] para encontrar los mejores valores de  $\phi$ , se obtiene:

$$\int N^T \frac{d^2}{dx^2} (E I \frac{d^2 N \phi}{dx^2}) dx + \int N^T k N \phi dx - \int N^T k_1 \frac{d^2 N \phi}{dx^2} dx \pm \int N^T P \frac{d^2 N \phi}{dx^2} dx = \int N q(x) dx \quad (4)$$

(4) representa un sistema de cuatro ecuaciones con las correspondientes 4 incógnitas  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ , aplicable a cada uno de los elementos de la viga.

Aún cuando los parámetros  $E(x)$ ,  $I(x)$ ,  $k(x)$ ,  $k_1(x)$  y  $q(x)$  sean variables, el MEF permite suponerlos constantes dentro de cada elemento "n", por lo que se consideran como  $E_n$ ,  $I_n$ ,  $k_n$ ,  $k_1_n$  y  $q_n$ , correspondientemente. Aplicando el Teorema de Green y reordenando, se obtiene:

$$\{E_n I_n S_{1,j} + k_n S_{1,j}^w + (k_1_n \pm P) S_{1,j}^p\} \phi_j = Q_j \quad ; \quad i, j=1,2,3,4 \quad (5)$$

donde  $S_{1,j}$  es la matriz de rigidez del elemento de viga,  $S_{1,j}^w$  es la matriz de rigidez debido al efecto del parámetro de Winkler,  $S_{1,j}^p$  es la matriz de rigidez debido al efecto del segundo parámetro de la fundación y/o de la carga axial y,  $Q_j$  es el vector de carga del elemento, y están dados por:

$$S_{1,j} = \begin{bmatrix} 12/L^3 & 6/L^2 & -12/L^3 & 6/L^2 \\ & 4/L & -6/L^2 & 2/L \\ & & 12/L^3 & -6/L^2 \\ & & & 4/L \end{bmatrix}$$

$$S_{1,j}^w = \begin{bmatrix} 13L/35 & 11L^2/210 & 9L/20 & -13L^2/420 \\ & L^3/105 & 13L^2/420 & -L^3/140 \\ & & 3L/35 & -11L^2/210 \\ & & & L^3/105 \end{bmatrix}$$

$$S_{1,j}^p = \begin{bmatrix} 6/5L & 1/10 & -6/5L & 1/10 \\ & 2L/15 & -1/10 & -L/30 \\ & & 6/5L & -1/10 \\ & & & 2L/15 \end{bmatrix}$$

$$Q_j = \{ q_n L/2 \quad -q_n L^2/12 \quad q_n L/2 \quad -q_n L^2/12 \}$$

de esta manera, la ecuación (5) se puede abreviar como:

$$S^n \phi^n = Q^n \quad (6)$$

donde  $S^n = S_{1,j} + S_{1,j}^w + S_{1,j}^p$ , representa la matriz de rigidez total del elemento "n" y  $Q^n$  el correspondiente vector de carga. Utilizando finalmente el tradicional sistema de ensamble de matrices para cada elemento, se obtiene:

$$S \phi = Q \quad (7)$$

donde  $S$  representa la matriz de rigidez total del sistema,  $Q$  el vector de carga y  $\phi$  el vector de incógnitas nodales.

### RESULTADOS

Se dividen los resultados de tres formas:

A) Validación del Programa.

Se comparan, los resultados obtenidos con el programa, con los analíticos entregados por Pavlovic [8], para la viga mostrada en la figura 4. ( $\beta L = 3\pi$ ). ( $\beta^2 = k/4EI$ ).

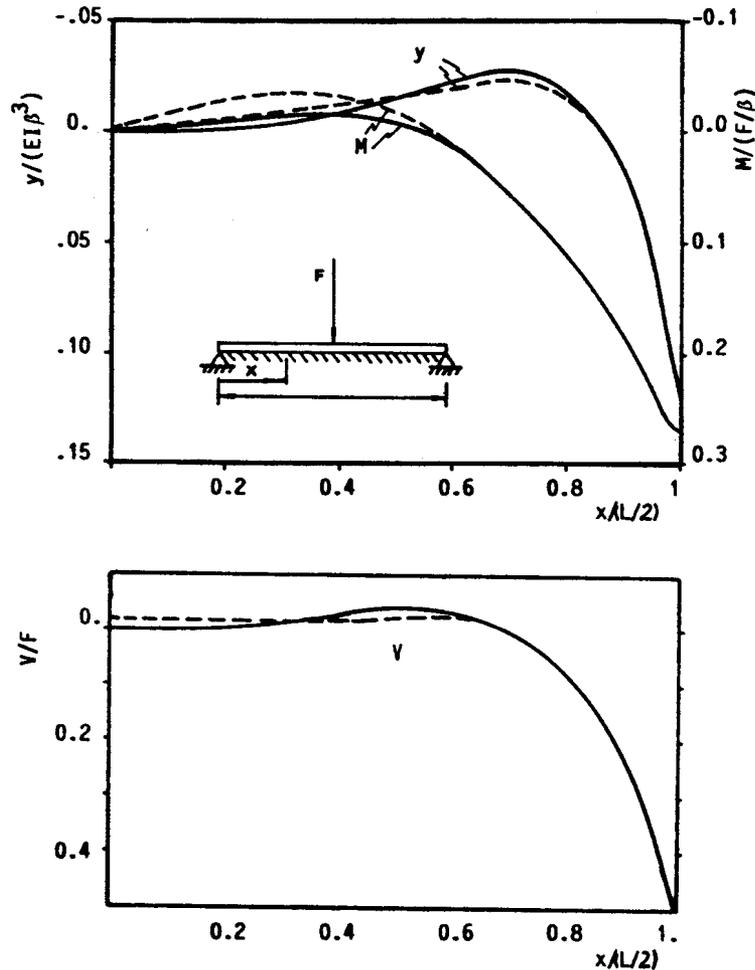


FIG.4. Viga estudiada por Pavlovic [8], Modelo Winkler (línea continua), y Modelo Cuasi-Winkler. (línea discontinua).

Se utilizaron los siguientes valores:  $F = 10.000$  (kg);  $L = 5.500$  (mm),  $k = 61.2E-2$  [ $\text{kg}/\text{mm}^2$ ];  $E = 5.200$  ( $\text{kg}/\text{mm}^2$ ),  $I = 342990.$  ( $\text{mm}^4$ ),  $\beta = 1.71 E-3$ . Las curvas mostradas en la figura 5 representan las deflexiones, momentos y corte a lo largo de la viga, para el caso de fundación Winkler (línea continua) y en el caso de considerar la fundación del tipo Cuasi Winkler (línea discontinua) al discretizar la viga en 30 elementos. Ambos resultados concuerdan plenamente con los obtenidos por Pavlovic. Se puede corroborar que en los puntos donde se aplica la carga y en sus proximidades, el modelo de Winkler es aceptable y concuerda con el que considera el modelo Cuasi-Winkler. La diferencia se presenta principalmente en las zonas donde la viga se separa de la fundación. En estas zonas, la deflexión duplica o triplica a las obtenidas con el modelo de Winkler. Este ejemplo permite visualizar las diferencias que pueden existir en problemas donde la zona de contacto entre viga y fundación sea pequeña, para lo cual se estudiaron los siguientes dos casos:

B) Influencia del Modelo Cuasi-Winkler.

Se presentan dos vigas cuyas soluciones analíticas están dadas por Timoshenko [15]. En ambos casos se utilizan los siguientes parámetros:  $E = 2.1E6$  ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ ),  $I = 8.E3$

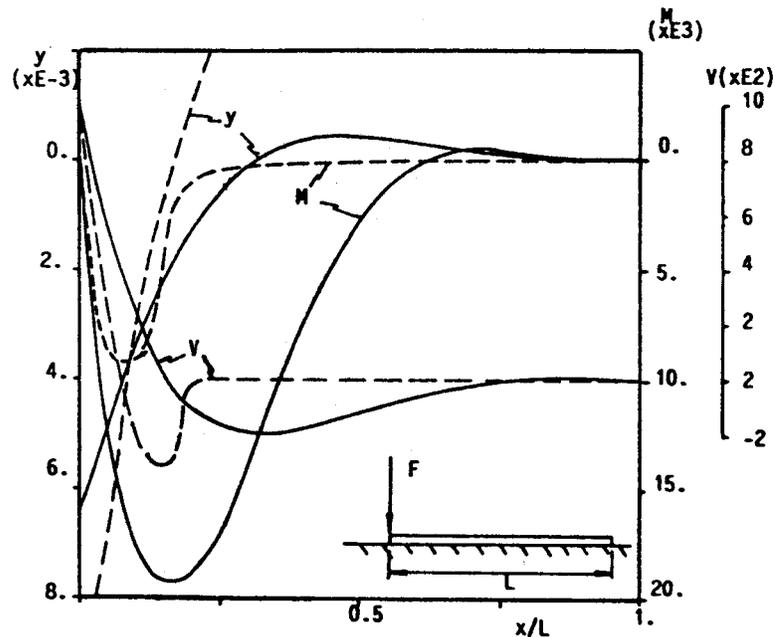


Fig. 5. Viga con carga puntual  $F$  y solución exacta (8).

(cm<sup>4</sup>),  $k=5184.9$  (kg-cm<sup>2</sup>),  $L=300$  (cm),  $\beta L=5$  con  $\beta^4 = k/4EI$ . Las soluciones exactas están dadas por las ecuaciones (8) y (9) respectivamente. Las figuras 5 y 6 entregan los valores para las deflexiones, momentos y cortes, con línea continua si se usa modelo Winkler y línea discontinua para el modelo Quasi-Winkler. Los valores "exactos" dados por las ecuaciones (8) y (9) respectivamente coinciden con los entregados por el programa usando modelo Winkler.

$$y_w = \{2F\beta/k(\sinh^2 \beta L - \cosh^2 \beta L)\} \{ \sinh \beta L \cdot \cosh \beta L \cdot \cosh \beta(L-x) + \sinh \beta L \cdot \cosh \beta L \cdot \cosh \beta(L-x) \} \quad (8)$$

$$y_w = (\bar{M}/2\beta^2 EI) e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x \quad (9)$$

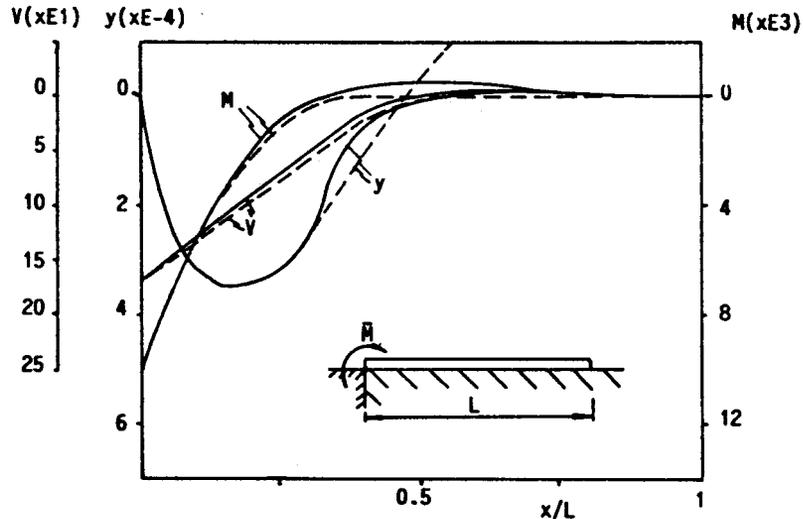


Fig.6. Viga con momento concentrado y solución exacta (9).

En estos casos las diferencias (principalmente en la deflexión) entre ambos modelos es notoria, incluso en puntos cercanos al punto de aplicación de la carga. Intuitivamente nos percatamos de la tendencia a levantarse en el extremo derecho de la viga lo que producirá en el modelo Quasi-Winkler las significativas diferencias. Es lógico que en el extremo derecho que se levanta, no actúan momentos ni corte, lo que produce que la viga presente la tendencia recta mostrada en ambos casos. Así el modelo Winkler produce considerables subestimaciones en la flexión y en los momentos y en el corte. Las divergencias entre ambos modelos es más notoria en la viga de la figura 5, así deflexión se hace exageradamente grande, al considerar el modelo quasi-Winkler, y el corte y momento tienden rápidamente a cero en el extremo derecho de la viga. Este ejemplo es una clara muestra del cuidado que se debe tener al aplicar el modelo quasi-Winkler, en vigas que tienen sus extremos libres.

C) Condición Bi-paramétrica:

Se estudia la influencia del segundo parámetro de la fundación "k1" para dos casos:

c1) Viga corta ( $\beta L = 1.9$ )

Para este tipo de viga, el modelo Winkler es satisfactorio y presenta resultados confiables. Se estudió la deflexión en el punto central de la viga (figura 7), utilizando los siguientes parámetros:  $E=2.1E6$ ,  $I=8E3$ ,  $k=103.7$ ,  $L=300$ . La deflexión  $\delta_c$ , se obtiene considerando  $k_1 = 0$ .

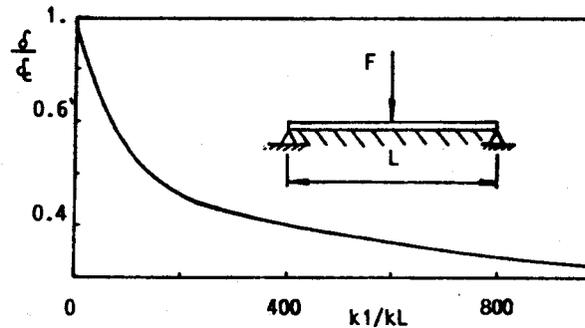


FIG.7. Influencia de  $k_1$  en una viga "corta".

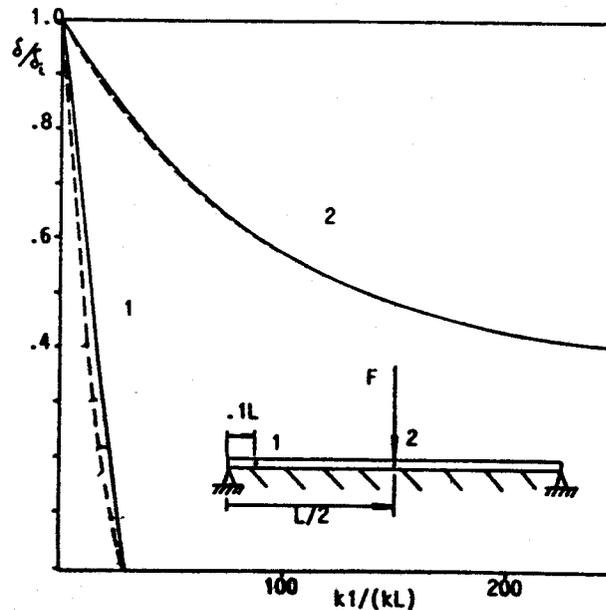


Fig.8. Influencia de  $k_1$  en una viga "larga"

c2) Viga larga ( $BL = 3\pi$ )

Se estudia la influencia de " $k_1$ " en la viga del ejemplo A, ya que al estar restringido el movimiento de ambos extremos, los resultados obtenidos entre ambos modelos no son tan divergentes. Se estudia la influencia en dos puntos de la viga: (i) en el centro (ii) en un punto donde la viga se levanta. Se grafica en forma adimensional, referido a las deflexiones en cada punto considerando  $k_1 = 0$ . ( $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ). La figura 8, muestra la variación de  $k_1$  y su influencia en la deflexión.

La gráfica 2 de la figura 8 representa la deflexión del punto central y es totalmente coincidente en ambos modelos, lo que era de esperarse, ya que para este tipo de vigas, la deflexión central es aproximadamente igual ya sea considerando el modelo e Winkler o el de Cuasi-Winkler. La gráfica 1, nos permite visualizar la influencia de  $k_1$  en un punto donde la viga se separa de la fundación. En estas zonas la consideración de  $k_1$  se hace muy sensible. Se puede ver que en todos los casos,  $k_1$  tiende a rigidizar la fundación, tal como lo indican las figuras 7y 8.

#### CONCLUSIONES

Se ha implementado un programa computacional que permite iterativamente estudiar fundaciones elásticas del tipo Winkler y Cuasi-Winkler, e incluye múltiples posibilidades en cuanto a variar los diferentes parámetros físicos que involucra el fenómeno. La comparación con resultados analíticos es muy satisfactoria y permitirá estudiar con confianza problemas en que se aplican cargas múltiples, incluso cargas de compresión, que para el caso de fundaciones Cuasi-Winkler presentan alto grado de inestabilidad sobre todo cuando se consideran vigas con extremos libres. La influencia  $k_1$  en vigas simétricas, como las estudiadas, con cargas puntuales, es poco significativa en los puntos cercanos a donde se aplica la carga y es altamente sensible en aquellos puntos donde la viga se separa de la fundación, que por lo general, son puntos alejados del punto de aplicación de la carga.

#### REFERENCIAS

- [1] Winkler, E. , "Die lehre von der elastizität und festigkeit", Prague, Dominicus, 1867.
- [2] Miranda, C. , Nair, K. , "Finite beams on elastic foundation". J. of Struct. Div. , Proceeding of ASCE, Vol. 92 (Nº ST2), págs. 131-142, 1966.
- [3] Bing Yuang, Ting, "Finite beams on elastic foundations with restraints", J. of Struct. Div., Proceed. of ASCE, Vol. 108 (Nº ST3), págs. 611-621, 1982.

- [4] Bing Yuang Ting, Mockry, F., "Beam on elastic finite element", J. of Struct. Engineering, Vol. 110 (NO10), págs. 2324-2339, 1984.
- [5] Kameswara Rao N. , Das Y., Anandakrishnan M. , "Variational approach to beams on elastic foundations" . J. of Eng. Mechanics Div. , Proceedings of ASCE, Vol. 97 (NO EM2), págs. 272-294, 1971.
- [6] Terzaghi, K., "Evaluation of coefficients of sub-grade reaction", Geotechnique, Vol. 5 (NO 4), págs. 297-326, 1955.
- [7] Keer A.D. , "Elastic and viscoelastic foundation models", J. of Applied Mechanics ASME, Vol. 31, págs. 491-498, 1964.
- [8] Pavlovic, M.N., Tsikkos, S., "Beams on quasi- Winkler foundations", Engineering Structures, Vol. 4, págs. 113-118, 1982.
- [9] Barrientos, G. , "El método de elementos finitos aplicado a vigas sobre fundación elástica". III Congreso Nacional de Ing. Mecánica, U. de Concepción, Chile, págs. 404-413, Octubre de 1988.
- [10] Beaufait, F. , Hoadley, P., "Analysis of elastic beams o non-linear foundations", Int. J. of Computers and Structures, Vol. 12, págs. 669-676, 1980.
- [11] Razaqpur, A. B. , "Stiffness of beams-columns on elastic foundation with exact shape functions", Int. J. of Computers and Structures, Vol. 24, NO 3, págs. 813-819, 1986.
- [12] Yankellevsky, D. , Eisenberger M. , "Analysis of a beam-column on elastic foundation" , Int. J. of Computers and Structures, Vol. 23, NO 3, págs. 351-356, 1986.
- [13] Imbert, J. F. , "Analyse des structures par elements finis", CEPA-DUES editions, Toulouse, 1982.
- [14] Segerlind L. J. , "Applied finite element analysis", John Wiley and Sons, New York, 1976.
- [15] Timoshenko S., "Strength of materials", Parte II, 3ª edición, 1956.

