

MODELO ELASTO - PLASTICO CON ENDURECIMIENTO PARA
HORMIGÓN BAJO ESTADOS MULTIAXIALES DE TENSION.

José Ramón Orrego
Roberto Antonio López Anido

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario.
Rosario - Argentina.

RESUMEN

En el presente trabajo se desarrolla una aplicación de la Teoría Incremental de Plasticidad al Hormigón en base al sofisticado Criterio de falla de Willam - Warnke de cinco parámetros (se incluyen criterios mas simples como casos particulares). La superficie de fluencia inicial y las superficies de cargas sucesivas son obtenidas a partir de la superficie de falla considerando endurecimiento isotrópico. En base a la función de fluencia obtenida y con la hipótesis de plasticidad asociada se derivaron las expresiones que proveen la relación plástica incremental tensión-deformación.

El modelo propuesto has sido codificado en un programa no lineal de elementos finitos disponible para el análisis de estructuras de hormigón. Se muestran valores numéricos obtenidos, que se confrontan con resultados experimentales.

ABSTRACT

In this paper it is developed an application of the Incremental Plasticity Theory to Concrete based on the sophisticated Five-parameter Failure Criterion of Willam - Warnke (they are also included simpler criteria as particular cases). The initial yield surface and the subsequent loading surfaces are obtained from the failure surface considering isotropic work-hardening. On the basis of the obtained yield function and on the assumption of associated plasticity, are derived the expresions that provide the stress-strain plastic incremental relation.

The proposed model has been coded in a nonlinear finite element program available for concrete structural analysis. They are presented numerical results that are compared with experimental data.

INTRODUCCION

El Método de Elementos Finitos no lineal ha provisto una poderosa herramienta para determinar la distribución interna de tensiones y deformaciones en una estructura de hormigón. Sin embargo la falta de un modelo material adecuado ha sido el mayor obstáculo para un análisis riguroso de las estructuras de hormigón. Se ha centrado entonces la atención en el desarrollo de modelos matemáticos constitutivos que puedan caracterizar adecuadamente el comportamiento tensión-deformación y de falla del hormigón bajo condiciones de tensión generales en tres dimensiones. Hasta el presente una gran variedad de modelos han sido propuestos [1], [4], entre ellos los de tipo elástico no lineal y los de tipo plástico.

En los últimos años la Teoría de Plasticidad ha sido amoliamente adoptada en el modelado de los comportamientos constitutivos de materiales friccionales como hormigón, suelos y rocas. El uso de modelos plásticos para el hormigón presenta varias ventajas [1], [7]. En principio, tiene en cuenta el comportamiento dependiente de la historia de tensiones, así mismo, pueden ser evaluadas deformaciones residuales debidas a la descarga.

El objetivo primario de este trabajo de investigación es desarrollar un modelo constitutivo relativamente comprensible y sofisticado para el análisis de estructuras de hormigón mediante elementos finitos

Los aspectos del estudio son los siguientes:

- a) El fundamento teórico del desarrollo del modelo está basado en la Teoría Incremental de Plasticidad.
- b) El criterio de falla adoptado es el de Willam - Warnke de cinco parámetros, que permite incluir como casos particulares modelos mas simples de uno, dos y tres parámetros.
- c) El modelo propuesto ha sido codificado e implementado en un programa existente de análisis no lineal por elementos finitos.

HIPOTESIS BASICAS

Con el objeto de aplicar la teoría incremental de plasticidad al hormigón, cuatro hipótesis básicas deben ser hechas [7]:

- 1) La condición de falla que establece el límite superior en el espacio de tensiones.
- 2) La superficie de fluencia inicial que define el comienzo del flujo plástico.
- 3) La regla de endurecimiento que describe la evaluación de las sucesivas superficies de carga.
- 4) La regla de flujo que está relacionada con una función de potencial plástico y provee la relación plástica incremental tensión-deformación.

Como una aproximación al comportamiento real del hormigón, se suponen las siguientes hipótesis simplificadoras:

Una vez establecida una adecuada superficie de falla mediante el criterio de Willam-Warnke, la superficie de fluencia inicial se considera con una topología similar a partir de una forma contraída

Posteriormente las subsecuentes superficies de carga son obtenidas suponiendo una expansión uniforme de la superficie de fluencia inicial (Endurecimiento Isotrópico). Para la determinación de la regla de flujo se considera la teoría de Plasticidad Asociada, es decir la función de potencial plástico se adopta igual a la función de fluencia dando lugar a la condición de normalidad.

FORMULACION DE LA SUPERFICIE DE FALLA

Willam y Warnke (1975), sugirieron una superficie de falla de tres parámetros para el hormigón en régimen de tracción y de compresión moderada. Este modelo, que presentaba meridianos rectos y una sección transversal no circular, fue posteriormente refinado mediante la adición de dos parámetros para describir meridianos curvos, extendiendo en consecuencia el rango de aplicación a la zona de compresión elevada.

El modelo predice la falla [1], si el estado de tensiones satisface la condición:

$$f_u(\sigma_{ij}) = \frac{\tau_m}{F(\sigma_m, \theta)} - f_c = 0 \quad (1)$$

donde: f_c es la resistencia de compresión uniaxial del hormigón. ($f_c > 0$)

Es decir la superficie de falla es expresada en términos de las componentes de tensión media σ_m , τ_m y el ángulo de similitud θ .

Las componentes de tensión media σ_m y τ_m representan la distribución media de tensiones normales y tangenciales sobre una superficie esférica infinitesimal. Las mismas están relacionadas con las tensiones octahédricas σ_{oct} y τ_{oct} , los invariantes de tensión J_1 y J_2 y las coordenadas hidrostáticas y desviadoras ξ y r , en la forma, [1] :

$$\sigma_m = \sigma_{oct} = \frac{1}{3} J_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \xi \quad (2)$$

$$\tau_m^2 = \frac{3}{5} \tau_{oct}^2 = \frac{2}{5} J_2 = \frac{1}{5} r^2$$

De (1) se deduce que τ_m es función de σ_m y θ :

$$\frac{\tau_m}{f_c} = F(\sigma_m, \theta) = \frac{r(\sigma_m, \theta)}{\sqrt{5} f_c} \quad (3)$$

La superficie de falla es definida expresando en primer lugar los meridianos de tracción y de compresión de la superficie para $\theta=0^\circ$ y $\theta=60^\circ$ por dos parábolas de segundo grado en la forma siguiente :

$$F_t = \frac{r_t}{\sqrt{5} f_c} = a_0 + a_1 \frac{\sigma_m}{f_c} + a_2 \left(\frac{\sigma_m}{f_c} \right)^2 \quad \text{para } \theta=0^\circ$$

$$F_c = \frac{r_c}{\sqrt{5} f_c} = b_0 + b_1 \frac{\sigma_m}{f_c} + b_2 \left(\frac{\sigma_m}{f_c} \right)^2 \quad \text{para } \theta=60^\circ \quad (4)$$

Estas curvas están conectadas por una superficie elipsoidal, cuya traza en el plano desviador está definida por :

$$r = \frac{2(r_c^2 - r_t^2) \cos \theta + (2r_c r_t - r_c^2) \sqrt{4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c}}{4(r_c^2 - r_t^2) \cos^2 \theta + (r_c - 2r_t)^2} \quad (5)$$

donde el ángulo θ es función de las tensiones principales a través de:

$$\cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)}} \quad (6)$$

con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

A continuación se presenta la construcción gráfica del modelo de cinco parámetros:

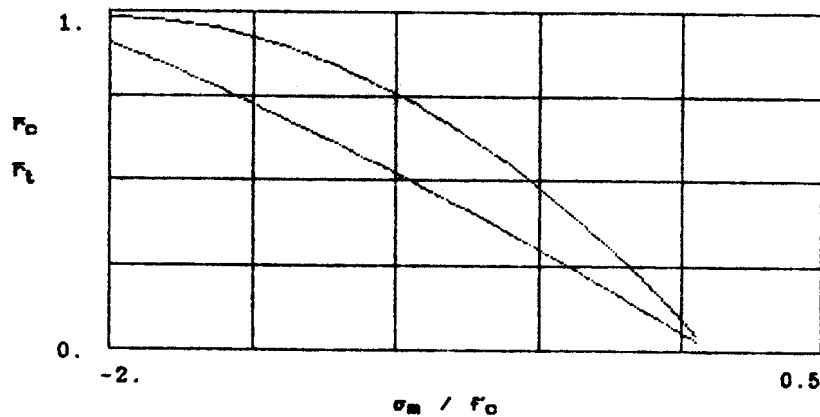


Fig 1 Sección hidrostática.
Meridianos de compresión ($\theta = 60^\circ$) y de tracción ($\theta = 0^\circ$)

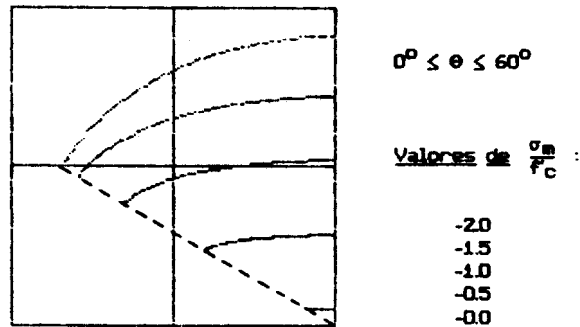


Fig 2 Sección desviadora F.

PROPIEDADES GENERALES DE LA SUPERFICIE DE FALLA

Las principales características de este criterio de falla [1] pueden resumirse como sigue :

- 1) Involucra los tres invariantes de tensión en la forma PC_1, J_2, Θ o idénticamente $f(\sigma_m, \tau_m, \Theta)$.
- 2) Presenta una superficie suave con gradiente único en cualquier punto.
- 3) La traza en el plano desviador es periódica con un periodo de 120° y tiene 60° de simetría.
- 4) Presenta una sección transversal no circular en el plano desviador, que varía desde aproximadamente triangular hasta aproximadamente circular, con el incremento de presión hidrostática.
- 5) Los meridianos son parábolas de segundo grado abiertas en la dirección del eje hidrostático negativo.
- 6) La superficie es convexa si los parámetros del modelo satisfacen las siguientes condiciones :

$$\begin{array}{lll} a_0 > 0 & a_1 \leq 0 & a_2 \leq 0 \\ b_0 > 0 & b_1 \leq 0 & b_2 \leq 0 \end{array}$$
- 7) El modelo cubre todas las combinaciones de tensión en el rango de la mayoría de las aplicaciones prácticas.
- 8) El criterio de falla incluye diversos criterios mas simples como casos especiales. Los cinco parámetros pueden ajustarse de forma de verificar los siguientes criterios :

- Modelo de Von Mises (un parámetro)

$$a_0 = b_0 \quad \vee \quad a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$$

- Modelo de Drucker-Prager (dos parámetros)

$$a_0 = b_0 \quad a_1 = b_1 \quad \vee \quad a_2 = b_2 = 0$$

- Modelo de tres parámetros de Willam-Warnke

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} \quad \vee \quad a_2 = b_2 = 0$$

- Modelo correspondiente de cuatro parámetros

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

DETERMINACION DE LOS PARAMETROS

Los cinco parámetros del presente criterio refinado de Willam-Warnke son determinados de forma tal que las siguientes tensiones de falla estén contenidas en el criterio. Esto incluye tres ensayos simples y la determinación de dos puntos de resistencia en el régimen de compresión elevada.

- 1) Resistencia a compresión uniaxial f_c ($\Theta = 60^\circ, f_c > 0$)
- 2) Resistencia a tracción uniaxial f_t ($\Theta = 0^\circ$)
- 3) Resistencia a compresión equibiaxial f_{bc} ($\Theta = 0^\circ, f_{bc} > 0$)
- 4) Punto de tensión de compresión elevada en el meridiano de tracción $(\sigma_m/f_c, \tau_m/f_c)$ ($\Theta = 0^\circ$)
- 5) Punto de tensión de compresión elevada en el meridiano de compresión $(\sigma_m/f_c, \tau_m/f_c)$ ($\Theta = 60^\circ$)

Además, las parábolas deben pasar a través de un punto común σ_m en el eje hidrostático, esto impone la condición:

$$r_1(\rho) = r_2(\rho) = 0 \quad \text{con} \quad \rho = \frac{\sigma_m}{f_c} > 0 \quad (7)$$

En consecuencia, son usados ensayos a lo largo de los dos meridianos mas la condición adicional (7) para determinar los seis parámetros $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$. Esto involucra la solución de dos sistemas de tres ecuaciones lineales.

SUPERFICIE DE FLUENCIA INICIAL Y SUPERFICIES DE CARGA

Para indicar la iniciación o la continuación de la deformación plástica, en base al criterio de falla adoptado (1), y con la hipótesis de endurecimiento isotrópico consideramos la siguiente función:

$$f(g, g^p) = F(g) - \sigma_e(z_p) = 0 \quad (8)$$

donde:

$$F(g) = \frac{\tau_m}{F(\sigma_m, \theta)} \quad \text{Función de fluencia}$$

$\sigma_e(z_p)$ Tensión efectiva obtenida como la tensión de fluencia para compresión uniaxial.

z_p Deformación plástica efectiva.

El rango de variación de la tensión efectiva resulta:

$$f_0 \leq \sigma_e(z_p) \leq f_c \quad (9)$$

donde:

f_0 Tensión de fluencia inicial para compresión uniaxial.

Por lo tanto la función de fluencia propuesta incluye como casos extremos:

- la superficie de fluencia inicial para $\sigma_e(0) = f_0$
- el criterio de falla de Willam - Warnke para $\sigma_e(z_p) = f_c$

RELACION INCREMENTAL TENSION - DEFORMACION

Después de la fluencia inicial el comportamiento del hormigón se considera parcialmente elástico y parcialmente plástico. Durante un incremento de carga, la variación de deformación total se descompone en una componente elástica y en otra plástica, [1], [2], [3], es decir:

$$d g = d g^e + d g^p \quad (10)$$

El incremento de deformación elástica puede obtenerse como:

$$d g^e = D^{-1} \cdot d \sigma \quad (11)$$

donde:

D Matriz de constantes elásticas

Por otra parte, el incremento de deformación plástica puede obtenerse, en base a la regla de flujo, como:

$$d \xi^p = d \lambda \frac{\partial G}{\partial \xi} \quad (12)$$

donde:

$G(\xi)$ Potencial plástico.

Con la hipótesis de plasticidad asociada se adopta:

$$G(\xi) = F(\xi) \quad (13)$$

Sustituyendo las expresiones (11) y (12) en (10) y despejando el incremento de tensiones, se obtiene:

$$d \xi = D \cdot d \xi - d \lambda \cdot D \cdot \frac{\partial G}{\partial \xi} \quad (14)$$

Donde $d \lambda$ es un escalar positivo llamado multiplicador plástico que puede ser obtenido como:

$$d \lambda = \frac{\frac{\partial F(\xi^0, \xi^p)}{\partial \xi} \cdot D \cdot d \xi}{A + \left(\frac{\partial F(\xi^0, \xi^p)}{\partial \xi} \right)^T \cdot D \cdot \frac{\partial G(\xi^0, \xi^p)}{\partial \xi}} \quad (15)$$

donde:

ξ^0 Tensiones previas a la aplicación del incremento de deformación $d \xi$.

A Parámetro de endurecimiento.

Finalmente la relación constitutiva del material en régimen elastoplástico resulta:

$$d \xi = D_{ep} d \xi \quad (16)$$

$$\text{con } D_{ep} = D - \frac{D \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)^T \cdot \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot D}{A + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^T \cdot D \cdot \frac{\partial G}{\partial \xi}}$$

VECTOR DE FLUJO

Para obtener la relación constitutiva incremental (16), se debe desarrollar la correspondiente expresión del gradiente:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \tau_m} \cdot \frac{\partial \tau_m}{\partial \xi} \quad (17)$$

El primer término representa la componente hidrostática y los restantes la componente desviadora.

Para el modelo de cinco parámetros el gradiente queda definido en términos del estado actual de tensiones a través de las componentes de tensión media σ_m , τ_m y el ángulo de similitud θ , en adición de los seis grados de libertad $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$. Si bien la expresión del gradiente es bastante elaborada, en las aplicaciones computacionales esta generalidad del modelo es beneficiosa. Por último, la formulación del gradiente para el modelo de cinco parámetros puede reducirse a los casos especiales de Von Mises, Drucker-Prager y el modelo correspondiente de tres parámetros.

DEFORMACION PLASTICA EFECTIVA. PARAMETRO DE ENDURECIMIENTO.

La relación tensión efectiva - deformación plástica efectiva, que es gobernada por un simple ensayo de compresión uniaxial, [1], tiene la forma general:

$$\sigma_e = \sigma_e(\bar{\epsilon}_p) \quad (18)$$

En el presente trabajo, esta función es obtenida empleando la conocida ecuación de Saenz para la representación uniaxial $\sigma - \epsilon$ que necesita de tres parámetros experimentales obtenidos a partir del ensayo de compresión simple, [1], [6].

Descomponiendo la deformación en una componente elástica y otra plástica, se puede expresar la mencionada ecuación en función de la deformación plástica.

Posteriormente derivando se obtiene la relación:

$$H(\sigma_e, \bar{\epsilon}_p) = \frac{d\sigma_e}{d\bar{\epsilon}_p} \quad (19)$$

Donde $H(\sigma_e, \bar{\epsilon}_p)$ es obtenido como la pendiente local de la curva uniaxial tensión de compresión - deformación plástica adoptada y tiene la siguiente expresión:

$$H(\sigma_e, \bar{\epsilon}_p) = \frac{\frac{2\sigma_e^2}{E\epsilon_c^2} - \left(\frac{E}{F_0} - \frac{2}{\epsilon_c} + \frac{2\bar{\epsilon}_p}{\epsilon_c^2}\right)\sigma_e + E}{\frac{3\sigma_e^2}{E\epsilon_c^2} + 2\sigma_e\left(\frac{1}{F_0} - \frac{2}{E\epsilon_c} + \frac{2\bar{\epsilon}_p}{E\epsilon_c^2}\right) + \left(\frac{E\bar{\epsilon}_p}{F_0} - \frac{2\bar{\epsilon}_p}{\epsilon_c} + \frac{\bar{\epsilon}_p^2}{\epsilon_c^2}\right)} \quad (20)$$

En base al modulo de plasticidad H , asociado con la tasa de expansión de la superficie de fluencia o carga, se obtiene la relación incremental:

$$d\sigma_e = H(\sigma_e, \bar{\epsilon}_p) \cdot d\bar{\epsilon}_p \quad (21)$$

Posteriormente integrando sobre el camino de deformación se obtiene la relación $\sigma_e - \bar{\epsilon}_p$ (18).

Se grafican los valores obtenidos en base a la formulación anterior adoptando los parámetros del material según Kupfer et al. [5]

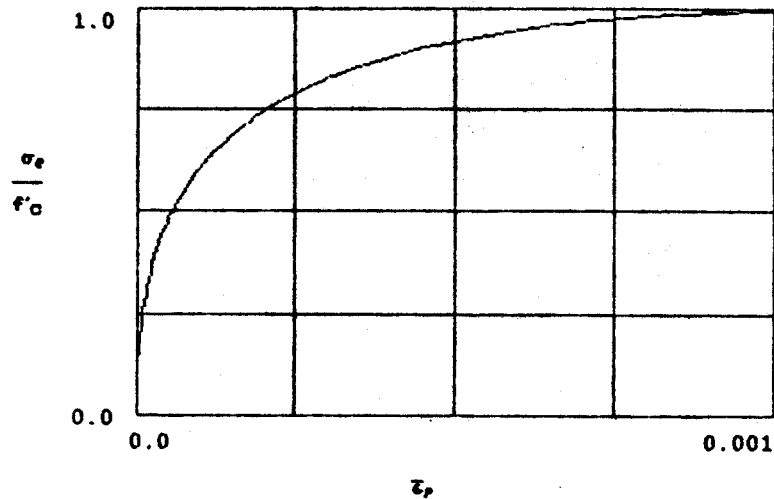


Fig 3 Relación $\sigma_e / f'c - \epsilon_p$

El incremento de deformación plástica efectiva es definido en términos del trabajo plástico por unidad de volumen en la forma, [1]:

$$dW^p = \sigma_e \cdot d\epsilon_p \quad (22)$$

El incremento de trabajo plástico es calculado como:

$$dW^p = g \cdot d\epsilon^p = d\lambda \cdot g \cdot \frac{\partial G}{\partial g} \quad (23)$$

El parámetro de endurecimiento A es una función del trabajo plástico W^p y está relacionado con el módulo plástico H , [1], [2], [7], según:

$$A = - \frac{\partial F}{\partial W^p} \cdot \frac{\partial W^p}{\partial \epsilon^p} \cdot \frac{\partial G}{\partial g} = - \frac{1}{\sigma_e} \cdot \frac{\partial F}{\partial \epsilon_p} \cdot \frac{\partial (\epsilon^p \cdot g)}{\partial \epsilon^p} \cdot \frac{\partial G}{\partial g}$$

$$A = \frac{1}{\sigma_e} \cdot \frac{d\sigma_e}{d\epsilon_p} \cdot g \cdot \frac{\partial G}{\partial g} = \frac{H}{\sigma_e} \cdot g \cdot \frac{\partial G}{\partial g} \quad (24)$$

COMPROBACION EXPERIMENTAL DEL MODELO.

El modelo constitutivo presentado ha sido implementado en un programa de elementos finitos para análisis no lineal de estructuras y se ha aplicado para evaluar la respuesta numérica de ensayos sobre especímenes para los cuales son conocidos los resultados experimentales.

El ejemplo que se presenta es la aplicación del modelo a los conocidos Ensayos de compresión biaxial de Kupfer et al [5]. El mismo consiste en el estudio del comportamiento de elementos de hormigón de 20 x 20 x 5 cm. sometidos a diferentes condiciones de carga: compresión uniaxial, compresión equibiaxial, compresión biaxial no simétrica.

Los parámetros relevantes del material son:

$$\begin{aligned} E &= 32500 \text{ Mpa} \\ \epsilon_c &= 22 \text{ } \mu\text{/}\mu\text{m} \\ f'_c &= 32.8 \text{ Mpa} \end{aligned}$$

Los parámetros adoptados para el modelo son:

$$\begin{aligned} f'_t &= 0.09 f'_c \\ f'_{bp} &= 1.16 f'_c \end{aligned}$$

A continuación se presenta la discretización por elementos finitos utilizada para modelizar el ensayo y las gráficas comparativas entre los resultados experimentales y numéricos para distintas relaciones entre las tensiones principales σ_1 / σ_2 .

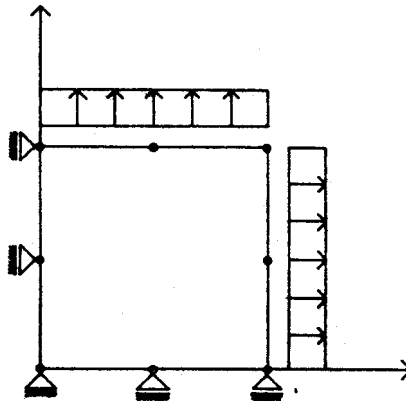


Fig. 4 Geometría, discretización por elementos finitos.

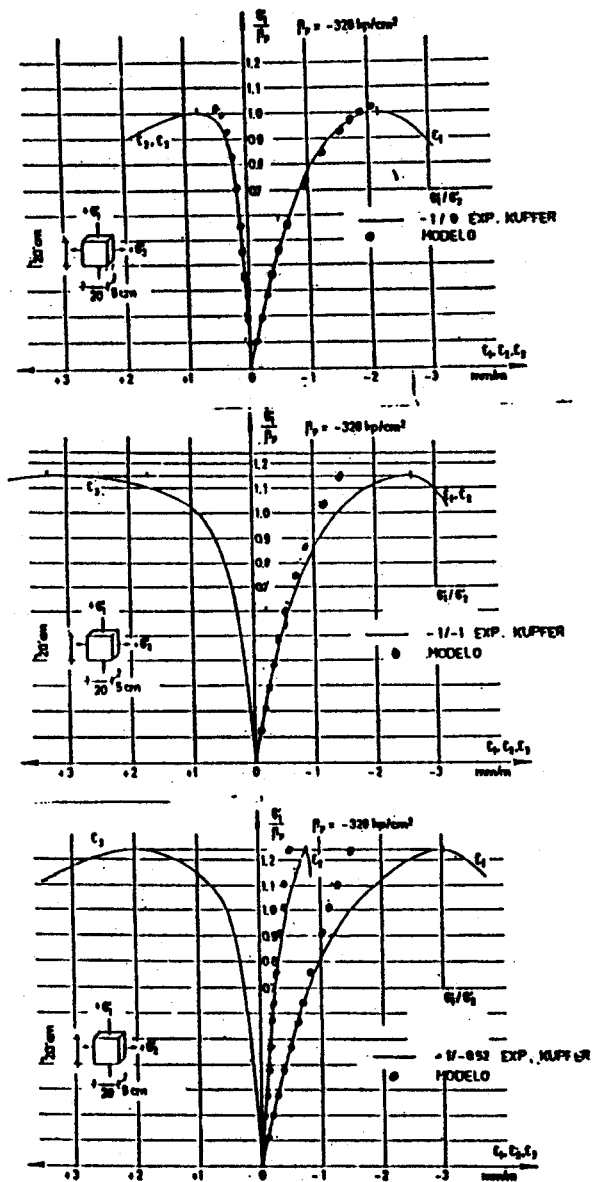


Fig. 5 Resultados para distintas relaciones de $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

CONCLUSIONES

El presente modelo de plasticidad incremental, se basa en el Criterio de Falla de Willam-Warnke, reconocido como uno de los que mejor reproducen los resultados experimentales obtenidos de ensayos sobre hormigón, en un amplio rango de magnitudes y relaciones de tensión.

Dicha superficie ha sido adoptada también como superficie de carga y sobre la misma se aplican los conceptos clásicos de la plasticidad asociada.

La evolución de la superficie se realiza en base a una curva de endurecimiento, que permite obtener el módulo plástico H a partir de la curva uniaxial $\sigma - \epsilon$ expresada a través de la ecuación de Saenz, llegando a establecer el incremento de tensión de compresión uniaxial en función de la deformación plástica efectiva.

Este estudio es la fase inicial del desarrollo de un modelo cuyos resultados podrán mejorarse a través de la expansión no uniforme de la superficie de carga, tomando en cuenta la variación de cada uno de los parámetros del modelo en forma independiente por efecto de la deformación plástica producida.

REFERENCIAS

- [1] CHEN, W.F., "Plasticity in Reinforced Concrete", Mc Graw-Hill, New York, 1982.
- [2] ZIENKIEWICZ, O.C., "El Método de los Elementos Finitos", Ed. Reverté, S.A., Barcelona, 1980.
- [3] OHEN, D.R.J. - HINTON, E., "Finite Elements in Plasticity. Theory and Practice", Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K., 1980.
- [4] C.E.B., "Concrete under Multiaxial States of Stress. Constitutive Equations for Practical Design", Bulletin d'Information No 156, 1983.
- [5] KUPFER, H. B. - HILSDORF, H. - RUSCH, H., "Behavior of concrete under biaxial stresses", Journal A.C.I., Vol. 66, No 8, 1969.
- [6] SAENZ, L.P., "Discussion of Equations for the Stress-Strain Curve of Concrete by Desayi and Krishnan", Journal of American Concrete Institute, Vol. 61. September, 1964.
- [7] HAN, D.J. - CHEN, W.F., "Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures", Journal of Engineering Mechanics División, ASCE, Vol. 113, No. EM4, April, 1987.