

**INESTABILIDAD ESTRUCTURAL CON RESTRICCIONES EN LA CARGA:
UNA FORMULACION DISCRETA.**

Anibal E. MIRASSO¹
Luis A. GODOY²

Departamento de Estructuras, FCEFN, Universidad Nacional de
Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina.

RESUMEN

En esta comunicación se presenta una formulación alternativa para encontrar las condiciones de equilibrio postcrítico de sistemas estructurales, discretizados por elementos finitos, bajo la acción de cargas que dependen de los desplazamientos. La formulación es adecuada para el análisis por Elementos Finitos y considera la función energía potencial total de un sistema clásico en un dominio restringido de sus parámetros. Se resuelven los sistemas no lineales con el Método de las Perturbaciones y la Técnica de Sustitución. Se obtienen condiciones para clasificar el estado de equilibrio crítico distinto. Se estudia la inestabilidad de un modelo mecánico simple de dos grados de libertad en un rango paramétrico desde el problema clásico de Euler al no conservativo de Beck.

ABSTRACT.

An alternative formulation to obtain postcritical equilibrium conditions of discrete structural systems under of follower forces, is presented in this work. The formulation is suitable for finite elements analysis and considers the total potential energy function of a classical system, in a restricted domain of its parameters. The non-linear equations are solved by the perturbation method and the substitution technique. Conditions are obtained that make possible a classification for the distinct critical equilibrium state. The instability of a simple two degree of freedom mechanical model is studied in a parametric range from the classical problem of Euler to the non-conservative of Beck.

¹ Becario de CONICET.

² Profesor Asociado e Investigador, CONICET.

1. INTRODUCCION.

El estudio de la estabilidad de los estados de equilibrio de un sistema estructural puede hacerse básicamente por dos vías. En primer lugar, mediante un análisis no lineal directo basado en técnicas incrementales, que si bien determinan el estado crítico del sistema, no son capaces de clasificar el fenómeno en forma inmediata. En segundo lugar, se puede analizar el problema mediante formulaciones especiales que estudian al punto crítico mismo [1,2]. Estas dan información adicional a la obtenida por un análisis no lineal directo y permiten así clasificar el fenómeno. Los problemas resueltos por Elementos Finitos mediante esta vía hasta el presente [2-8] exigen la existencia de un potencial total para el sistema estructural.

Existen algunos sistemas estructurales donde actúan cargas dependientes de desplazamientos, para los cuales la inestabilidad de tipo 'flutter' puede ser descartada y por lo tanto pueden ser tratados con el criterio energético [9-11]. En estos sistemas, llamados pseudo-conservativos en [9], suele ser frecuente la imposibilidad de explicitar la función energía potencial total para la discretización adoptada, ya que las ecuaciones de equilibrio resultan no simétricas, aunque diagonalizables. Esta diagonalización es posible en sistemas que presentan puntos críticos distintos, para los cuales no hay acoplamiento de modos, tomando como base justamente esos modos.

En este trabajo se analiza el equilibrio post-crítico, en la vecindad del estado crítico distinto, de sistemas con cargas dependientes de desplazamientos poscríticos, como límite de un sistema clásico, para el cual se conoce un potencial total, al que se le agregan restricciones en la variación de sus parámetros.

Por este motivo, al sistema de cargas se lo divide en dos: uno controlado por el parámetro λ , que es la parte de las cargas independientes de los desplazamientos; otro controlado por el parámetro H que representa a las cargas dependientes de desplazamientos. Pero el equilibrio para el nuevo sistema estructural se buscará para variaciones especiales de sus grados de libertad. Estas variaciones deberán verificar las ecuaciones de restricción del problema que se toman de la definición misma de las cargas seguidoras que actúan en el modelo original.

2. COMPORTAMIENTO DE ESTADOS CRITICOS DISTINTOS DE SISTEMAS CON CARGAS DEPENDIENTES DE DESPLAZAMIENTOS

2.1. ANALISIS POR PERTURBACIONES

Se supone que las cargas pueden representarse a través de dos parámetros de carga: λ representa componentes de carga que se considerarán independientes; mientras que la dependencia de cargas con desplazamientos se pondrá de manifiesto a través de las componentes cuyo parámetro de control se denomina

H. A los efectos de escribir la energía potencial total del sistema clásico, supondremos inicialmente que λ y H son independientes entre sí.

El equilibrio en las vecindades de un estado crítico distinto C [2] corresponde a un valor estacionario del funcional energía potencial total respecto a las coordenadas generalizadas, que se expresa

$$V_i(q_j, \lambda, H) = 0 \quad (1.1)$$

donde

q_j desplazamientos incrementales,
 V_i indica derivadas de V respecto a los grados de libertad q_i .

Para considerar la dependencia de las cargas con los desplazamientos, se condiciona la búsqueda del estado de equilibrio a la región definida por k ecuaciones de restricción

$$f_k(q_j, \lambda, H) = 0 \quad (1.2)$$

que se obtienen de la relación existente, entre el sistema de cargas independientes (con parámetros de control λ), el sistema de cargas seguidoras (con parámetro de control H) y los desplazamientos. Nótese que el número de ecuaciones de restricción es menor o a lo sumo igual al número de ecuaciones de equilibrio. En lugar de expresar el problema a través de un único potencial, las ecuaciones (1) lo definen a través de dos sistemas de ecuaciones no lineales, que deben resolverse en forma simultánea. El potencial en este último enfoque es mucho más simple que el que se obtendría en el enfoque sin restricciones, pero con cargas seguidoras en el potencial.

Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales (1) se recurre al Método de las Perturbaciones [2,12]. Así se propone una solución asintótica del tipo:

$$\begin{aligned} q_j &= Q_j^C + q_j^{(1)C} s + \frac{1}{2!} q_j^{(2)C} s^2 \dots \\ \lambda &= \lambda^C + \lambda^{(1)C} s + \frac{1}{2!} \lambda^{(2)C} s^2 \dots \\ H &= H^C + H^{(1)C} s + \frac{1}{2!} H^{(2)C} s^2 \dots \end{aligned} \quad (2)$$

donde s es un parámetro de perturbación adecuado; y
 $()^{(r)}$ indica derivada de orden r respecto a s .

Si se reemplazan las series (2) en el sistema (1) quedan funciones implícitas de s ,

$$\begin{aligned} V_i(q_j(s), \lambda(s), H(s)) &= 0 \\ f_k(q_j(s), \lambda(s), H(s)) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

cuyas derivadas sucesivas respecto a s serán nulas, y al ser evaluadas en el estado crítico permitirán obtener los coeficientes de las series (2). Estas derivadas sucesivas constituyen los sistemas de ecuaciones de perturbación. A continuación se presentan los dos primeros,

$$v_{ij} q_j^{(1)} + v_i' \lambda^{(1)} + \dot{v}_i H^{(1)} \Big|_0 = 0$$

$$r_{kj} q_j^{(1)} + r_k' \lambda^{(1)} + \dot{r}_k H^{(1)} \Big|_0 = 0$$

$$v_{ij} q_j^{(2)} + v_i' \lambda^{(2)} + \dot{v}_i H^{(2)} + \\ + \langle v_{i,j,s} q_j^{(1)} + v_{i,s}' \lambda^{(1)} + \dot{v}_{i,s} H^{(1)} \rangle \Big|_0 = 0$$

$$r_{kj} q_j^{(2)} + r_k' \lambda^{(2)} + \dot{r}_k H^{(2)} + \\ + \langle r_{k,j,s} q_j^{(1)} + r_{k,s}' \lambda^{(1)} + \dot{r}_{k,s} H^{(1)} \rangle \Big|_0 = 0$$

donde

($\dot{}$) indica derivada con respecto a H,
 (\prime) indica derivada con respecto a λ ,
 los términos (\rangle_s indican derivación respecto a s,
 pero según la regla de la cadena.

Estos sistemas lineales tienen las siguientes características:

- todos los sistemas tienen los mismos coeficientes de las incógnitas,
- el término independiente depende de las soluciones anteriores.

Cualquier sistema de perturbación se puede expresar de la forma genérica

$$v_{ij} q_j^{(r)} + v_i' \lambda^{(r)} + \dot{v}_i H^{(r)} + v_i^{r-1} \Big|_0 = 0 \tag{4}$$

$$r_{kj} q_j^{(r)} + r_k' \lambda^{(r)} + \dot{r}_k H^{(r)} + r_k^{r-1} \Big|_0 = 0$$

donde

$$v_i^{r-1} = v \left\{ q_j^{(r-1)} \dots q_j^{(1)}, \lambda^{(r-1)} \dots \lambda^{(1)}, H^{(r-1)} \dots H^{(1)} \right\} \tag{5.1}$$

$$r_k^{r-1} = r \left\{ q_j^{(r-1)} \dots q_j^{(1)}, \lambda^{(r-1)} \dots \lambda^{(1)}, H^{(r-1)} \dots H^{(1)} \right\} \tag{5.2}$$

Siguiendo a [13] es posible usar la técnica de sustitución de variables para resolver el r-ésimo sistema de perturbación (4). Para ello se obtiene $H^{(r)}$ de las ecuaciones de

restricción en la forma:

$$H^{(r)} = - \hat{f}_k \left\{ f_{kj} q_j^{(r)} + f'_k \lambda^{(r)} + f_k^{r-1} \right\} \quad (6)$$

lo cual es posible debido a que, al ser las restricciones siempre activas en H, se tiene que

$$\dot{f}_k \neq 0 \quad (7)$$

Reemplazando la (6) en las ecuaciones de equilibrio post-crítico, se llega a

$$A_{ij} q_j^{(r)} + b_i \lambda^{(r)} + t_i^{r-1} |^C = 0 \quad (8)$$

donde

$$A_{ij} = V_{ij} - V_i \hat{f}_k f_{kj} \quad (9)$$

$$b_i = V'_i - V_i \hat{f}'_k f'_k \quad (10)$$

$$t_i^{r-1} = v_i^{r-1} - V_i \hat{f}_k f_k^{r-1} \quad (10)$$

$$\hat{f}_k = f'_k \frac{1}{f_i f_l} \quad (11)$$

La solución general de (8) es posible expresarla como suma de la solución homogénea más una solución particular [14] (o suma de dos soluciones particulares)

$$q_j^{(r)} = \alpha_r x_j + (\lambda^{(r)} Y_j + Y_j^r) \quad (12)$$

donde

x_j es solución no nula del sistema

$$A_{ij} x_j |^C = 0 \quad (13)$$

que está garantizada por ser C un punto crítico distinto, y Y_j, Y_j^r son soluciones particulares de los sistemas

$$\begin{aligned} A_{ij} Y_j &= -b_i \\ A_{ij} Y_j^r &= -t_i^{r-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Se debe señalar que el coeficiente α_r depende de las soluciones particulares elegidas y se explicitará al elegir un parámetro de perturbación s adecuado. Si se considera (12) en (5) es posible tener una dependencia funcional única en $\lambda^{(r)}$, ya que

$$H^{(r)} = - \hat{f}_k \left\{ \alpha_r f_{kj} x_j + \lambda^{(r)} [f_{kj} y_j + f'_k] + \right. \\ \left. + f_{kj} y_j^r + f_k^{r-1} \right\} \quad (15)$$

$$t_i^{r-1} = t_i \left\{ \alpha_{r-1} x_j, q_j^{(r-2)}, \dots, q_j^{(1)}, \right. \\ \left. \lambda^{(r-1)}, \dots, \lambda^{(1)}, y_j^{r-1}, H^{(r-2)}, \dots, H^{(1)} \right\} \quad (16)$$

Se puede ahora obtener $\lambda^{(r)C}$ aplicando el mecanismo de contracción [2] sobre el sistema de orden r o de orden $r+1$ según corresponda.

2.2. PUNTO LIMITE.

Sea ψ_i solución del sistema

$$\psi_i A_{ij} |^C = 0 \quad (17)$$

es decir un autovector por izquierda de A_{ij}^C , que en general podrá no coincidir con el autovector por derecha x_j (13), debido a la posible falta de simetría de A_{ij}^C .

Si se aplica contracción sobre (8), en virtud de (17) resulta

$$\langle \psi_i b_i \rangle \lambda^{(r)} + \langle \psi_i t_i^{r-1} \rangle |^C = 0 \quad (18)$$

de modo que si

$$\langle \psi_i b_i \rangle |^C \neq 0 \quad (19)$$

es posible calcular

$$\lambda^{(r)C} = - \frac{\langle \psi_i t_i^{r-1} \rangle |^C}{\langle \psi_i b_i \rangle |^C} \quad (20)$$

En estas circunstancias es adecuado elegir como parámetro de perturbación a H ,

$$s = H \quad (21)$$

y por lo tanto

$$H^{(r)} = \delta_{1r} \quad (22)$$

donde δ_{1r} es el Delta de Kronecker.

La condición (22) en (15) permite obtener el coeficiente α_r para las soluciones particulares Y_j, Y_j^r de (14) elegidas. Es fácil verificar que para $r = 1$ resulta que

$$t_i^{0C} = f_i^{0C} = t_i^{0C} = 0 \quad (23)$$

y así se queda

$$\text{de (20)} \quad \lambda^{(1)c} = 0 \quad (24.1)$$

$$\text{de (12)} \quad q_j^{(1)c} = x_j \quad (24.2)$$

$$\text{de (15) y (22)} \quad 1 = -\hat{f}'_k f_{kj} x_j \quad (24.3)$$

Para $r = 2$ es fácil verificar que, conocidos (24) resulta

$$t_i^1 = p_i^1(x_j) \quad (25)$$

y así se obtiene:

$$\text{de (20)} \quad \lambda^{(2)c} = - \frac{(\psi_i p_i^1(x_j))}{(\psi_i b_i)} \Big|_c \quad (26.1)$$

de (15) y (22)

$$\alpha_2 = \frac{\hat{f}'_k \left\{ \lambda^{(2)} [f_{kj} y_j + f'_k] + f_{kj} y_j^2 + f_k^1 \right\}}{\hat{f}'_k f_{kj} x_j} \Big|_c \quad (26.2)$$

$$\text{de (12)} \quad q_j^{(2)} = \alpha_2 x_j + Y_j \lambda^{(2)c} + Y_j^2 \quad (26.4)$$

La forma de la solución asintótica de segundo orden obtenida permite clasificar este comportamiento como PUNTO LIMITE

2.3. BIFURCACIONES

Cuando se cumple que

$$\psi_i b_i \Big|_c = 0 \quad (27)$$

no es posible obtener $\lambda^{(r)}$ de (18). Es conveniente recurrir a la contracción del sistema de orden $(r+1)$, obteniéndose

$$\psi_i t_i^r \left\{ \alpha_r x_j, q_j^{(r-1)}, \dots, q_j^{(1)}, \lambda^{(r)}, \dots, \lambda^{(1)} \right. \\ \left. H^{(r)} \alpha^{(r)}, H^{(r-1)} \dots H^{(1)} \right\} \Big|_c = 0 \quad (28)$$

ecuación que relaciona a $\lambda^{(r)c}$ y α_r .

Siguiendo la teoría general de estabilidad, [2] es adecuado en este caso elegir como parámetro de perturbación a

$$s = q_1 \quad (29)$$

con lo que resulta

$$q_i^{(r)} = \delta_{ir} \quad (30)$$

Es posible elegir como soluciones particulares de (14) a aquellas que verifican que

$$Y_i = Y_i^r = 0 \quad (31)$$

De esta forma resulta de (12), (30) y (31)

$$\alpha_r = \delta_{ir} \quad (32)$$

Así es posible con (32) en (28) obtener una ecuación en una única incógnita $\lambda^{(r)c}$.

Conocido $\lambda^{(r)c}$ es posible completar la solución del r-ésimo sistema, a saber

de (12) con (32)

$$q_j^{(r)} = \delta_{ir} x_j + (\lambda^{(r)} Y_j + Y_j^r) \quad (33.1)$$

de (15) con (32)

$$H^{(r)} = - \hat{r}_k \left\{ \delta_{ir} r_{kj} x_j + \lambda^{(r)} [r_{kj} y_j + r'_k] + r_{kj} y_j^r + r_k^{r-1} \right\} \quad (33.2)$$

Es posible verificar que para $r=2$

$$t_i^4 = p_i^4(x_j) + \lambda^{(4)} r_i^4(x_j, Y_j) + \lambda^{(4)2} s_i^4(Y_j) \quad (34)$$

de manera que al contraer el segundo sistema surge

$$\lambda^{(4)2} A + \lambda^{(4)} B + C = 0 \quad (35)$$

con

$$A = \psi_i s_i^4(Y_j) \quad (36.1)$$

$$B = \psi_i r_i^2 (x_j, Y_j) \quad (36.2)$$

$$C = \psi_i p_i^2 (x_j) \quad (36.3)$$

Las dos posibles soluciones de (35) manifiestan el fenómeno de BIFURCACION. Si

$$C = \psi_i p_i^2 (x_j) \neq 0 \quad (37)$$

se trata de una BIFURCACION ASIMETRICA. Si

$$C = \psi_i p_i^2 (x_j) = 0 \quad (38)$$

la bifurcación será SIMETRICA pues

$$\lambda^{(2c)} = 0 \quad (39)$$

es solución de (35).

Para saber de qué tipo de simetría se trata se debe contraer el tercer sistema, en el cual, si se considera (31),(32) y (39) resulta

$$t_i^2 = p_i^2 (x_j, H^{(1)}, Y_j^{(2)}) + \lambda^{(2c)} r_i^2 (x_j, H^{(1)}, Y_j) \quad (40)$$

y así

$$\lambda^{(2c)} = - \frac{\psi_i p_i^2 (x_j, H^{(1)}, Y_j^{(2)})}{\psi_i r_i^2 (x_j, H^{(1)}, Y_j)} \quad (41)$$

Si $\lambda^{(2c)}$ es positivo será una BIFURCACION SIMETRICA ESTABLE, por lo contrario si es negativo será INESTABLE.

3. EJEMPLO.

A los efectos de ilustrar la teoría desarrollada anteriormente, se ha preferido aplicarla a un modelo mecánico sencillo de dos grados de libertad. La extensión a un modelo discretizado mediante Elementos Finitos no presenta dificultades adicionales, y se encuentra en este momento en fase de desarrollo.

Se analiza la estabilidad del equilibrio de una columna bajo la acción de cargas dependientes de los desplazamientos, adoptando un modelo simple de dos grados de libertad que se ilustra en la Figura 1. La rigidez flexional se concentra en dos resortes elásticos lineales ubicados en las

articulaciones del modelo. Los grados de libertad adoptados son los giros q_i de las barras rígidas alrededor de las articulaciones, medidos respecto de la vertical (Figura 1.). El sistema de cargas que se aplica sobre el extremo superior del sistema está formado por una carga vertical λ independiente de los desplazamientos, y una carga horizontal H , que está definida por

$$H - \gamma \lambda \operatorname{tg}(q_2) = 0 \quad (42)$$

donde γ es coeficiente que varía entre cero y uno. (Figura 1.)

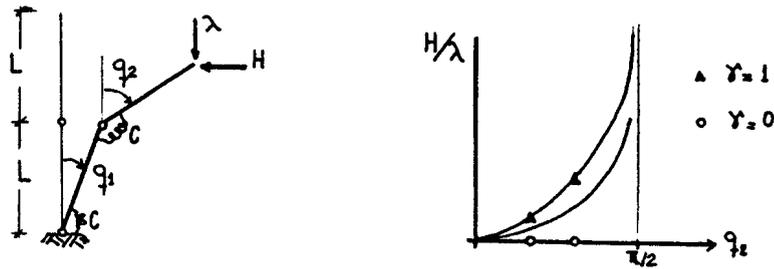


Figura 1.

Si ζ es el ángulo respecto a la vertical, de la resultante de fuerzas aplicadas en el extremo superior del sistema, se verifica que

$$\operatorname{tg}(\zeta) = \gamma \operatorname{tg}(q_2) \quad (43)$$

Se debe destacar que para $\gamma = 0$ se tiene el clásico caso de Euler con sólo carga vertical e independiente de los desplazamientos. En cambio, si se considera $\gamma = 1$ se obtiene el Problema de Beck [9].

El potencial total para cargas clásicas en este caso es

$$V(q_1, q_2, \lambda, H) = \frac{1}{21} q_1^2 2C + \frac{1}{21} q_2^2 C - q_1 q_2 C + H (\operatorname{sen}(q_1) + \operatorname{sen}(q_2)) - \lambda L (1 - \cos(q_2) + 1 - \cos(q_2)) \quad (44)$$

donde C es la rigidez flexional, y L la longitud de las barras.

Si se consideran las aproximaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(q_i) &= q_i - \frac{1}{61} q_i^3 + \dots \\ \cos(q_i) &= 1 - \frac{1}{21} q_i^2 + \frac{1}{41} q_i^4 - \dots \\ \operatorname{tg}(q_i) &= q_i + \frac{1}{3} q_i^3 + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

en el potencial total (44), y en (43), que se toma como la Ecuación de Restricción, se tiene

$$V(q_1, q_2, \lambda, H) = \frac{1}{2!} q_1^2 2C + \frac{1}{2!} q_2^2 C - q_1 q_2 C +$$

$$+ H L \left\{ q_1 + q_2 - \frac{1}{8!} q_1^8 - \frac{1}{8!} q_2^8 + \dots \right\} - \quad (46)$$

$$- \lambda L \left\{ \frac{1}{2!} q_1^2 + \frac{1}{2!} q_2^2 - \frac{1}{4!} q_1^4 - \frac{1}{4!} q_2^4 + \dots \right\}$$

$$r_1(q_1, q_2, \lambda, H) = H - \gamma \lambda \left(q_2 + \frac{1}{8} q_2^8 + \dots \right) = 0 \quad (47)$$

Así de (9) resulta

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 - \mu & \gamma \mu - 1 \\ -1 & 1 - \mu + \gamma \mu \end{bmatrix} C \quad (48)$$

donde
$$\mu = \frac{\lambda L}{C} \quad (49)$$

La solución del problema de valores propios (13) exige que

$$\det[A_{ij}] = (1 - \gamma) \mu_c^2 + 3(\gamma - 1) \mu_c + 1 = 0 \quad (50)$$

cuya solución es

$$\mu_c = \frac{3(1 - \gamma)}{2(1 - \gamma)} \left\{ 1 \pm \left[1 + \frac{4(1 - \gamma)}{9(1 - \gamma)^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (51)$$

$$\langle \alpha_j \rangle^T = \left\{ 1, \frac{1}{(1 - \mu_c + \gamma \mu_c)} \right\}^T \quad (52)$$

$$\langle \psi_j \rangle^T = \left\{ 1, \frac{-(\gamma \mu - 1)}{(1 - \mu_c + \gamma \mu_c)} \right\}^T$$

Al evaluar b_i con (9) resulta,

$$b_i = 0 \quad (53)$$

Así si se considera (27) con (52) y (53) se concluye que el sistema presenta una Bifurcación.

Se elige a q_1 como parámetro de perturbación. En virtud de (30), (31) y (53), de (14) se obtiene

$$y_j = 0 \quad (54)$$

y así resulta

$$q_j^{(1)C} = x_j \quad (55)$$

con x_j dado por (52).

Al evaluar los coeficientes (36) como

$$p_i^{1C} = 0 \quad (56)$$

resulta C nulo y por lo tanto

$$\lambda^{(4)C} = 0 \quad (57)$$

Con los resultados (52) y (56) de (33.2) se tiene que

$$H^{(4)C} = \frac{\lambda^C \gamma}{(1 - \mu_0 + \gamma \mu_0)} \quad (58)$$

Como consecuencia de (56) y (57) de (34) resulta que

$$t_l^{(4)C} = 0 \quad (59)$$

y si se considera (53) y (59), con (30) y (31), en (14) se obtiene

$$\begin{aligned} y_j &= 0 \\ y_j^2 &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Si se considera (60) y (33.1), se tiene

$$q_j^{(2)C} = 0 \quad (61)$$

Al evaluar (41), resulta

$$\lambda^{(2)C} = - \frac{DN}{D} \Big|_C \quad (62)$$

con

$$\begin{aligned} DN &= \lambda L (\psi_1 x_1^3 + \psi_2 x_2^3) + 2 \gamma \lambda L (\psi_1 x_2^3 + \psi_2 x_2^3) - \\ &\quad - 3 L H^{(1)} (\psi_1 x_1^2 + \psi_2 x_2^2) \end{aligned} \quad (63)$$

$$D = 3 L \psi_1 (x_2 \gamma - x_1) + 3 L \psi_2 x_2 (\gamma - 1)$$

donde la componentes de ψ_j y x_j están dadas por (52).

Con (51), (55), (57), (61) y (62), se puede expresar una solución cuadrática de la trayectoria poscrítica:

$$\frac{\lambda}{\lambda^C} = 1 + \chi^C q_1^2 \quad (64)$$

con

$$\chi^C = \frac{\lambda^{(2)C}}{2 \lambda^C}$$

La Tabla I. muestra las cargas críticas y modos críticos obtenidos en función de γ .

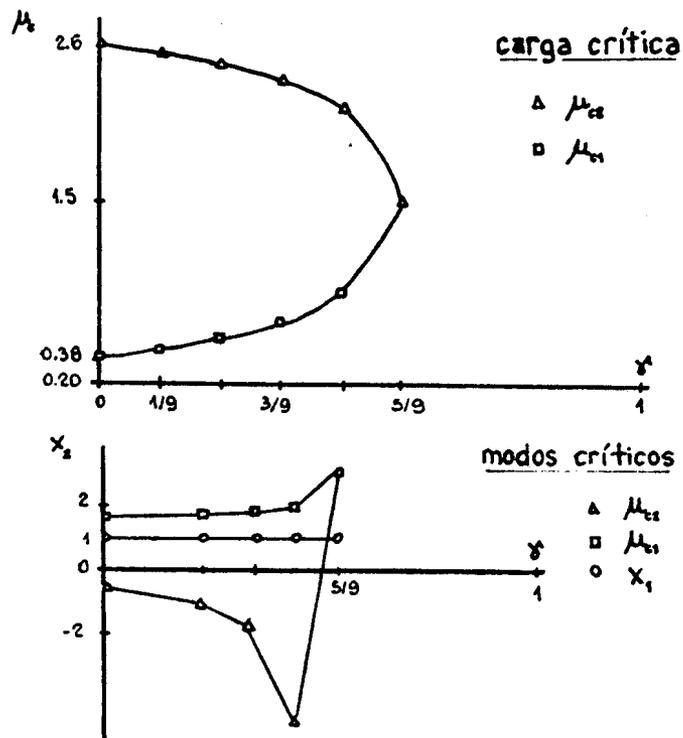


Figura 2.

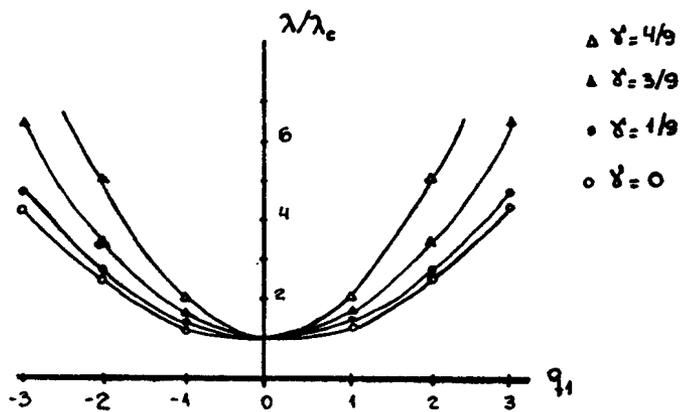


Figura 3.

Tabla I.

γ	μ_{c1}	x_2	ψ_2	χ_1
0	0.3819	1.6180	1.6180	0.3618
1/9	0.4998	1.6407	1.5607	0.4074
2/9	0.5180	1.6748	1.4820	0.4812
3/9	0.6340	1.7321	1.3660	0.6220
4/9	0.8292	1.8541	1.1708	1.0057
5/9	1.5000	3.0000	0.5000	2.66661

γ	μ_{c2}	x_2	ψ_2	χ_2
0	2.6180	-0.6180	-0.6180	0.1382
1/9	2.5607	-0.7886	-0.5606	0.1572
2/9	2.4820	-1.0747	-0.4820	0.1656
3/9	2.3660	-1.7321	-0.3660	0.0447
4/9	2.1708	-4.8541	-0.1708	-3.8990
5/9	1.5000	+3.0000	+0.5000	-2.66672

Se observa que cuando γ crece y toma el valor 5/9 las cargas críticas coinciden en el valor 3/2, y los modos críticos asociados también coinciden (Figura 2.). A partir de este valor el sistema no puede ser más tratado por el criterio energético ya que no es posible encontrar una base en la cual las ecuaciones gobernantes puedan diagonalizarse. Las componentes no conservativas son demasiado importantes y la inestabilidad tipo flutter no puede descartarse. En la Figura 3. se representan las soluciones asintóticas de segundo orden obtenidas para el primer estado crítico.

4. CONCLUSIONES

Se ha obtenido el equilibrio poscrítico de sistemas pseudo-conservativos con cargas seguidoras mediante las condiciones de estacionalidad de un potencial clásico, en un dominio restringido de sus variables. Ese potencial clásico se obtiene de considerar a todas las cargas independientes de los desplazamientos pero asociadas a dos parámetros de control. El dominio se restringe con las relaciones existentes entre cargas seguidoras y desplazamientos. Las ecuaciones no lineales se han resuelto con el método de las perturbaciones y la técnica de sustitución.

La formulación alternativa que se presentó, es particularmente ventajosa para clasificar el estado de equilibrio crítico de sistemas estructurales para los cuales se conoce la definición de las cargas dependientes de los desplazamientos, y se evidencia una falta de simetría que imposibilita la formulación de un potencial total que involucre a las cargas seguidoras.

Cabe señalar que aún cuando se han ampliado las condiciones de clasificación de estados críticos distintos, se

mantienen acotadas a los casos en que la inestabilidad de tipo flutter puede ser descartada.

Para el ejemplo analizado se muestra no sólo el límite hasta el cual puede tratarse al sistema como pseudo-conservativo [9], sino también la influencia de la dependencia de las cargas con los desplazamientos en las cargas críticas y las trayectorias poscríticas del sistema.

REFERENCIAS.

- [1]. Koiter, W. T., "On the Stability of Elastic Equilibrium", Ph.D. Thesis, Delft, (1945), (in Dutch). English translation, Air Force Flight Dyn. Lab. Tech. Rep. AFFDL-TR-70-25, February 1970.
- [2]. Thompson, J. M. T., Hunt, G. W., "A General Theory of Elastic Stability", John Wiley & Sons, Inglaterra, 1973.
- [3]. Haftka, R.; Mallett, R.; Nachbar, W., "Adaption of Koiter's method to finite element analysis of snap-through buckling behaviour". International Journal Solids Structures, 7, 1427-1445, (1971).
- [4]. Casciaro, A.; Di Carlo, M.; Pignataro, M.; "A finite element technique for bifurcation analysis", Pubblicazione N II-192, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Università Degli Studi di Roma, 1976.
- [5]. E. Carnoy, "Postbuckling analysis of elastic structures by the finite element method", Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, 23,143-174, 1980.
- [6]. E. Carnoy, "Asymptotic study of elastic postbuckling behaviour of structures by finite element method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 29, 147-173, 1981.
- [7]. Antonini, R., Batista, R., "Análise assintótica da estabilidade elástica de sistemas estruturais via MEF.", Anales VII Congreso Latino Americano sobre Métodos Computacionales para Ingeniería, Sao Carlos, SP, vol.I, pp 205-220, 1986.
- [8]. Flores, F.G., Godoy, L.A., "Análisis postcrítico asintótico de láminas de revolución bajo cargas axisimétricas", VI Encuentro Nacional de Investigadores y Usuarios del Método de Elementos Finitos, Bariloche, 3-7 julio de 1989.
- [9]. Huseyin, K., "Vibrations and Stability of Multiple Parameters Systems", Noordhoff International Publishing, Alphen Aan Den Rijn, 1978.
- [10]. Schweizerhoff, K. and Ramm, E., "Follower forces effects on stability of shells under hydrostatic loads", Jour. Eng. Mech., A.S.C.E., vol. 113(1), 1987.
- [11]. Schweizerhoff, K. and Ramm, E., "Displacement dependent

pressure loads in non linear finite element analysis", *Computer & Structures*, vol.18(6), 1984.

[12]. *Croll, J. G. A., Walker, A. C.*, "Elementos de Estabilidad Estructural", Ed. Reverté, Barcelona, (1975).

[13]. *Godoy, L. A.*, "Formulaciones discretas en problemas de inestabilidad con restricciones", V Encuentro Nacional de Investigadores y Usuarios del Método de Elementos Finitos, Bariloche, 13-17 julio de 1987.

[14]. *Hoffman, K. y Kunze, R.*, "Linear Algebra", Prentice Hall, 1961.

AGRADECIMIENTOS.

El presente trabajo es parte de un proyecto sobre Métodos Numéricos en Mecánica Estructural que cuenta con el apoyo del Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina (CONICET) y de Córdoba (CONICOR), a través de subsidios.