

UN PRINCIPIO VARIACIONAL PARA PLACAS TIPO MINDLIN  
SU APLICACION A CASCARAS

Roberto S. Carnicer  
Departamento de Mecánica Computacional  
E.N.A.C.E. S.A.  
Av. Leandro N. Alem 712. Buenos Aires (1112) Argentina

Alicia N. Bergmann  
Departamento de Mecánica Computacional  
E.N.A.C.E. S.A.

Raúl D. Bertero  
Departamento de Mecánica Computacional  
E.N.A.C.E. S.A.

RESUMEN

En el presente artículo, se analiza el comportamiento flexional de cáscaras basado en la teoría de placas de Mindlin mediante técnicas de elementos finitos. Para evitar el efecto usual de bloqueo en placas se utiliza un funcional de Mindlin modificado.

ABSTRACT

In the present paper, it is analyzed the shell flexional behaviour based on the Mindlin Plate theory by means of Finite Element Techniques. In order to avoid the usual "locking" problem on plates, a modify Mindlin functional is used.

## INTRODUCCION

El análisis del comportamiento flexional de placas mediante la técnica de elementos finitos ha sido objeto de importantes investigaciones, cuya formulación en general puede ser dividida en dos grupos: una basada en la teoría de placas de Kirchhoff y la otra en la teoría de placas de Mindlin (que incluye la deformación por corte). Bajo la hipótesis de Kirchhoff, los elementos finitos que derivan del teorema de los trabajos virtuales, o del de la mínima energía potencial total deben satisfacer una compatibilidad  $C_1$  a lo largo de los contornos del elemento. Por otro lado en la formulación basada en la hipótesis de Mindlin no se requiere dicha compatibilidad, basta  $C^0$ .

Pero desafortunadamente, estos elementos de tipo  $C^0$  tienen la tendencia al bloqueo cuando el espesor de la placa se hace cada vez más pequeño.

Se han efectuado muchos esfuerzos para solucionar este problema, entre ellos podemos citar, el de la teoría discreta de Kirchhoff [1-2], donde se controla la energía de deformación por corte en un número discreto de puntos, el de integración reducida en la evaluación de los coeficientes de la matriz de rigidez [3-4] y otros [5-6]. Según nuestro conocimiento, el primer resultado general que converge, independientemente del espesor, es el obtenido por F. Brezzi y M. Fortin en 1986 [7].

Una perspectiva diferente, que consiste en modificar el funcional, mediante la inclusión de un "término de penalización", que fue desarrollado por S. Alliney y R. Carnicer, [8] permite alcanzar una formulación mixta, cuyas condiciones de estacionalidad coincide con la de Brezzi y Fortin [7].

Se incluye en este artículo un resumen de la formulación general.

Dado el adecuado funcionamiento de este procedimiento en el comportamiento flexional de placas, se desarrolla una aplicación directa, al caso flexional de cáscaras, que son discretizadas mediante elementos planos, de manera de aplicar a cada elemento el funcional modificado, obteniéndose buenos resultados, incluso cuando el espesor tiende a hacer cumplir la hipótesis de Kirchhoff, no evidenciándose efectos de bloqueo.

## FORMULACION VARIACIONAL PARA EL CASO DE PLACAS TIPO MINDLIN

La teoría clásica de Mindlin se basa en la hipótesis que las secciones planas luego de la deformación permanecen planas pero no norma-

les a la superficie media de la placa deformada. Esta simplificación es la más elemental que incluye el efecto de deformación por corte. Si expresamos las rotaciones en torno de los ejes X e Y, como  $\beta_1$  y  $\beta_2$  respectivamente (Fig. 1), el campo de desplazamiento asociado al comportamiento flexional, viene dado por,

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= -Z \beta_1(x, y) \\ V(x, y, z) &= -Z \beta_2(x, y) \\ W(x, y, z) &= W(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

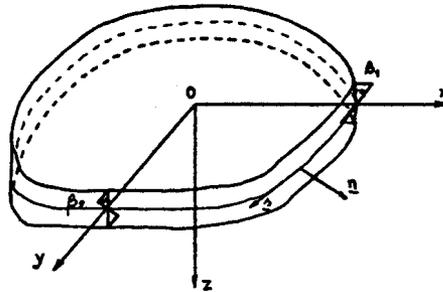


Figura 1

Se asume que la placa en su configuración inicial ocupa una región  $\Omega$  x  $[-h/2, h/2]$ , siendo  $h$  el espesor de la placa. La configuración deformada debido a la aplicación de cargas verticales (por unidad de superficie)  $f = [0, 0, f]$  se determina minimizando el funcional.

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} a(\underline{\beta}, \underline{\beta}) h^3 + \lambda \frac{h}{2} \left\| \nabla w - \underline{\beta} \right\|_0^2 - \iint_{\Omega} f w \, dx dy - \\ & - \int_{\partial\Omega_1} V_z w \, ds - \int_{\partial\Omega_2} \underline{M} \cdot (-\underline{\beta}) \, ds \end{aligned} \quad (2)$$

donde:  $V_z$  es la fuerza de contorno de corte en el borde  $\partial\Omega_1$ ,

$\underline{M}$  es el vector momento de contorno en el borde  $\partial\Omega_2$ ,

El primer término del funcional,

$$a(\beta, \beta) = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \iint [(\beta_{1,x} + \nu \beta_{2,y}) \beta_{1,x} + (\beta_{2,y} + \nu \beta_{1,x}) \beta_{2,y} + \frac{1-\nu}{2} (\beta_{1,y} + \beta_{2,x})^2] dx dy \quad (3)$$

representa la energía potencial relacionada con la flexión, mientras que el segundo,

$$\left\| \nabla w - \beta \right\|_0^2 = \iint_{\Omega} [(w_{,x} - \beta_1)^2 + (w_{,y} - \beta_2)^2] dx dy \quad (4)$$

tiene en cuenta el efecto de las fuerza de corte. Dividiendo el funcional por  $h^3$ , se obtiene,

$$J(\beta, w) = \frac{1}{2} a(\beta, \beta) + \frac{\lambda h^{-2}}{2} \left\| \nabla w - \beta \right\|_0^2 - \iint_{\Omega} g w dx dy - \int_{\partial\Omega\tau_1} V_z w ds - \int_{\partial\Omega\tau_2} \underline{M} \cdot (-\underline{\beta}) ds \quad (5)$$

Los dominios de las variables, que intervienen en el funcional son

$$\underline{\beta} \in V_{\beta}, \quad V_{\beta} = \{ \underline{\beta} \in [H^1(\Omega)]^2 \text{ y } \underline{\beta} = \underline{\bar{\beta}} \text{ en } \partial\Omega u_2 \}$$

$$\bar{w} \in V_w, \quad V_w = \{ w \in H^1(\Omega) \text{ y } w = \bar{w} \text{ en } \partial\Omega u_1 \}$$

$$\underline{M} \in V_M, \quad V_M = \{ \underline{M} \in [H^{1/2}(\partial\Omega\tau_2)]^2 \}$$

$$V_z \in V_V, \quad V_V = \{ V_z \in H^{1/2}(\partial\Omega\tau_1) \}$$

mientras que la carga  $g$  no es más que la carga  $f$  dividida por  $h^3$

En la formulación (5) solamente el término relacionado con las fuerzas de corte está multiplicado por  $h^{-2}$ ; de manera que se puede concluir que cuando el espesor  $h \rightarrow 0$ , se comporta como un "término de penalidad", asegurando la igualdad  $\underline{\nabla}w = \underline{\beta}$ , que coincide con la hipótesis de Kirchhoff.

De las condiciones de mínimo para  $J(\beta, w)$  se obtienen,

$$\delta_{\beta} J = a(\underline{\beta}, \underline{\gamma}) - \lambda h^{-2} (\underline{\nabla}w - \underline{\beta}, \underline{\gamma}) - h^{-3} \int_{\partial\Omega_2} (-\bar{M}) \cdot \underline{\gamma} \, ds = 0 \quad (6)$$

$$\delta_w J = \lambda h^{-2} (\underline{\nabla}w - \underline{\beta}, \underline{\nabla}v) - (g, v) - h^{-3} \int_{\partial\Omega_1} \bar{V} \bar{z} \cdot v \, ds = 0 \quad (7)$$

De la segunda ecuación aplicando integración por partes, inmediatamente surge que,

$$- \lambda h^{-2} (\underline{\gamma} \cdot (\underline{\nabla}w - \underline{\beta}), v) = (g, v) \quad (8)$$

sin incluir términos de divergencia nula. Por lo tanto la ecuación que asegura la condición de equilibrio de las fuerzas de corte con las cargas externas no controlan la parte rotacional del vector rotación.

#### UN PRINCIPIO VARIACIONAL MODIFICADO

Una descripción más precisa de la fuerza de corte se consigue, explicitando los componentes rotacionales e irrotacionales de,

$$(\underline{\nabla}w - \underline{\beta}) = h^2 (\underline{\nabla}\psi + \underline{\text{rot}} p) \quad (9)$$

con  $\underline{\text{rot}} p = P_{1y} \underline{e}_1 - P_{1x} \underline{e}_2$

$$\begin{aligned} \psi &\in H^1(\Omega) \text{ y } \psi = 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \\ p &\in H^1(\Omega) \text{ y } p = 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \end{aligned}$$

Este procedimiento corresponde básicamente al desarrollado por F. Brezzi y M. Fortin [7] y es más o menos standard en dinámica de los fluidos (V. Girault y Raviart [9]).

Aquí impondremos (9) mediante un término de penalización, de manera que el funcional modificado es,

$$J^* (\underline{\beta}, w, \psi, p) = U_1 - \frac{\lambda h^{-2}}{2} \left\| \left( \underline{\nabla} w - \underline{\beta} \right) - h^2 \left( \underline{\nabla} \psi + \underline{\text{rot}} p \right) \right\|_0^2 \quad (10)$$

Tomando variaciones con respecto a los argumentos de  $J^*$  (10), aplicando la regla de cálculo vectorial,

$$(\underline{\text{rot}} p, \underline{\nabla} v) = (\underline{\nabla} \cdot \underline{\text{rot}} p, v) = 0 \quad (11)$$

teniendo en cuenta las condiciones de borde, se obtiene que

$$\lambda (\underline{\nabla} \psi, \underline{\nabla} v) = (g, v) - h^{-3} \int_{\partial\Omega\tau} \nabla_z v \, ds \quad (12)$$

$$a(\underline{\beta}, \underline{\gamma}) - \lambda (\underline{\text{rot}} p, \underline{\gamma}) = \lambda (\underline{\nabla} \psi, \underline{\gamma}) + h^{-3} \int_{\partial\Omega\tau} \underline{M} \cdot \underline{\gamma} \, ds \quad (13)$$

$$(-\underline{\beta}, \underline{\text{rot}} q) = h^2 (\underline{\text{rot}} p, \underline{\text{rot}} q) \quad (14)$$

$$(\underline{\nabla} w, \underline{\nabla} x) = (\underline{\beta} + h^2 \underline{\nabla} \psi, \underline{\nabla} x) \quad (15)$$

Se observa que estas ecuaciones diferenciales se encuentran desacopladas, siendo la (12) un problema elíptico, que permite obtener el campo  $\psi$ , luego las (13) y (14) son equivalentes al problema de Stokes, de donde surgen  $\underline{\beta}$  y  $p$ , y finalmente la (15) es nuevamente una elíptica, obteniéndose  $w$ .

Además, en el caso que el espesor tiende a cero, el cumplimiento de

$$\underline{\nabla} w = \underline{\beta}, \quad \text{en } \Omega$$

es satisfecho por la (15), mientras que

$$\underline{\text{rot}} \underline{\beta} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad \text{se asegura por la (14)}$$

EJEMPLOS NUMÉRICOS PARA EL CASO PARTICULAR DE PLACAS

Se considera una placa simplemente apoyada isotrópica ( $\nu = 0,25$ ) de lado  $a$  y espesor  $h$ , solicitada a una carga uniforme  $f_0$  (Fig. 2). Los resultados obtenidos por medio de la presente formulación variacional (que denominamos "teoría de placas con deformación por corte modificada" o MSDPT) se comparan con el modelo con deformación por corte (teoría de placas con deformación por corte" o SDPT) como la define J.N. Reddy en [10].

El elemento usado en el modelo MSDPT corresponde a un elemento triangular con funciones de forma lineales para la incógnita  $w$  y  $p$  mientras que para  $\beta_1$  y  $\beta_2$  se utilizan funciones lineales más una "bubble function" [11]. En el modelo SDPT, el elemento es cuadrado, y sus funciones de forma lineales (para la evaluación de un coeficiente de rigidez se usa integración reducida).

En la Tabla 1 se muestran los desplazamientos en el centro de la placa normalizados

$$W = W(0,0) \frac{Eh^3}{10/f_0 a^4}$$

para los modelos SDPT (con (M) y sin (F) integración reducida) y MSDPT.

De los resultados surge que se alcanza una muy buena aproximación del MSDPT frente al SDPT con integración reducida aún cuando la relación  $h/a$  tiende a valores muy pequeños (hipótesis de Kirchhoff), sin evidenciar problemas de bloqueo ("Locking")

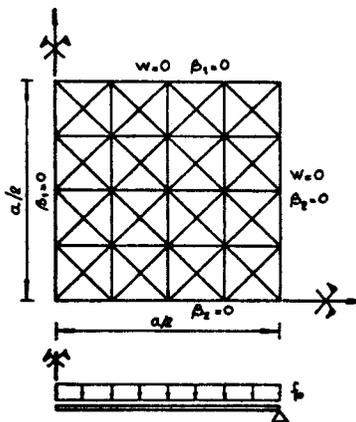


Figura 2

TABLA 1:

Efecto del uso del principio variacional modificado, su comparación con el efecto de integración reducido (M) e integración total (F), para el desplazamiento y la tensión en el centro de una placa isotrópica simplemente apoyada.

a/h	Integr.	SDPT 4 x 4 (linear) rectangular element		MSDPT 4 x 4 (linear) triangular element		Exact	
		w**	$\sigma$	w**	$\sigma$	w**	$\sigma$
10	F	3.883	0.216	4.720	0.267	4.791	0.276
	M	4.773	0.266				
20	F	2.363	0.137	4.576	0.273	4.625	0.276
	M	4.603	0.266				
30	F	0.944	0.059	4.540	0.273	4.584	0.276
	M	4.560	0.266				
40	F	0.652	0.038	4.536	0.273	4.579	0.276
	M	4.555	0.266				
50	F	0.182	0.018	4.530	0.273	4.572	0.276
	M	4.548	0.266				

APLICACIÓN DEL FUNCIONAL DE PLACAS PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO FLEXIONAL DE CÁSCARAS CON DEFORMACIÓN POR CORTE

Debido a los buenos resultados obtenidos en el análisis precedente, se decidió encarar el análisis de cáscaras, aprovechando su discretización mediante elementos planos triangulares.

Para ello se adoptó un sistema de coordenadas planas, donde cada elemento presenta un sistema de coordenadas oblicuas ( $x^1, x^2$ ) definido sobre una superficie, cuya coordenada de  $x^3$  coincide con la normal  $n$ , y su proyección sobre el plano  $\pi$  es un sistema de coordenadas planas ortogonales ( $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, n$ ) (Fig. 3)

$$\begin{aligned} x^1 &= \tilde{x}^1 \\ x^2 &= \tilde{x}^2 \\ x^3 &= \xi(x^1, x^2) \end{aligned} \quad (16)$$

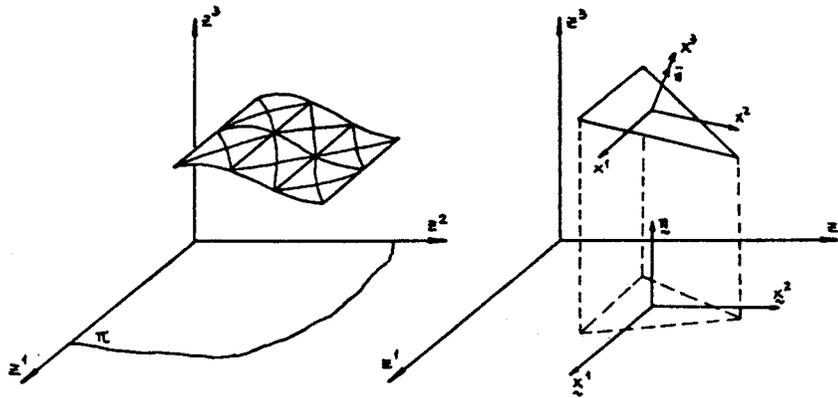


Figura 3

La función  $\xi(x^1, x^2)$  se obtiene a partir de los valores que la misma asume en los nodos 1, 2, 3, ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ )

$$\xi(x^1, x^2) = \xi_1 N_1(x^1, x^2) + \xi_2 N_2(x^1, x^2) + \xi_3 N_3(x^1, x^2) \quad (17)$$

siendo  $N_1(x^1, x^2)$ ,  $N_2(x^1, x^2)$ ,  $N_3(x^1, x^2)$  funciones de formas lineales.

El vector posición de un punto sobre el elemento  $\bar{r}(x^1, x^2)$  puede ser expresado como,

$$\bar{r}(x^1, x^2) = x^1 \bar{e}^1 + x^2 \bar{e}^2 + [\xi_1 N_1 + \xi_2 N_2 + \xi_3 N_3] \bar{e}^3 \quad (18)$$

de donde surge la métrica necesaria para la evaluación de las funciones ( $\psi$ ,  $p$ ,  $\beta$ ,  $w$ ) en el elemento.

Cada elemento se analiza como una placa plana, de manera que las ecuaciones diferenciales que surgen de minimizar el funcional de placas con deformación por corte modificado son aplicables para evaluar el comportamiento flexional de la cáscara.

$$\lambda (\nabla\psi, \nabla v) = (g, v) \quad v = \delta\psi \quad (19)$$

$$a(\beta, \gamma) - \lambda (\text{rot } p, \gamma) = \lambda (\nabla\psi, \gamma) \quad \gamma = \delta\beta \quad (20)$$

$$(-\beta, \text{rot } q) = h^2 (\text{rot } p, \text{rot } q) \quad q = \delta p \quad (21)$$

$$(\nabla w, \nabla x) = (\beta + h^2 \nabla\psi, \nabla x) \quad x = \delta w \quad (22)$$

donde  $\psi$ ,  $p$ ,  $w$  son escalares en el elemento  
 $\beta$  vector de rotaciones  
 $g$  carga normal a la superficie/ $h^3$   
 $\lambda$  módulo de corte (GK)

El operador  $a(\beta, \gamma)$  que surge de la minimización de la energía de deformación flexional, queda expresado, a partir de las nuevas coordenadas, como,

$$a(\beta, \gamma) = \int_{\Omega} E \alpha^{\beta\gamma\delta} \Gamma_{\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta} \frac{E}{12(1-\nu^2)} d\Omega \quad (23)$$

siendo

$$[\Gamma_{\alpha\beta}]^T = \{\beta_{1,1} \quad \beta_{2,2} \quad 1/2(\beta_{1,2} + \beta_{2,1})\}$$

$$E\alpha^{\beta\gamma\delta} = \nu a^{\alpha\beta} a^{\gamma\lambda} + (1 - \nu) a^{\alpha\gamma} a^{\beta\lambda}$$

con  $a^{\alpha\beta}$  los componentes del tensor métrico

Posteriormente se plantean las ecuaciones, (19,22), adoptándose funciones lineales dentro de cada elemento para las incógnitas  $w$ ,  $\psi$  y  $p$ ; y funciones lineales más una "bubble function" para  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , teniendo en cuenta para las diversas operaciones la métrica correspondiente.

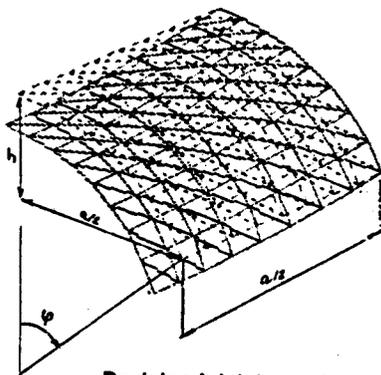
Nuevamente el problema se analiza desacopladamente, primero se obtiene el campo de  $\psi$ , a partir de la solución del problema elíptico (19), conocido  $\psi$  se resuelve el sistema de ecuaciones (20) (21), que es similar al problema mixto de Stokes, obteniéndose los campos  $p$  y  $\underline{\beta}$ , y finalmente otro problema elíptico (22) de donde surge  $w$ .

#### EJEMPLO NUMERICO PARA EL CASO PARTICULAR DE CASCARAS

Se analiza el comportamiento flexional de una cáscara cilíndrica abierta, apoyada sobre tímpanos, solicitada a una carga normal a su superficie  $f_0$ , de espesor  $h$ , cuya proyección sobre el plano  $\pi$  es un cuadrado de lados  $a \times a$  (Fig. 4). Se comparan los resultados del desplazamiento en la zona central con los obtenidos mediante un programa de incógnitas mixtas (M,w) que no presenta deformación por corte. En la Figura 5 se muestran las mallas utilizadas para ambas teorías.

Los desplazamientos normalizados para una relación de espesor/lado;  $h/a = 60$ , obtenidos mediante la teoría de Mindlin, no presentan bloqueo y alcanzan una buena aproximación frente a los obtenidos mediante la teoría de Kirchhoff (Fig. 6)

Finalmente se calculan los desplazamientos, cuando la deformación por corte comienza a evidenciarse ( $h/a = 5$ ) y se observa que los obtenidos por Mindlin superan a las de Kirchhoff como era de esperarse. (Fig. 7)



Posicion inicial y deformada

Figura 4

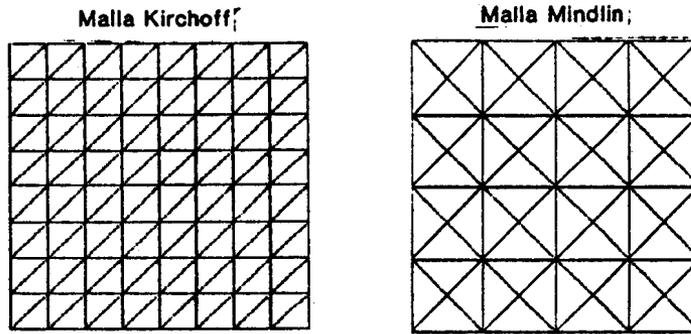


Figura 5

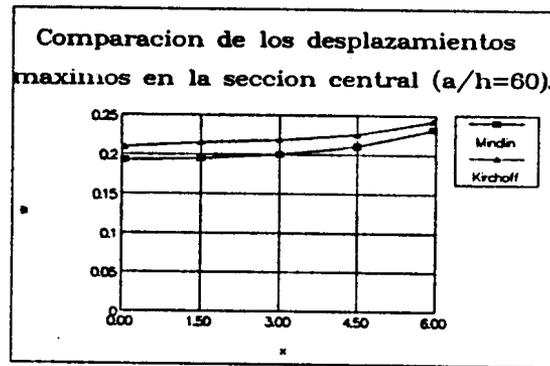


Figura 6

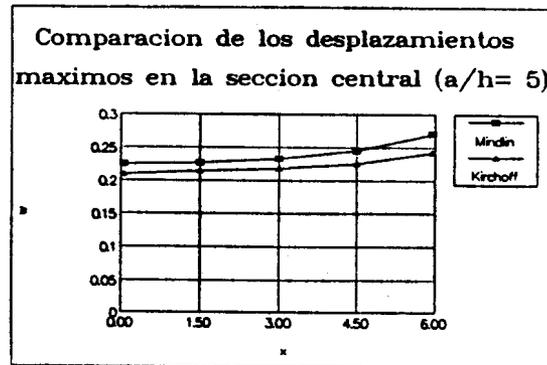


Figura 7

Referencias

- [1] O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method", Mc Graw-Hill, London, 3 rd. ed., 1977.
- [2] P.G. Ciarlet, "The Finite Element Method for Elliptic Problems", North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [3] F. Kikuchi, "On a mixed method related to the discrete Kirchhoff assumption", in: S. N. Atluri, R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz (eds.), Hybrid and Mixed Finite Element Methods", Wiley, Chichester, U.K., 1983 (p. 137-154).
- [4] U. Pitkaranta, "On simple finite element methods for Mindlin plates", in: G. Yagawa and S.N. Atluri (eds.) "Computational Mechanics 1". Springer , Tokyo, 1986 (p. 187-190).
- [5] A. Tessler and T.J.R. Hughes, "A three node Mindlin plate element with improved transverse shear", Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg. 50 (1985), 71-101
- [6] U. Donea and L.G. Lamain, "A modified representation of transverse shear in  $C^0$  quadrilateral plate elements", Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg. 63 (1987), 183-207.
- [7] F. Brezzi and M. Fortin, "Numerical approximation of Mindlin-Reissner plates", Math. Comp. 47 (1986). 151-158.
- [8] S. Alliney, R. Carnicer, "A Mindlin-Reissner variational principle to analyze the behaviour of moderately thick plates". Pan American congress of applied mechanics - Brazil - (1989).
- [9] V. Girault and P.A. Raviart, "Finite Element Approximation of Equations", Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [10] U.N. Reddy, "Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering", Mc Graw-Hill, New York, 1986.
- [11] D. N. Arnold, F. Brezzi, M. Fortin, "A stable finite element for the stokes equations", Calcolo Vol. 21, 1984, 337-344.

