

ANALISIS COMPARATIVO DE FORMULACIONES DE MATRICES GEOMETRICAS EN PROBLEMAS DE ESTABILIDAD ELASTICA LINEALIZADA

Juan A. Ronda Vásquez

Departamento de Estructuras. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Córdoba.
Córdoba - Argentina

Raul Rosas e Silva

Pontifficia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Estruturas.
M.S. Vicente, 225, Gávea 22453 R.J.
Rio de Janeiro - Brasil

RESUMEN

Una breve revisión en la literatura muestra discrepancias en las diversas formulaciones de matrices geométricas para efectos de tensiones iniciales.

Se hace una presentación de las diversas formulaciones y se implementan las matrices geométricas a un programa computacional disponible, para el análisis de estabilidad elástica linealizada de pórticos espaciales. Resultados numéricos son presentados para configuraciones simples, mostrando diferencias substanciales entre las cargas críticas calculadas a través de las distintas matrices geométricas. Un ensayo de laboratorio corrobora las previsiones numéricas que consideran fuerzas cortantes y momentos semitangenciales.

ABSTRACT

A brief review of the literature on the subject of geometric matrices for initial stress effects in space frames is presented. It is shown that formulations differ substantially when bending effects are considered. Several geometric matrices were implemented in a computer program which performs linearized buckling analyses. Numerical results are presented in which high discrepancies are observed in the buckling loads obtained by using different matrices. Such results are discussed and explained. Experimental evidence corroborates the need to include shear effects and semitangential moments.

INTRODUCCION

Se trata aquí de tipos particulares de matrices geométricas, llamadas de matrices de tensiones (o esfuerzos) iniciales, que son utilizadas para un análisis computacional de problemas estructurales en que ocurren no-linealidades asociadas a cambios en la geometría de la estructura. A pesar de que estas matrices son utilizadas en un esquema de análisis no-lineal incremental, con actualización de la geometría e iteraciones de equilibrio, ellas son particularmente útiles en la determinación de cargas críticas en un análisis linealizado de autovalor. Este trabajo considera solamente el problema de estabilidad linealizado, de vigas y pórticos en el espacio, sujetos a cargas conservativas, en el régimen elástico, con pequeños desplazamientos, lo que conduce a un problema generalizado de autovalor lineal con matrices simétricas. Las aproximaciones aquí utilizadas corresponden a pequeñas deformaciones, con rotaciones moderadas, y permiten obtener la matriz geométrica en forma comprobadamente adecuada para el cálculo de cargas de estabilidad linealizada.

Se muestra primeramente que dentro de las hipótesis básicas, hay formulaciones substancialmente diferentes en la literatura, que llevan a discrepancias elevadas en los resultados obtenidos, conforme a lo mencionado en [1]. Seguidamente se discuten las controversias en relación a esa cuestión. Se adoptó como herramienta de análisis un programa disponible y comprobado [9] y [10], que fue modificado para utilizar diferentes matrices geométricas de la literatura. Los resultados numéricos, bastante diferentes entre sí, son presentados sistemáticamente. Para dirimir las dudas, fue necesario concebir un ensayo en una estructura susceptible a pandeo lateral, cuyos resultados son presentados y confirman las observaciones conclusivas de este trabajo.

OBTENCION DE LAS MATRICES GEOMETRICAS

Limitaciones de espacio impiden presentar la formulación completa del método de la rigidez, que permite obtener las tensiones actuantes en la estructura através de un procedimiento standard disponible tanto en la literatura como en innumerables programas computacionales. La matriz geométrica K_g , adicionada a la matriz de rigidez elástica K_e , llevan a la ecuación matricial de equilibrio (el símbolo sobre la variable indica vector (minúsculas) o matriz (mayúsculas)):

$$(K_e + K_g)dr = df \quad (1)$$

donde dr y df son los incrementos en los desplazamientos y en las fuerzas generalizadas de la estructura o elemento. Por lo tanto, en un análisis no-lineal incremental puede ser fácilmente implementada, asociada al método de Newton-Raphson o a métodos de integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, bastando con notar que K_e y K_g deben ser reformuladas siempre que ocurran alteraciones apreciables en la geometría. En el problema de estabilidad linealizada, se admite que tales matrices son formuladas en

la geometría inicial, y que K_G es proporcional a un determinado nivel de carga, designado por un parámetro c , de forma que se puede escribir

$$(K_e + cK_G) d\bar{r} = d\bar{f} \quad (2)$$

Cuando se alcanza el nivel de carga c_{CR} , la matriz del sistema se vuelve singular, pudiendo haber incrementos de desplazamientos sin aumento de las cargas, por lo tanto c_{CR} es el menor autovalor del problema generalizado

$$(K_e + cK_G) d\bar{r} = 0 \quad (3)$$

Para la obtención de c_{CR} , son disponibles técnicas computacionales eficientes, que están descritas en [9] y [10].

Para nuestro caso en estudio, del elemento de viga o pórtico espacial sobre rotaciones moderadas, la matriz geométrica es obtenida usualmente de la expresión de la energía de deformación asociada a las componentes cuadráticas del tensor Lagrangeano de las deformaciones. Cabe resaltar que las matrices geométricas obtenidas de esta forma, no consideran el trabajo no-lineal proveniente del cargamento aplicado, que debe ser incluido en forma de matrices adicionales, llamadas matrices de rigidez o de dirección de las cargas [10].

Se utiliza la notación indicial asociada a la matricial con las respectivas convenciones. Los ejes de referencia en las direcciones longitudinal y transversal de la viga (x_1, x_2, x_3). Los desplazamientos respectivos son designados por u_i ($i=1$ a 3); las tensiones existentes en el elemento por T_{ij} ; y las componentes cuadráticas de las deformaciones por D_{ij} , siendo estas últimas obtenidas por la siguiente expresión:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (4)$$

La ecuación de la energía correspondiente es obtenida integrando sobre el volumen V del elemento:

$$U = \int_V T_{ij} D_{ij} dV \quad (5)$$

Los desplazamientos de un punto de la sección transversal en la dirección x_i , pueden ser calculados a partir de los desplazamientos nodales \bar{r} , através de funciones de interpolación dispuestas en vectores $n_i(x_1, x_2, x_3)$, como se muestra en la siguiente ecuación (el índice superior T indica transposición):

$$u_i = n_i^T \bar{r} \quad (6)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez geométrica obtenida através de consideraciones usuales del análisis matricial, resulta de la siguiente forma:

$$K_G = \int_V n_{k,i} T_{ij} n_{k,j}^T dV \quad (7)$$

Una descripción detallada de la manera de obtener esta matriz geométrica, se encuentra en la referencia [13].

En la ecuación (7), al ser efectuada la integración parcial en la sección, quedan explícitos los esfuerzos resultantes. Para el caso en estudio, nos limitamos a los esfuerzos usuales en vigas, despreciando los esfuerzos asociados al abeo (bimomento). De esta manera, llegamos a la expresión siguiente (suponiendo x_2 y x_3 los ejes principales de la sección), en ausencia de cargas internas al elemento:

$$K_G = P_1 K_G^1 + M_2 K_G^2 + M_3 K_G^3 + M_1 K_G^4 + P_2 K_G^5 + P_3 K_G^6 \quad (8)$$

donde P_1 es la fuerza axial; M_1 es el momento torsor; M_2 y M_3 son los momentos flectores medios; P_2 y P_3 son las fuerzas cortantes.

Los términos explícitos de las diversas matrices en (8), pueden ser obtenidos de las diversas referencias citadas. En el desarrollo se buscó apenas fornecer un mínimo de informaciones que permita una descripción comparativa de los diferentes enfoques encontrados en la literatura, lo que es hecho a continuación.

Elementos usuales en el análisis de pórticos espaciales son formulados con interpolaciones Hermitianas y Lagrangeanas. Para el caso de interpolaciones Hermitianas, el esquema tradicional usual para vigas esbeltas, utilizando 12 grados de libertad, es emplear funciones cúbicas para flexión, la rotación de flexión es obtenida por derivación de los desplazamientos transversales, y es interpolada con funciones cuadráticas. El desplazamiento axial es interpolado con funciones lineales; la rotación de torsión es interpolada linealmente en los trabajos de Argyris et al. [1] y cúbicamente en los de Bazant y Nimeiri [2], Gallagher y Barsoum [3], y Yang y McGuire [4] y [5]. Tebedge et al. [6] presenta matrices con errores algebraicos. Elias [7] presenta un tratamiento detallado, con matrices similares a las de Argyris [1] y Yang y McGuire [4] y [5].

Un enfoque que facilita la consideración de cambios en la geometría es mencionado por Bathe [8], tanto para elementos Hermitianos como Lagrangeanos. Ronda [9], desarrolla una matriz geométrica para elementos de pórtico espacial, usando funciones de interpolación Lagrangeana lineal, independientemente para translaciones y rotaciones, através de una formulación paramétrica de la geometría y los desplazamientos, lo que evita algunos problemas observados en los elementos Hermitianos.

CONSIDERACION DE EFECTOS EN LAS DIVERSAS FORMULACIONES

Sería de esperar que los elementos listados mas arriba, forneciesen resultados similares para cargas críticas, considerando diferentes grados de convergencia en los elementos, excepto en la referencia [6] que contiene errores algebraicos, por lo que fué descartada.

Matrices de rigidez geométrica para elementos de barra simple y viga-columna, fueron obtenidas por diversos autores considerando diferentes efectos, como el efecto de la carga axial inicial [1], momentos flectores iniciales [3], torque y bimomento iniciales (medidas de rotación y alabeo de la sección) [3], efectos de deformación por alabeo [2], consideración de la naturaleza de momentos flectores y torsores [1], [4], y la inclusión de matrices de rigidez de las cargas [1].

Un aspecto importante para una formulación coherente con la forma de aplicación del cargamento, es la correcta descripción de las fuerzas nodales para el elemento, a través de un vector de cargas generalizado, que lleva en cuenta la relación de dependencia de momentos quasitangenciales y semitangenciales referidos a las rotaciones, es decir, que el uso de una formulación semitangencial para los momentos nodales según la ref. [1], asegura esta descripción. En caso de que no se consideren, como es usual, efectos de contorno en las integrales para la obtención de la matriz geométrica, se debe hacer una corrección nodal, para garantizar que los momentos actuantes en los elementos sean semitangenciales. A pesar que dicha corrección es de fácil visualización e implementación, las justificativas presentadas en las diversas referencias a su favor, encuentran ciertas inconsistencias en sus argumentos, lo que ha generado muchas controversias.

Bazant y El Nimeiri [2], desprecian los efectos del momento torsor y las fuerzas cortantes, basándose en su deducción en un raciocinio intuitivo, aparentemente justificado, ya que las deformaciones de cizallamiento son comúnmente despreciadas en un análisis lineal de vigas y pórticos. Esta formulación no toma en cuenta la naturaleza de los momentos flectores y torsores, ni la variación de los momentos flectores a lo largo del eje del elemento, es decir que la matriz proveniente de estos autores, no contiene términos de cortante, por lo que se desarrolló otra matriz basada en la anterior, tomando en consideración la variación del momento flector.

Gallagher y Barsoum [3] formulan su matriz geométrica, basándose en el método de los desplazamientos, para análisis de estabilidad de miembros sometidos a flexión. El campo de desplazamientos representa la acción del elemento en flexión simple, y son despreciadas las deformaciones debidas al cizallamiento. En la expresión de la energía potencial, en la parcela correspondiente al potencial de las cargas aplicadas, son excluidos los términos de contorno en el potencial dado por torques y momentos flectores conservativos. No toman en consideración la naturaleza de los momentos flectores y torsores.

Yang y McGuire [4] adoptan la formulación Lagrangeana actualizada (U.L) para el análisis no-lineal, y de la misma manera que Argyris et al. [1], llevan en consideración la naturaleza de los momentos flectores y torsores.

Los autores de las referencias [2], [3] y [4], consideran el efecto de alabeo a torsión (torsión no uniforme), y por razones de comparación, fueron removidos los grados de

libertad correspondientes, quedando todas ellas de dimensión 12×12 .

Elias [7] considera las rotaciones no-lineales. Entonces su matriz geométrica sale con corrección automática. Esta formulación lleva en cuenta la naturaleza de los momentos flectores y torsores, y muestra que la matriz geométrica es igual a cero para momentos semitangenciales.

Ronda [9] usa una formulación paramétrica de la geometría y desplazamientos. Los elementos Lagrangeanos usan nodos internos al elemento. No es tomada en consideración la naturaleza de los momentos flectores y torsores.

Conci [12], deriva la matriz geométrica, asociada a desplazamientos no-lineales, utilizando la formulación Lagrangeana actualizada (U.L). Considera el alabeo de torsión y la naturaleza de los momentos flectores y torsores.

Las siguientes matrices, todas de dimensión 12×12 , fueron implementadas para efectos de comparación: la matriz resultante de la integración de la ecuación (7) para el elemento Hermitiano común $[K_G]_{c,c}$, que incluye el efecto de cizallamiento, idem, sin efecto de cizallamiento, $[K_G]_{s,c}$; la matriz correspondiente a la ecuación (7), considerando los términos de corrección semitangencial, $[K_G^s]_{c,c}$, que también corresponde a la ref. [1]; idem sin efecto de cizallamiento $[K_G^s]_{s,c}$; la matriz presentada en la referencia [2], $[K_{GB}]$, y la correspondiente considerando la variación de los momentos flectores $[K_{GB}]_M$; la matriz de la referencia [3], $[K_{GG}]_i$, las matrices oriundas de la ref. [4] y [5], designadas por $[K_{GY}^{SO}]$, sin corrección semitangencial, y $[K_{GY}^{SS}]$ con corrección semitangencial; la proveniente de la ref. [9], está designada como $[K_G]_{BL}$; ya las matrices obtenidas de la ref. [12], son designadas como $[K_{GA}^{SO}]$ (sin corrección semitangencial), y $[K_{GA}^{SS}]$ considerando la corrección.

Ejemplo 1: Pórtico Espacial

A pesar de ser bastante simple, el pórtico mostrado en la Fig. 1, constituye un buen ejemplo para la comprobación de la eficiencia de las matrices geométricas, en lo que respecta al cálculo de las cargas de pandeo espacial.

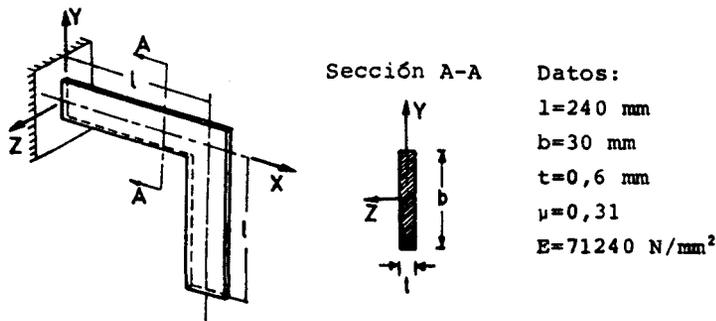
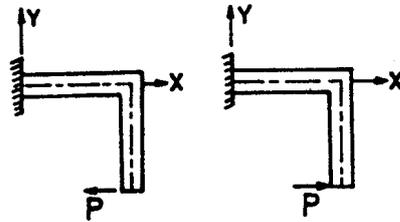


Fig. 1 Pórtico analizado

Este ejemplo fué utilizado en la ref.[1] para mostrar la necesidad del uso de momentos semitangenciales en la formulación de matrices geométricas. Son evaluados dos casos de carga, mostrados en la figura 2.



Caso A Caso B

Fig. 2 Casos de carga

La siguiente tabla, muestra los resultados numéricos del ejemplo de la Fig. 1

Tabla I

[K _G]	P _{cr} [N] Caso A				P _{cr} [N] Caso B			
	Número de elementos por lado				Número de elementos por lado			
	1	3	6	15	1	3	6	15
[K _G] _{c.c}	0.4269	0.4217	0.4217	0.4217	0.5605	0.5517	0.5505	0.5505
[K _G ^S] _{c.c}	0.7079	0.6832	0.6808	0.6808	1.1751	1.0971	1.0885	1.0873
[K _G] _{s.c}	0.8769	0.8285	0.8248	0.8236	1.3136	1.2332	1.2258	1.2234
[K _G ^S] _{s.c}	1.2794	1.0946	1.0812	1.0775	2.3729	2.1484	2.1087	2.0965
[K _{GB}]	0.8534	0.8261	0.8236	0.8236	1.2697	1.2283	1.2258	1.2234
[K _{GB}] _H	0.8554	0.8261	0.8236	0.8236	1.2829	1.2307	1.2258	1.2234
[K _{GG}]	0.7470	0.7138	0.7113	0.7101	1.0541	1.0140	1.0092	1.0079
[K _{GT} ^{SQ}]	0.4245	0.4217	0.4217	0.4217	0.5585	0.5511	0.5505	0.5505
[K _{GT} ^{SS}]	0.7021	0.6820	0.6808	0.6808	1.1787	1.0971	1.0897	1.0873
[K _G] _{EL}	0.4396	0.4235	0.4217	0.4217	0.5439	0.5499	0.5505	0.5505
[K _{GA} ^{SQ}]	0.4453	0.4438	0.4403	0.4403	0.5802	0.5796	0.5723	0.5697
[K _{GA} ^{SS}]	0.7198	0.7004	0.7000	0.7000	1.1543	1.1107	1.1000	1.1000
ELIAS	0.6818	-	-	-	1.0847	-	-	-

Ejemplo 2: Viga cantilever en flexión pura

La Fig. 3 muestra una viga cantilever en flexión pura, habiendo sido discretizada en 1, 3, 6 y 15 elementos.

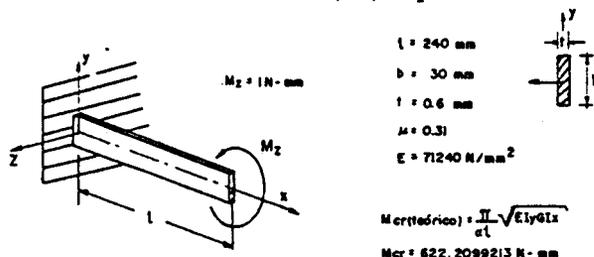


Fig. 3 Viga cantilever en flexión pura

Los resultados numéricos se muestran en la Tabla II.

Tabla II. Resultados numéricos del Ejemplo 2.

[K _G]	M _{cr} [N-mm]				
	Número de elementos por lado				
	1	3	6	15	15*
[K _G] _{c.c}	343.079	314.697	311.914	311.287	623.620
[K _G ^S] _{c.c}	686.194	650.591	624.441	623.016	-
[K _G] _{s.c}	343.079	314.697	311.914	311.287	623.620
[K _G ^S] _{s.c}	686.194	650.541	629.441	623.016	-
[K _{GB}]	325.439	313.232	311.523	311.287	622.893
[K _{GB}] _M	325.439	313.232	311.523	311.287	622.893
[K _{GG}]	325.439	313.232	311.523	311.287	622.893
[K _{GY} ^{SQ}]	325.439	313.232	311.523	311.287	622.893
[K _{GY} ^{SS}]	571.547	636.717	625.803	623.016	-
[K _C] _{BL}	343.074	314.697	311.914	311.287	623.620
[K _{GA} ^{SQ}]	326.271	313.295	311.295	311.295	622.893
[K _{GA} ^{SS}]	571.560	594.287	623.000	623.000	-

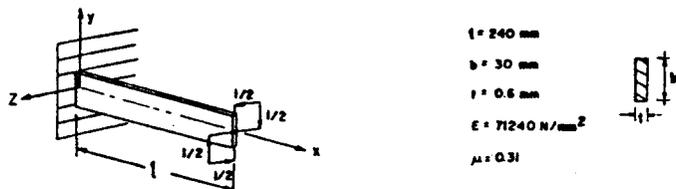
* Corrección semitangencial

Este ejemplo muestra la convergencia al valor del momento crítico teórico (considerando $\alpha=1$ para aplicación semitangencial), de los momentos críticos obtenidos a través de las matrices $[K_G^S]$, $[K_G^S]_{c.c.}$, $[K_G^S]_{s.c.}$, $[K_{GY}^{SS}]$ y $[K_{GA}^{SS}]$. Los resultados obtenidos utilizando las demás matrices, convergen a un valor que es la mitad del valor crítico teórico, es decir que interpretaron la aplicación del momento como si fue se quasitangencial ($\alpha=1$).

La última columna (*), muestra los resultados obtenidos luego de modificar la entrada de datos, a través de una matriz de corrección nodal, y es posible notar que los resultados obtenidos con las matrices que convergían al valor quasitangencial, esta vez convergieron al valor teórico para momento semitangencial.

Ejemplo 3. Cantilever sometida a un momento torsor autoequilibrado.

La Fig. 4 muestra una viga cantilever sometida a la acción de un momento torsor autoequilibrado en su extremo libre.



$$M_{\text{crítico}} = \frac{2E}{l} \sqrt{I_z I_y} = 16020 \text{ N-mm}$$

Fig 4. Viga cantilever con torsor autoequilibrado

La siguiente tabla muestra los resultados numéricos del ejemplo 3. El valor del momento crítico teórico, fué obtenido de la ref.[9].

Tabla III. Resultados numéricos del ejemplo 3.

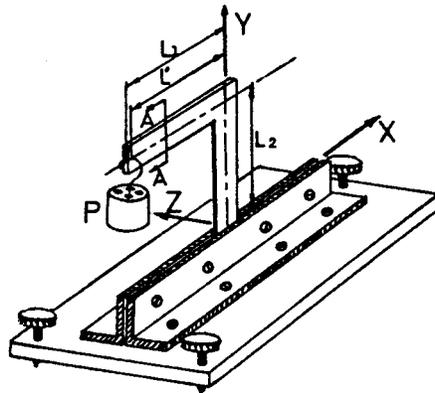
$[K_G]$	$[K_G]_{c.c.}$	$[K_G^S]_{c.c.}$	$[K_G]_{s.c.}$	$[K_G^S]_{s.c.}$	$[K_{GB}]$	$[K_{GB}]_H$
M_{CR} [N-mm]	8004.35	16010.0	24527.9	49072.4	24527.9	24527.9
$[K_G]$	$[K_{GG}]$	$[K_{GY}^{SQ}]$	$[K_{GY}^{SS}]$	$[K_G]_{BL}$	$[K_{GA}^{SQ}]$	$[K_{GA}^{SS}]$
M_{CR} [N-mm]	830838.0	8004.35	16017.2	8009.42	8004.0	16010.0

Nuevamente a través de este ejemplo, se muestra la eficiencia de las formulaciones que llevan en cuenta la corrección nodal, demostrada en el resultado obtenido por las matrices $[K_G^S]_{c.c.}$, $[K_{GY}^{SS}]$ y $[K_{GA}^{SS}]$, y muestra la incongruencia de

la matriz $[K_G^S]$. Todas las demás matrices llevan a valores muy distintos y con errores elevados. Particularmente la formulación de Gallagher y Barsoum es deficiente cuando está referida al efecto de torsión.

Ejemplo 4. Resultado experimental

La estructura mostrada en la Fig. 5, fué sometida a un ensayo sobre carga similar al caso A del ejemplo 1. Las propiedades del material (acrílico), fueron determinadas de tres maneras diferentes (strain-gages y ensayo de tracción; péndulo de torsión; y vibración en flexión), y luego de verificados y comparados los valores, fué observada una dispersión de aproximadamente 2%, en el nivel de tensiones esperado en el ensayo.



$L_1 = 212.2 \text{ mm}$
 $L_2 = 199.3 \text{ mm}$
 $L' = 203.2 \text{ mm}$
 $E = 2745.96 \text{ N/mm}^2$
 $\mu = 0.4$
 $b = \text{variable}$
 $t = \text{variable}$

Sección A-A

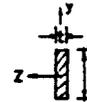


Fig.5 Esquema del modelo experimental

Los resultados numéricos, tomándose 15 elementos por la do (con grosor variable, de acuerdo a las mediciones realizadas en laboratorio), son mostrados en la tabla IV.

Tabla IV. Resultados numéricos (modelo)

$[K_G]$	$[K_G]_{c.c}$	$[K_G^S]_{c.c}$	$[K_G]_{s.c}$	$[K_G^S]_{s.c}$	$[K_{GB}]$	$[K_{GB}]_M$
$P_{Cr} [N]$	0.29687	0.48387	0.58085	0.78303	0.58944	0.58944
$[K_G]$	$[K_{GG}]$	$[K_{GT}^{SO}]$	$[K_{GT}^{SS}]$	$[K_G]_{BL}$	$[K_{GA}^{SO}]$	$[K_{GA}^{SS}]$
$P_{Cr} [N]$	0.50447	0.29687	0.48387	0.30328	0.29710	0.48390

La carga fué aplicada por gravedad, llenando un recipiente cilíndrico cuya tapa está perforada y permite la inserción de agua a través de una jeringa. Interiormente existe una capa de espuma absorbente que evita efectos dinámicos de golpeo. El cilindro de aplicación de la carga tiene un soporte

construido que mantenga el cargamento en el punto de aplicación sin introducir momento de torsión en la extremidad de la barra horizontal en el momento de ocurrir el pandeo.

Una vez instalado y nivelado el modelo, se procedió a insertar agua en forma de gotas, y se vio que la estructura se volvía sensible a desplazamientos laterales en un nivel de 0.40 N, pero fue posible efectuar compensaciones a través de unos tornillos dispuestos para tal fin, buscando obtener la carga de pandeo lateral lo más próxima posible de la que sería obtenida en el caso de tener una estructura perfecta. A través de esta regulación compensatoria, fue posible obtener una carga máxima de mantenimiento de la configuración plana de la pieza (carga máxima, luego de la cual los desplazamientos laterales se vuelven incontrolables) de 0.4631 N como valor medio de cinco ensayos. Este valor de carga crítica experimental es apenas un 5% inferior de la carga prevista a través de las matrices $[K_{Gc.c}^S]$, $[K_{GY}^{SS}]$ y $[K_{GA}^{SS}]$.

DISCUSION DE LOS RESULTADOS

Se observan enormes discrepancias en los resultados de los ejemplos expuestos. Tales discrepancias pueden tener diversos orígenes y pueden ser divididas entre las que provienen de causas externas como ser: (a) errores en la implementación de las matrices en el programa; (b) errores en la entrada de datos y manipulación del programa. Además tenemos las causas que provienen de las formulaciones que son: (c) diferentes grados de convergencia en los elementos; (d) inclusión o no de la fuerza cortante inicial; (e) existencia o no de matriz de corrección nodal; (f) efecto del ángulo formado por los elementos; (g) inclusión o no del alabeo a torsión.

La coherencia observada en un análisis cuidadoso, cruzando los elementos entre sí y con los de la literatura, permite considerar que los errores provenientes de causas externas son de baja probabilidad, y cuando eventualmente acontece algún error, este es fácilmente detectable en la salida del programa.

En lo referente a las discrepancias provenientes de las formulaciones, se observa en relación al ítem (c), todas las matrices llevan a resultados dentro de una tolerancia razonable con una subdivisión de 3 elementos o más, en los casos en que los demás ítems no son preponderantes.

Se observó que existen diferencias de hasta un 20% en los términos de las matrices geométricas con elementos Hermitianos, y una configuración diferente para la matriz con elemento Lagrangeano, incluyendo fuerzas axiales y momentos de inercia referidos a otros ejes. A pesar de eso, tales diferencias no afectan los resultados de forma sensible cuando se discretiza la estructura en varios elementos.

Con referencia al ítem (d), se puede observar que en los ejemplos donde intervienen fuerzas cortantes, sea en los elementos que sirven para la aplicación de los momentos, o de fuerzas que actúan en la estructura [9], se observa un incremento sensible en el valor de la carga crítica cuando los

minos asociados al cizallamiento eran retirados. Esto ocurre también para el caso de vigas esbeltas donde la deformación por cizallamiento en el régimen lineal es despreciable.

Como se puede observar en la tabla I, el efecto de la fuerza cortante inicial es muy importante, pues la remoción de términos asociados al cizallamiento causa incrementos de más del 100% en el valor de la carga crítica. Solamente en el ejemplo 2 en el que la fuerza cortante es nula, vemos una convergencia al valor de la carga crítica, salvo que esta vez la convergencia se produce para valores de carga crítica semitangencial y quasitangencial, mostrando el efecto de la consideración o no de matrices de corrección nodal en la formulación o a través de la entrada de datos.

En relación a los ítems (e) y (f), las matrices geométricas llevan a valores muy errados de cargas críticas como se muestra en el ejemplo 3, cuando los elementos forman ángulos diferentes de 0° o 180° , y son las matrices que no toman en cuenta la corrección nodal, ni los efectos de la fuerza cortante inicial en su formulación. Vemos que los resultados para matrices geométricas con corrección semitangencial que no consideran los efectos de la fuerza cortante inicial, como es el caso de la matriz $[K_G^S]$, condujo a valores muy groseros del valor de la carga crítica.

Respecto del ítem (g), los resultados obtenidos por simple reducción de matrices (14x14) a matrices (12x12) con alabeo a torsión restringido, convergieron a los mismos valores obtenidos con matrices formuladas sin alabeo a torsión. Como era de esperar, esto no afectó en los resultados pues se trata de elementos de sección rectangular fina, poco sensible al alabeo a torsión. En la ref. [9] fueron consideradas vigas de sección cuadrada, y esto no modificó los resultados.

Como paso final, la verificación experimental de los resultados del pórtico en L, confirma la validez de los resultados lineales, ya que para los niveles de carga mostrados, los desplazamientos pre pandeo son pequeños comparados con la altura de la sección. El modo de pandeo obtenido contiene desplazamientos asociados a la torsión y flexión fuera del plano. De esta manera, se trata de un problema típico de bifurcación de equilibrio, y el análisis lineal de autovalor es una aproximación adecuada de la carga crítica real de la estructura.

CONCLUSIONES

Quedó demostrado que la utilización de diferentes campos de desplazamientos para las matrices geométricas, no afecta al valor de la carga crítica desde que se haga una buena discretización de la estructura.

Para el caso de vigas rectas sometidas a momento en su extremo, todas las matrices llevaron al mismo resultado desde que la matriz de corrección nodal sea coherente con la forma de aplicación del momento.

Para el caso de aplicación de momentos a través de fuerzas aplicadas en barras rígidas, solamente las matrices geométricas formuladas llevando en consideración los efectos de la fuerza cortante inicial y la corrección nodal, dieron resultados correctos en el valor convergido de la carga crítica.

La coherencia presentada en los diversos ejemplos, así como la verificación experimental de los resultados y la argumentación en [1] corroborada en [4],[5],[7],[9],[12] y [13], muestran la necesidad de considerar fuerzas cortantes y matrices de corrección nodal (la formulación semitangencial lleva inherente este efecto de corrección nodal), aún tratándose de piezas esbeltas.

REFERENCIAS

- [1] Argyris, J.H., "On the Geometrical Stiffness of a Beam in Space - A Consistent V. W. Approach", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 20, pp. 105-131, 1979.
- [2] Bazant, Z.P., and El Nimeiri, M., "Large Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, pp.1259-1281, 1973.
- [3] Barsoum, R.S. and Gallagher, R.H., "Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, pp.335-352, 1970.
- [4] Yang, Y.B. and McGuire, W., "Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 112, pp. 853-877, 1986.
- [5] Yang, Y.B. and McGuire, W., "Joint Rotation and Geometric Nonlinear Analysis", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 112, pp. 879-905, 1986.
- [6] Tebedge, N. and Tall, L., "Linear Stability Analysis of Beam Columns", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, pp. 2439-2457, 1973.
- [7] Elias, Z.M., "Theory and Methods of Structural Analysis", John Wiley and Sons, 1986.
- [8] Bathe, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- [9] Ronda Vásquez, Juan A., "Estudo Comparativo de Matrizes Geométricas para Análise da Estabilidade de Pórticos Esbeltais", MSc. Thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, R.J., 1987.
- [10] Pereira de Almeida, F.J., "Instabilidade Elástica de Pórticos Sujeitos a Cargas Dependentes dos Deslocamentos", MSc. Thesis, Pontifícia Universidade Católica do

Rio de Janeiro, 1985.

- [11] Oden, J.T., "Calculation of Geometric Stiffness Matrices for Complex Structures", AIAA Journal, Vol. 4, N°8, pp. 1480-1482, 1966.
- [12] Conci, A., "Análise de Estruturas Reticuladas de Aço com Consideração de Empenamento e não Linearidades Geométrica e Material", PhD. Thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1988.
- [13] Ronda Vasquez, J.A. y Rosas e Silva, R., "Spatial Buckling Analysis: A Comparison of Formulations", MECOM 88, Mecânica Computacional, Vol. 7, AMCA, pp. 143-154 1989.