

UNA TECNICA SIMPLIFICADA DE PERTURBACIONES EN BANDAS FINITAS
PARA INESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS PLEGADAS NO PRISMATICAS

Silvia R. Raichman¹
Luis A. Godoy²

Departamento de Estructuras
F.C.E.F. y N., Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correo 916, Córdoba, 5000, Argentina

RESUMEN

Se presenta una extensión de la formulación de Bandas Finitas para el análisis de láminas plegadas de espesor longitudinalmente variable. Se propone la técnica de perturbaciones para expandir tanto el parámetro de carga como el vector de desplazamientos en el estado crítico en términos de un parámetro apropiado. La matriz de carga-geometría es aproximada a la correspondiente al caso de espesor longitudinal constante. La respuesta se obtiene no sólo para un cambio de espesor determinado, sino para todo un rango de variación del parámetro de perturbación. Se incluyen resultados numéricos que ilustran la precisión de la solución.

ABSTRACT

An extension of the finite strip formulation for the bifurcation analysis of folded plates with changes in the thickness in the longitudinal direction is presented. A perturbation technique is proposed to expand the load parameter and the displacement vector in the critical state in terms of a suitable parameter. The load geometry matrix is approximated to that associated to the constant longitudinal thickness case. The response is obtained not only for a given value of thickness change, but for a whole range of perturbation parameter variation. Numerical results are included to illustrate the accuracy of the solution.

¹ Becaria de CONICET.

² Profesor Asociado e Investigador, CONICET.

1. INTRODUCCION.

El Método de Bandas Finitas en su formulación clásica permite analizar las estructuras denominadas prismáticas con grandes ventajas computacionales frente a la discretización bidimensional. Se entiende por estructura prismática aquella tal que las características físico-geométricas de la sección transversal permanecen constantes en la dirección longitudinal. Sin embargo, en muchos problemas de ingeniería es necesario considerar variaciones de algún parámetro en esa dirección. En [1] se presenta el empleo de la técnica de perturbaciones para analizar cambios en la respuesta estructural asociados a variaciones en los parámetros que definen el sistema. En otras palabras, se propone la investigación de la influencia en la solución de cambios en esos parámetros, expandiendo la respuesta en términos de un parámetro de perturbación. Esta técnica fue utilizada con éxito en el análisis estático de láminas plegadas de espesor longitudinalmente variable, empleando el Método de Bandas Finitas [2].

En el presente trabajo se propone el uso de la técnica de perturbaciones para determinar el punto de bifurcación de las estructuras mencionadas, extendiéndose la formulación tradicional de Bandas Finitas. La no prismaticidad considerada nuevamente viene dada por cambios en el espesor de las placas en la dirección longitudinal. Dichos cambios se representan como una función por una amplitud, y es esa amplitud la adoptada como parámetro de perturbación. Se considera una expansión de orden genérico tanto del vector de desplazamientos como del parámetro de carga en el estado crítico. El procedimiento permite el cálculo de todos los coeficientes de la expansión polinómica por medio de la solución de un conjunto de sistemas de ecuaciones. El primero de ellos es el problema de valores propios asociado al estado de referencia (correspondiente al caso de la estructura de espesor constante). Los restantes constituyen una serie de sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes.

En primer lugar se muestran los aspectos básicos de la formulación de Bandas Finitas que surgen al considerar una variación longitudinal del espesor. Posteriormente se presenta la perturbación de la condición de bifurcación, en la que se aproximan los esfuerzos de la trayectoria fundamental. Por último se incluyen resultados numéricos que permiten evaluar la precisión de la solución.

2. FORMULACION DE BANDAS FINITAS PARA LAMINAS PLEGADAS DE ESPESOR LONGITUDINALMENTE VARIABLE.

La formulación de Bandas Finitas con espesor variable en la dirección longitudinal, para el análisis de láminas plegadas, se basa en los mismos principios correspondientes al caso de espesor constante. El desarrollo de la misma sigue el procedimiento presentado en [3] y la diferencia fundamental radica en la integración explícita en la dirección longitudinal 'y'. Se verá que la presencia de la función $t = t(y)$, siendo t el espesor

de la estructura, en la matriz de elasticidad D , produce en la integración de la matriz de rigidez un acoplamiento de los distintos términos del desarrollo armónico.

Se considera que el espesor variable t de una lámina puede representarse en la forma:

$$t = t_0 [1 + \tau \beta(y)] \quad (1)$$

donde t_0 es un espesor constante tomado como referencia, $\beta(y)$ es una función de variación del espesor y τ es la amplitud de la función de variación. Por conveniencia analítica, y por la importancia que reviste en problemas prácticos, se investiga a continuación como caso particular, un cambio brusco de espesor en el sentido prismático, como el indicado en la Figura 1, para el que resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = 1 \quad , \quad \text{para } y_1 \leq y \leq y_2 \\ \beta = 0 \quad , \quad \text{para } y_2 < y < y_3 \end{array} \right. \quad (2)$$

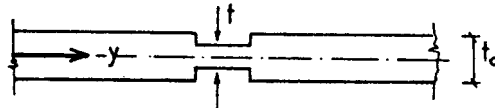


Figura 1. Cambio brusco de espesor en la dirección longitudinal.

Al representar al espesor t como indica (1), la matriz de elasticidad queda expresada como sigue:

$$D = D_0 + \tau D_1 + \tau^2 D_2 + \tau^3 D_3 \quad (3)$$

donde D_0 es la matriz de elasticidad para el caso de espesor constante, y que puede escribirse como:

$$D_0 = \begin{bmatrix} D_{om} & 0 \\ 0 & D_{of} \end{bmatrix} \quad (4.a)$$

con

$$D_{om} = \frac{E t_0}{(1-\nu)} C \quad , \quad D_{of} = \frac{E t_0^3}{12(1-\nu^2)} C \quad (4.b)$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.c)$$

E y ν son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson respectivamente.

La forma de las matrices de corrección es la siguiente:

$$D_1 = \begin{bmatrix} D_{1m} & 0 \\ 0 & D_{1f} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} D_{1m} = \beta D_{0m} \\ D_{1f} = 3 \beta D_{0f} \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{2f} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \left\{ D_{2f} = 3 \beta^2 D_{0f} \right. \quad (5)$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{3f} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \left\{ D_{3f} = \beta^2 D_{0f} \right.$$

La energía potencial total de una banda se expresa como sigue:

$$V^e = \frac{1}{2!} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle \underline{q}_n^e \rangle^T K_{nm} \langle \underline{q}_m^e \rangle - \sum_{n=1}^N \langle \underline{q}_n^e \rangle^T \underline{f}_n^e \quad (6)$$

donde \underline{q}_n^e es el vector de parámetros nodales de una banda asociado al modo n ; \underline{f}_n^e es el vector de cargas correspondiente a dicho modo; N es el número total de armónicas consideradas y K_{nm}^e es la submatriz de rigidez de una banda asociada a las armónicas n y m y que está dada por la siguiente expresión:

$$K_{nm}^e = \int_0^L \int_0^b B_n^T D B_m dx dy \quad (7)$$

siendo B_n y B_m las matrices de deformación - desplazamiento para las armónicas n y m respectivamente, L la longitud de la banda y b el ancho de la misma. Sustituyendo (3) en (7) se obtiene:

$$K_{nm}^e = K_{0nm}^e + \tau K_{1nm}^e + \tau^2 K_{2nm}^e + \tau^3 K_{3nm}^e \quad (8)$$

Resulta entonces que la submatriz elemental de rigidez está dada por la suma de cuatro submatrices. La primera de ellas es la matriz tradicional de rigidez para la banda de espesor t_0 . Las

submatrices de los términos restantes tienen la forma general:

$$K_{jnm}^e = \int_{y_1}^{y_2} \int_0^b B_n^T D_j B_m dx dy, \quad j = 1,2,3 \quad (9)$$

La evaluación de todas ellas implica una integración clásica de Elementos Finitos a lo largo del eje transversal 'x' y una integración explícita a lo largo del eje longitudinal 'y'. Con respecto a esta última, puede observarse que se han modificado los límites de integración. Debido a ello aparecerán las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_{y_1}^{y_2} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right) dy \quad (10)$$

$$I_2 = \int_{y_1}^{y_2} \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right) dy$$

que son las responsables del acoplamiento entre las armónicas n y m. O sea, la presencia de $t = t(y)$ en la matriz de elasticidad dificulta el proceso de integración de la matriz de rigidez e impide la utilización de las propiedades ortogonales de las funciones trigonométricas $\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$ y $\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$ en la forma clásica de la formulación de Bandas Finitas.

Tras el proceso de ensamblaje de las distintas bandas, la matriz de rigidez para toda la estructura puede escribirse como:

$$K = K_0 + \tau K_1 + \tau^2 K_2 + \tau^3 K_3 \quad (11)$$

en donde se ha supuesto que existe un escalar τ que puede representar los cambios de espesor en toda la estructura. Concluyendo, cuando el espesor es variable en la dirección prismática, la minimización de la energía potencial total conduce a un sistema de ecuaciones armónicamente acoplado, que puede escribirse como:

$$[K_0 + \tau K_1 + \tau^2 K_2 + \tau^3 K_3] \underline{a} - \underline{f} = \underline{0} \quad (12)$$

En [2] se plantea la solución de este problema mediante la técnica de perturbaciones, expandiendo el vector de incógnitas nodales \underline{a} en términos de un parámetro adecuado. Se adopta como tal a la amplitud de la función de variación del espesor, o sea,

$$\underline{a} = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 \tau + \underline{a}_2 \tau^2 + \underline{a}_3 \tau^3 + \dots \quad (13)$$

Al substituir la matriz de elasticidad D por la expresión (3) y el vector de parámetros nodales por (13) en el

campo de tensiones generalizadas dado por : [3]

$$\underline{\sigma} = D \underline{\epsilon} = D B \underline{a} \quad (14)$$

se obtiene que éste queda expresado por el siguiente desarrollo:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + \tau \underline{\sigma}_1 + \tau^2 \underline{\sigma}_2 + \tau^3 \underline{\sigma}_3 + \dots \quad (15)$$

siendo

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_0 &= D_0 B \underline{a}_0 \\ \underline{\sigma}_1 &= D_0 B \underline{a}_1 + D_1 B \underline{a}_0 \\ \underline{\sigma}_2 &= D_0 B \underline{a}_2 + D_1 B \underline{a}_1 + D_2 B \underline{a}_0 \\ \underline{\sigma}_3 &= D_0 B \underline{a}_3 + D_1 B \underline{a}_2 + D_2 B \underline{a}_1 + D_3 B \underline{a}_0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Se observa que $\underline{\sigma}_0$ es el vector de tensiones generalizadas para el caso de espesor longitudinal constante.

3. EXPRESION PARA LA CONDICION DE BIFURCACION.

La discretización por Bandas Finitas transforma la condición de bifurcación a partir de una trayectoria primaria de equilibrio lineal, en el siguiente problema de valores propios [4]:

$$[K + \lambda K_0] \underline{a} = \underline{0} \quad (17)$$

donde λ es el parámetro de carga en el punto de bifurcación, \underline{a} es el autovector asociado al autovalor λ , K es la matriz de rigidez de la estructura y K_0 la matriz de carga-geometría. La relación adicional

$$\underline{a}^T K_0 \underline{a} = 1$$

fija la longitud del autovector, o sea, la magnitud de sus componentes.

La matriz de carga-geometría de una banda está dada por:

$$K_0^* = \int_0^L \int_0^b G^T M^T G \, dx \, dy \quad (18)$$

donde G es la matriz geométrica que contiene los términos no lineales en desplazamientos incrementales, y M es la matriz de esfuerzos en el estado fundamental, cuya forma es: [4]

$$M = \begin{bmatrix} N_x & 0 & 0 & N_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & N_x & 0 & 0 & N_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & N_x & 0 & 0 & N_{xy} \\ N_{xy} & 0 & 0 & N_y & 0 & 0 \\ 0 & N_{xy} & 0 & 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_{xy} & 0 & 0 & N_y \end{bmatrix} \quad (19)$$

Del campo vectorial dado por (15), sólo los esfuerzos membranales intervienen en la matriz M. Sustituidos éstos en (18), se obtiene:

$$M = M_0 + \tau M_1 + \tau^2 M_2 + \tau^3 M_3 + \dots \quad (20)$$

Reemplazando ahora el desarrollo de M en la expresión (18) para la matriz de carga-geometría de una banda, ésta resulta:

$$K_G^0 = K_{00}^0 + \tau K_{01}^0 + \tau^2 K_{02}^0 + \tau^3 K_{03}^0 + \dots \quad (21)$$

Luego del ensamblaje de todos los elementos, la matriz de carga-geometría de la estructura puede escribirse como:

$$K_G = K_{00} + \tau K_{01} + \tau^2 K_{02} + \tau^3 K_{03} + \dots \quad (22)$$

El primer término de este desarrollo es la matriz correspondiente a la estructura de iguales propiedades y dimensiones, pero de espesor longitudinal constante.

Finalmente, considerando las expresiones (11) y (22) de las matrices de rigidez y carga-geometría para el caso de espesor longitudinalmente variable, el problema de valores propios resulta:

$$\left[[K_0 + \tau K_1 + \tau^2 K_2 + \tau^3 K_3] + \lambda [K_{00} + \tau K_{01} + \tau^2 K_{02} + \tau^3 K_{03} + \dots] \right] \underline{z} = \underline{0}$$

con

$$\underline{z}^T [K_{00} + \tau K_{01} + \tau^2 K_{02} + \tau^3 K_{03} + \dots] \underline{z} = 1 \quad (23)$$

4. PERTURBACION DE LA ECUACION DE AUTOVALORES.

Como primera alternativa se estudió una versión simplificada del problema definido por (23). Considerando que la matriz de carga-geometría que interviene en la condición de bifurcación del problema no prismático es la correspondiente a la estructura de espesor constante, el número de matrices adicionales que es necesario computar se reduce a tres. Un estudio de este modelo en el que se expande también la matriz de carga-geometría en términos de τ , tal como lo define (23), se encuentra en estos momentos en desarrollo. En base a la aproximación señalada, las

condiciones asociadas al caso de espesor variable longitudinalmente resultan:

$$\begin{aligned} \left[(K_0 + \tau K_1 + \tau^2 K_2 + \tau^3 K_3) + \lambda K_{00} \right] \underline{a} &= \underline{0} & (24) \\ \underline{a}^T K_{00} \underline{a} &= 1 \end{aligned}$$

El problema de valores propios definido en (24) puede escribirse en la forma compacta:

$$\begin{aligned} F_1(\lambda, \underline{a}, \tau) &= \underline{0} \\ F_2(\lambda, \underline{a}) &= 1 \end{aligned} \quad (25)$$

El campo solución está dado por el parámetro de carga λ en el punto crítico y el vector propio \underline{a} asociado al mismo. Considerando que ambos son regulares en la amplitud de la función de variación τ , ésta es adoptada como parámetro de perturbación. Expandiéndolos en términos de dicha variable, se obtiene:

$$\underline{a} = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 \tau + \underline{a}_2 \tau^2 + \underline{a}_3 \tau^3 + \dots \quad (26.a)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \tau + \lambda_2 \tau^2 + \lambda_3 \tau^3 + \dots \quad (26.b)$$

siendo

$$\underline{a}_j = \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j \underline{a}}{d\tau^j} \right|_0 \quad \text{y} \quad \lambda_j = \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j \lambda}{d\tau^j} \right|_0 \quad (26.c)$$

Se reemplazan los desarrollos dados en (26) en el problema de autovalores definido en (23), para obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} &\left[K_0 + \lambda_0 K_{00} \right] \underline{a}_0 + \tau \left[K_1 \underline{a}_0 + \lambda_1 K_{00} \underline{a}_0 + K_0 \underline{a}_1 + \lambda_0 K_{00} \underline{a}_1 \right] + \\ &+ \tau^2 \left[K_0 \underline{a}_2 + K_1 \underline{a}_1 + K_2 \underline{a}_0 + \lambda_0 K_{00} \underline{a}_2 + \lambda_1 K_{00} \underline{a}_1 + \lambda_2 K_{00} \underline{a}_0 \right] + \\ &+ \tau^3 \left[K_0 \underline{a}_3 + K_1 \underline{a}_2 + K_2 \underline{a}_1 + K_3 \underline{a}_0 + \lambda_0 K_{00} \underline{a}_3 + \lambda_1 K_{00} \underline{a}_2 + \right. \\ &\left. + \lambda_2 K_{00} \underline{a}_1 + \lambda_3 K_{00} \underline{a}_0 \right] + \dots = \underline{0} & (27) \\ &\underline{a}_0^T K_{00} \underline{a}_0 + \tau \left[\underline{a}_0^T K_{00} \underline{a}_1 + \underline{a}_1^T K_{00} \underline{a}_0 \right] + \tau^2 \left[\underline{a}_0^T K_{00} \underline{a}_2 + \right. \\ &\left. + \underline{a}_1^T K_{00} \underline{a}_1 + \underline{a}_2^T K_{00} \underline{a}_0 \right] + \tau^3 \left[\underline{a}_0^T K_{00} \underline{a}_3 + \underline{a}_1^T K_{00} \underline{a}_2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \underline{a}_2^T K_{00} \underline{a}_1 + \underline{a}_3^T K_{00} \underline{a}_0] + \dots = 1$$

Como las condiciones indicadas en (25) deben ser válidas para todo valor del parámetro de perturbación τ , se cumple que:

$$\frac{d^j F_1(\alpha, \underline{a}, \tau)}{d\tau^j} = 0$$

$$\frac{d^j F_2(\alpha, \underline{a})}{d\tau^j} = 0 \quad (28)$$

La evaluación de estas derivadas en $\tau=0$ conduce al siguiente conjunto de sistemas de ecuaciones de perturbación:

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_0 + \lambda_0 K_{00}] \underline{a}_0 = 0 \\ \underline{a}_0^T K_{00} \underline{a}_0 = 1 \end{array} \right. \quad (29.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_0 + \lambda_0 K_{00}] \underline{a}_1 + [K_1 + \lambda_1 K_{00}] \underline{a}_0 = 0 \\ \underline{a}_0^T K_{00} \underline{a}_1 = 0 \end{array} \right. \quad (29.b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_0 + \lambda_0 K_{00}] \underline{a}_2 + [K_1 + \lambda_1 K_{00}] \underline{a}_1 + [K_2 + \lambda_2 K_{00}] \underline{a}_0 = 0 \\ 2 \underline{a}_0^T K_{00} \underline{a}_2 + \underline{a}_1^T K_{00} \underline{a}_1 = 0 \end{array} \right. \quad (29.c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_0 + \lambda_0 K_{00}] \underline{a}_3 + [K_1 + \lambda_1 K_{00}] \underline{a}_2 + [K_2 + \lambda_2 K_{00}] \underline{a}_1 + \\ + [K_3 + \lambda_3 K_{00}] \underline{a}_0 = 0 \\ 2 \underline{a}_0^T K_{00} \underline{a}_3 + 2 \underline{a}_1^T K_{00} \underline{a}_2 = 0 \end{array} \right. \quad (29.d)$$

.....

El primero de ellos es el problema de valores propios correspondiente al caso prismático de referencia, ya que K_0 y K_{00} son las matrices de rigidez y carga-geometría para la estructura

de espesor longitudinal constante, respectivamente. Los sistemas de ecuaciones de perturbación siguientes constituyen sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes. En cada uno de ellos aparecen dos incógnitas: λ_r y \underline{a}_r . Su resolución se describe en el próximo punto.

5. SOLUCION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DE PERTURBACION.

Se plantea la solución de los sistemas lineales de ecuaciones dados en (29) empleando el mecanismo de contracción [5]. A los efectos de ilustrarlo se trabaja con el segundo sistema, (29.b), pero su aplicación se extiende a todos los demás.

Premultiplicando la primera relación de (29.b) por el vector \underline{a}_0^T se obtiene:

$$\underline{a}_0^T \left[K_0 + \lambda_0 K_{00} \right] \underline{a}_1 + \underline{a}_0^T \left[K_1 + \lambda_1 K_{00} \right] \underline{a}_0 = 0 \quad (30)$$

La matriz $[K_0 + \lambda_0 K_{00}]$ es simétrica porque K_0 y K_{00} lo son. Por lo tanto:

$$\left[K_0 + \lambda_0 K_{00} \right] = \left[K_0 + \lambda_0 K_{00} \right]^T \quad (31)$$

La ecuación (30) puede entonces escribirse como:

$$\left[\left[K_0 + \lambda_0 K_{00} \right] \underline{a}_0 \right]^T \underline{a}_1 + \underline{a}_0^T \left[K_1 + \lambda_1 K_{00} \right] \underline{a}_0 = 0 \quad (32)$$

El primer término de (32) es nulo en virtud del primer sistema de ecuaciones de perturbación. Al mismo tiempo, en el segundo miembro se reproduce la segunda relación dada en (29.a). Resulta finalmente:

$$\lambda_1 = - \underline{a}_0^T K_1 \underline{a}_0 \quad (33)$$

Las expresiones que se obtienen para λ_2 y λ_3 , al contraer el segundo y tercer sistema respectivamente, son las siguientes:

$$\lambda_2 = - \underline{a}_0^T \left[K_1 + \lambda_1 K_{00} \right] \underline{a}_1 - \underline{a}_0^T K_2 \underline{a}_0 \quad (34)$$

$$\lambda_3 = - \underline{a}_0^T \left[K_1 + \lambda_1 K_{00} \right] \underline{a}_2 - \underline{a}_0^T \left[K_2 + \lambda_2 K_{00} \right] \underline{a}_1 - \underline{a}_0^T K_3 \underline{a}_0$$

Aplicando el mecanismo descrito, cada sistema resulta de $(n+1)$ ecuaciones con n incógnitas, siendo n el rango del mismo. Un sistema genérico de orden r puede escribirse como sigue:

$$\begin{cases} \left[K_o + \lambda_o K_{oo} \right] \underline{a}_r = \underline{f}_{r-1} \\ \underline{a}_o^T K_{oo} \underline{a}_r = b_{r-1} \end{cases} \quad (35)$$

donde \underline{f}_{r-1} es un vector n-dimensional y b_{r-1} es un escalar. Ambos dependen de las soluciones obtenidas en los anteriores sistemas.

Si con $\hat{\underline{a}}_r$ se indica una solución particular del sistema r-ésimo y se tiene presente que \underline{a}_o es la solución del sistema homogéneo, la solución general puede expresarse de la siguiente forma:

$$\underline{a}_r = \hat{\underline{a}}_r + c \underline{a}_o \quad (36)$$

siendo c una constante a determinar. Sustituyendo (36) en (35) resulta que el sistema puede resolverse en dos etapas [6]. En la primera de ellas se obtiene la solución particular:

$$\left[K_o + \lambda_o K_{oo} \right] \hat{\underline{a}}_r = \underline{f}_{r-1} \quad (37)$$

y en la segunda se obtiene c:

$$c = b_{r-1} - \underline{a}_o^T K_{oo} \hat{\underline{a}}_r \quad (38)$$

Cabe señalar que el sistema dado por (37) es deficiente en su rango. Debe elegirse entonces una componente de $\hat{\underline{a}}_r$ y eliminar una ecuación. Para obtener un sistema mejor condicionado de orden (n-1) se sugiere elegir la fila correspondiente a la mayor componente de \underline{a}_o [7].

6. RESULTADOS NUMERICOS.

Se presenta a continuación un ejemplo simple que tiene por objeto mostrar la convergencia y precisión de la solución obtenida en base a la formulación expuesta en este trabajo.

Se estudia una placa cuadrada de lado unidad simplemente apoyada en los cuatro bordes y sometida a una carga axial. Se utiliza la misma banda desarrollada para el análisis estático y de bifurcación de estructuras plegadas prismáticas [3] y [4] y que fuera luego empleada en el análisis de estas estructuras pero con espesor longitudinal variable [2]. En la Figura 2.a se presenta la geometría de la placa.

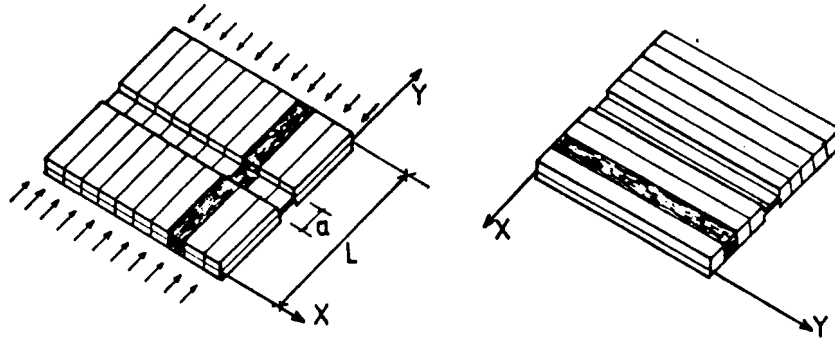


Figura 2. Geometría y discretización de la placa.

Los resultados del estudio de convergencia se muestran en las Tablas 1 y 2., donde la carga crítica es expresada en términos de un coeficiente k por la siguiente relación:

$$P_c = k \sigma_c t_o \quad (39)$$

siendo

$$\sigma_c = \frac{E \pi^2}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{t_o}{b} \right]^2 \quad (40)$$

M	k
1	5.60
3	5.56
5	5.55
7	5.55

Tabla 1. Convergencia de la solución en términos del número de armónicas de la trayectoria secundaria (M), con $a/L = 0.0125$, $\nu = -0.20$, y 3 sistemas de perturbación. (variables definidas en la Figura 2.).

NSP	k
1	5.54
2	5.55
3	5.55
4	5.55

Tabla 2. Convergencia de la solución en términos del número de sistemas de ecuaciones de perturbación (NSP). (Datos en Tabla 1.).

Con respecto al número de sistemas de ecuaciones de perturbación a considerar, cabe señalar que recién en el de tercer orden aparecen todas las matrices involucradas en el problema. Los resultados de la Tabla 2. confirman la convergencia de la solución empleando sólo los tres primeros. Pero muestran que aún para el primer sistema de perturbaciones se ha logrado convergencia en el autovalor para $\tau = -0.20$. Por otra parte, en la Figura 3. se han graficado las aproximaciones obtenidas para distintos números de términos en el desarrollo en serie de las incógnitas, observándose que para valores grandes del parámetro de perturbación es aconsejable la resolución de por lo menos los tres primeros sistemas. En la mencionada figura, k^* es la diferencia entre los valores correspondientes a los casos de espesor constante y variable respectivamente.

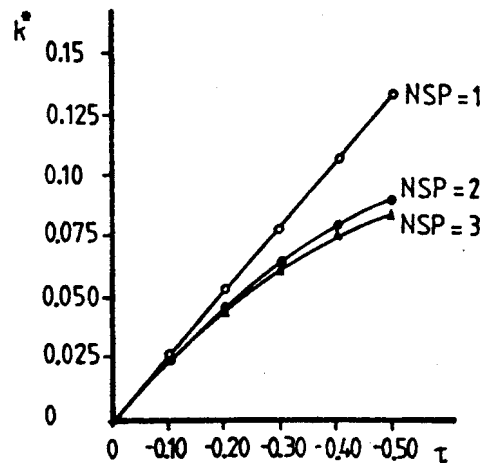


Figura 3. Aproximaciones sucesivas de $k^* = k - k_0$ en función de τ

Para la verificación de resultados se emplearon bandas en la dirección 'x' que permiten hacer un análisis de Bandas Finitas clásico, con una variación de espesor transversal. Se denomina 'solución prismática' a la obtenida por esta vía. La Figura 4. muestra ambas soluciones para distintas relaciones a/L y valores del parámetro de perturbación τ .

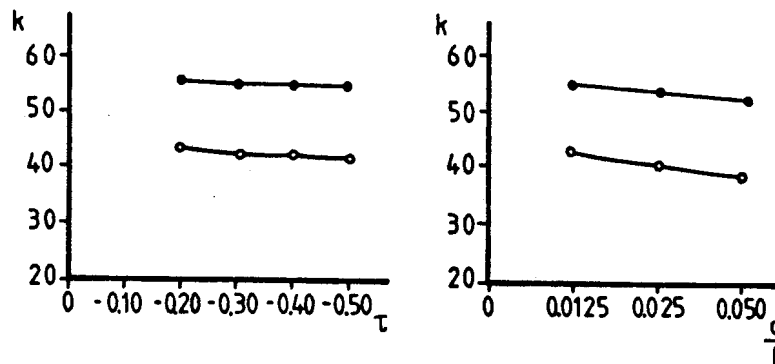


Figura 4. Comparación entre la solución por perturbaciones y la solución prismática. En (a), $a/L = 0.0125$. En (b), $\tau = -0.20$.

—○— solución por perturbaciones.
—●— solución prismática.

La diferencia entre ambas está directamente relacionada con la aproximación realizada en la evaluación de la matriz de carga-geometría en el problema no prismático. En otras palabras, la técnica simplificada de perturbaciones propuesta converge al modelo que se está representando, que no es el físicamente adecuado, señalando la necesidad de mejorar los esfuerzos en la trayectoria fundamental de equilibrio.

7. CONCLUSIONES.

Se ha presentado una técnica simplificada de perturbaciones en Bandas Finitas para el análisis de bifurcación de láminas plegadas con espesor variable longitudinalmente. Esta permite, una vez obtenida la solución del estado de referencia (correspondiente a la estructura de iguales características pero de espesor longitudinal constante), estudiar los cambios en el espesor por medio de la resolución de sucesivos sistemas lineales cuya matriz de coeficientes es la misma. Las matrices que corrigen a la de rigidez clásica resultan armónicamente acopladas. Sin embargo, al ser pequeño el número de sistemas de perturbación a resolver, el costo computacional no se incrementa significativamente.

La aproximación realizada para la determinación de la matriz de carga-geometría implica que, para determinar la carga crítica del problema no prismático de espesor variable se requiere la solución del estado fundamental asociado al caso de espesor

constante. Si bien esto constituye una ventaja en el sentido que son solamente tres las matrices adicionales a evaluar, los resultados demuestran la necesidad de expandir no sólo la matriz de rigidez del sistema, sino también la de carga-geometría.

REFERENCIAS.

- [1]. Godoy, L. A., A perturbation formulation for imperfection analysis of thin walled structures, aceptado para publicación en Latin American Applied Research, (1988).
- [2]. Raichman, S. R., Godoy, L. A., A perturbation finite strip analysis of non prismatic structures. (Sometido a publicación).
- [3]. Raichman, S. R., Análisis lineal y de bifurcación de placas plegadas prismáticas usando una banda finita de orden superior, Tesis de Magister en Ingeniería Estructural, Univ. Nac. de Tucumán, Argentina, (1988).
- [4]. Raichman, S. R., Godoy, L. A., Una banda finita de orden superior para inestabilidad de láminas plegadas, en Mecánica Computacional, Vol. 7 (Ed. L.A. Godoy, F. Flores y C. Prato), Asociación Argentina de Mecánica Computacional (1988).
- [5]. Thompson, J. M. T., Hunt, G. W., A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, Inglaterra, (1973).
- [6]. Benedettini, F., Capecchi, D., A perturbation technique in sensitivity analysis of elastic structures, Meccanica, 23, 5-10, (1988).
- [7]. Nelson, R. B., Simplified calculation of eigenvectors derivatives, AIAA Journal, Vol. 14, N° 9, pp 1201-1205, (1976).

AGRADECIMIENTOS.

El presente trabajo es parte de un proyecto sobre Métodos Numéricos en Mecánica Estructural que cuenta con el apoyo del Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina (CONICET) y de Córdoba (CONICOR), a través de subsidios.

