

ALGUNOS ASPECTOS A CONSIDERAR EN LA
IMPLEMENTACION DEL METODO "FULL MULTIGRID"
SU USO SOBRE MALLA NO ESTRUCTURADAS

Mario Storti*

Norberto Nigro**

Sergio Idelsohn***

Instituto de Desarrollo Tecnológico para
la Industria Química (INTEC)
UNL-CONICET
Santa Fe-Argentina

Resumen

Este trabajo es una ampliación del presentado en el *MECOM 88* [1] y trata de la utilización del método multigrilla en un contexto de elementos finitos en combinación con técnicas de refinamiento adaptivo, comúnmente llamado método "*Full Multigrid*". Aquel trabajo fue aplicado a la resolución de problemas elípticos con singularidades tanto en el dominio como en los datos de borde. En ésta oportunidad trataremos algunos de los aspectos que a nuestro juicio resultan ser más importantes para su implementación y mostraremos algunos resultados que pueden ser de suma utilidad para mejorar la eficiencia en la resolución.

Abstract

This work is an extension of other that was presented at *MECOM 88* [1] and treat with the use of multigrid method combined with adaptive refinement on finite element context, that is commonly called "*Full Multigrid*". That work was applied to the resolution of elliptic problems with singularities either over the domain or the boundary data. En this opportunity we treat any of the most important aspects for its implementation and show any results that could be of great value towards the improvement of the efficiency in the resolution.

* Becario de Formación Superior del CONICET

** Becario de Iniciación del CONICET

*** Miembro de la Carrera del Investigador del CONICET

INTRODUCCION

Nos ubicaremos dentro del método multigrilla y dado que su aplicación es en un contexto de elementos finitos las mallas admisibles generadas serán no estructuradas. Además debido a la utilización de un mejoramiento adaptivo de la solución a través de un refinamiento tipo H, las mallas generadas también tendrán la característica de ser no homogéneas y anidadas. Ubicado ya en el marco de referencia que mencionáramos diremos que en virtud del mismo aparecen como temas de interés los siguientes:

A.- GENERACION DE LA SECUENCIA DE MALLAS

- 1.- Obtención de la malla G^R a partir de la malla G^{R-1} .
- 2.- Definición del conjunto de mallas G_i^R a partir de la malla G^R .
- 3.- Tratamiento de los elementos que poseen alguna de sus caras frente a un contorno físico del problema. ("Boundary Fitting")

B.- MULTIGRILLA EN

MALLAS NO ESTRUCTURADAS
MALLAS NO HOMOGENEAS
MALLAS ANIDADAS

- 1.- Clasificación de nodos en cada malla G_i^R .
- 2.- Esquema de relajación.
- 3.- Cómputo del residuo.
 - i en la zona relajada.
 - ii extensión a toda la malla.
 - iii tratamiento de nodos irregulares
- 4.- Interpolación y restricción.

C.- REFINAMIENTO ADAPTIVO

- 1.- Estimador de error.
- 2.- Estrategia de refinamiento.
 - i Estudio sobre mallas óptimas y distintos criterios de refinamiento.
 - ii Estudio sobre elección óptima del número de elementos a refinar.
- 3.- Convergencia y estabilidad del método bajo diversas mallas iniciales.

A.- GENERACIÓN DE LA SECUENCIA DE MALLAS

- 1.- Refinamiento de la malla por bisección

Dada una malla inicial G^0 ingresada por el usuario con las mismas características mencionadas al comienzo, o sea no estructurada y no homogénea compuesta por elementos cuadrangulares en 2 dimensiones y elementos de forma cúbica en 3 dimensiones [2][3], las mallas siguientes se obtienen refinando aquellos elementos elegidos mediante algún criterio que más adelante detallaremos. Entre las posibles formas de refinar un elemento aparece la llamada bisección, que consiste en dividir cada elemento en 4 en el caso bidimensional y en 8 en el caso tridimensional mediante la unión de los puntos medios de cada una de las aristas a cada lado del elemento. Paralelamente con este proceso se va armando en correspondencia una estructura de datos tipo árbol donde cada elemento de la malla ocupa un correspondiente lugar dentro del árbol al que llamamos para evitar confusiones,

"grupo". Asociado al mismo existe una estructura de datos diseñada acorde a los requerimientos del esquema usado. El tema de cómo armar una base de datos a pesar de ser muy importante no será aquí tratado. La secuencia de mallas es como se muestra en la figura 1.

Partiendo por ejemplo de la malla mostrada en la figura 1.a definida por el usuario se obtiene la malla mostrada en 1.b bisectando los elementos 3 y 4, luego se obtiene la malla de la figura 1.c haciendo lo mismo con los elementos 1,6 y 12 y por último la malla en 1.d se obtiene dividiendo los elementos 9,11,21,23 y 24.

2.- Definición del conjunto de mallas admisibles sobre todos los niveles

Para un dado paso de refinamiento existe un conjunto de mallas sobre las cuales se ejecutará el método multigrilla que se obtienen de la manera indicada en la figura 2.

Aquí vemos que partiendo de la malla obtenida con el tercer paso de refinamiento se provoca un desrefinamiento que consiste en ir removiendo los elementos de máximo nivel, así obtenemos la malla mostrada en la figura 2.b partir de la mostrada en la 2.a removiendo los elementos 33 a 44, la 2.c a partir de la 2.b removiendo los elementos 17 al 32 y por último la 2.d a partir de la 2.c quitando los elementos 5 al 12. Aquí podemos notar las siguientes conclusiones:

- en general la malla $G_i^R \neq G^i$, esto ocurre cuando se refina un elemento de nivel menor al máximo actual.
- el elemento de máximo nivel de la malla más fina no tiene porqué coincidir con el paso de refinamiento. Esto ocurre cuando por algún motivo los elementos a refinar no son los del máximo nivel en al menos un paso de refinamiento.

Lo visto provoca que ante un paso de refinamiento dado uno tenga que actualizar los datos existentes en el árbol además de agregar los nuevos, para ir conociendo cuáles elementos conforman cada una de las mallas del conjunto sobre el que se aplicará multigrilla.

3.- Ajuste adaptivo del contorno (Boundary Fitting)

Otro aspecto a considerar que se halla encuadrado en el marco de la generación de mallas es el referido al tratamiento de los elementos que se hallan sobre la frontera física del problema. Más aún el mayor inconveniente aparece cuando el contorno físico posee curvatura finita, en cuyo caso la bisección de la arista del elemento que se halla frente al borde produce un empobrecimiento de la eficiencia de la técnica de refinamiento, producido por utilizar elementos cada vez más pequeños y mantener constante el error en la discretización del dominio. Esto podría provocar que la mayor parte del error se concentrara en aquellos elementos que están más refinados y por más que se continuara trabajando sobre ellos no se lograría mejorar la situación. Al respecto la idea de ajustar el contorno a medida que uno refina es una de las formas de remediar este inconveniente y a ésta técnica se la denomina "Boundary Fitting". Tal como lo muestra la figura 3 al refinar el elemento cuya arista enfrenta un borde curvo, uno debería proyectar el nodo creado v_B sobre el contorno Σ dando origen al nodo v_M . La forma de hacerlo es definir a través del usuario la función del contorno en forma implícita y luego se intersecta la línea recta que parte del nodo v_B -en forma normal con la frontera del elemento sobre la cual se halla- con el contorno, obteniendo una ecuación unidimensional. De ésta forma el dominio discreto $\Omega^R \rightarrow \Omega$ a medida que R crece.

La figura 4 muestra cómo converge el contorno en el caso de un problema definido por un perfil alar a medida que se lleva a cabo el refinamiento.

B.- MÉTODO MULTIGRILLA

Como es de conocimiento el método multigrilla se basa en resolver un sistema de ecuaciones algebraicas en un conjunto de malla obtenidas a través de un ciclo definido a priori por el usuario o mediante alguna técnica adaptiva. La idea se basa en suavizar para cada una de éstas mallas las componentes o armónicas del residuo que le son propias, y que básicamente se hallan ligadas con el tamaño de la grilla [4]. En nuestro caso habiendo usado técnicas adaptivas para la resolución, cada una de las mallas que componen el conjunto sobre el cual se aplicará multigrilla está compuesta por elementos de distinto tamaño. Debido a esto se hace necesario clasificar los nodos que vinculan dichos elementos a fin de conocer sobre cuáles se llevará a cabo la relajación, recordando que ésta solo se realiza sobre los elementos que son del mismo nivel al de la grilla en cuestión. Este aspecto es muy importante dentro del proceso y a continuación intentamos en forma gráfica, mostrar cómo se realiza.

1.- Clasificación de los nodos

La figura 5 muestra para una dada malla obtenida a través de 3 pasos de refinamiento adaptivo cómo surgen las 4 mallas que componen el conjunto y en cada una de ellas hemos llevado a cabo tal clasificación. Los nodos se clasifican en 4 tipos:

- nodos tipo T, son aquellos que se deberían agregar a la malla en cuestión para reconstruir la malla más fina hasta el paso de refinamiento actual. Como lo muestra la figura la malla en 5.a no contiene elementos tipo T pues estamos sobre la malla más fina hasta el paso de refinamiento actual, en cambio en las mallas 5.b, 5.c y 5.d, sí existen, y pueden ser hallados superponiendo cada una de éstas mallas con la más fina (la 5.a) y detectar los nodos que se hallan en el complemento de la intersección.
- nodos tipo F, son aquellos que están conectados a elementos de nivel l coincidente con el de la malla G_l^R considerada. Tal como lo muestra la figura 5 los nodos tipo F de una determinada malla G_l^R pasan a ser nodos tipo T para los niveles inferiores.
- nodos tipo B, son aquellos que están conectados al menos a 1 elemento de nivel coincidente con el de la grilla en cuestión y al menos a 1 elemento de nivel inferior. Como lo muestra la figura 5 estos nodos serían los que conforman un contorno de los nodos tipo F.
- nodos tipo R, son aquellos conectados solo a elementos de niveles inferiores al de la grilla en cuestión. Estos conforman un complemento del conjunto de nodos representativos de la malla considerada, llamando de ésta forma a los nodos que aportan componentes del residuo que serán suavizadas durante la ejecución del método multigrilla.

Con ésta clasificación se pueden definir 4 conjuntos, cada uno poseyendo solamente nodos de alguno de los 4 tipos considerados, y que nos permiten obtener 3 parámetros asociados a cada uno de los nodos. Estos parámetros llamados k_F , k_B y k_R indican el nivel a partir del cual el nodo en cuestión pasa a ser del tipo

F, B y R respectivamente, y al mismo tiempo el valor de k_B indica el nivel a partir del cual el mismo deja de ser tipo F y similarmente el parámetro k_R indica el nivel a partir del cual el mismo deja de ser tipo B. Por ejemplo el nodo marcado con a en la figura es tipo T para los niveles 1 y 2, es tipo F para el nivel 3 y es tipo R para el nivel 4. Por lo tanto éste nodo nunca es de tipo B y por lo tanto $k_F = 3$, $k_B = 4$ y $k_R = 4$. Del mismo modo el nodo marcado con b es de tipo T en los niveles 1 y 2, es de tipo B en el nivel 3 y es de tipo R en el nivel 4, por lo tanto $k_B = 3$, $k_R = 4$, y como nunca fue tipo F esto se define colocando $k_F = 3$. Como por definición en este caso el nodo nace como tipo F en el nivel 3 y deja de serlo también en el mismo nivel - y ante la imposibilidad de ser simultáneamente de 2 tipos -, surge de inmediato que el nodo no pudo ser tipo F y nació siendo tipo B. Este hecho muy importante ocurre cuando el nodo es irregular, hecho que motivará un tratamiento posterior.

2.- Relajación

El siguiente aspecto a considerar está referido a la relajación. La elección del esquema de relajación a usar está muy ligada a la estrategia de refinamiento utilizada y dado que en nuestro caso los cálculos se hacen elemento por elemento el esquema SOR parece ser una interesante elección. Como ya mencionáramos ésta se realiza a fin de suavizar la componente del residuo propia o asociada al nivel de la malla considerada y por lo tanto sólo son relajados aquellos elementos que son de dicho nivel. Por definición los nodos asociados a estos elementos son del tipo F y B y por lo tanto solamente ellos ingresarán en el esquema. Con el fin de aclarar lo expuesto resumimos los principales detalles acerca de este tema. La matriz de rigidez asociada se arma en bloques relacionados con la clasificación antes explicada.

$$A_l = \begin{bmatrix} A_{RR,l} & A_{RB,l} & 0 \\ A_{BR,l} & A_{BB,l} & A_{BF,l} \\ 0 & A_{FB,l} & A_{FF,l} \end{bmatrix} \quad u_l = \begin{bmatrix} u_{R,l} \\ u_{B,l} \\ u_{F,l} \end{bmatrix} \quad (1)$$

A continuación obviaremos el subíndice l por simplicidad. Del esquema SOR aplicado solo a los elementos del nivel G^R surge que

$$\begin{aligned} u_F &\leftarrow u_F - \omega(A_{FF}u_F + A_{FB}u_B - b_F) \\ u_B &\leftarrow u_B \\ u_R &\leftarrow u_R \end{aligned} \quad (2)$$

sólo los valores en los nodos tipo F variarán durante la relajación y por ende el residuo de los nodos tipo F y tipo B se alterarán. El residuo sobre los nodos tipo F tenderá a cero si se garantiza que el radio espectral del operador $(I - \omega A_{FF})$ sea menor que 1, mientras que el residuo en los nodos tipo B no se puede garantizar que tienda a cero ya que la relajación no depende del término b_B . Por último el residuo en los nodos tipo R no se alterará. El proceso de relajación continuará hasta que se deteriore su convergencia, hecho que se parametriza a través de la relación entre las normas del residuo solo sobre los nodos tipo F en 2 iteraciones sucesivas.

$$\frac{\|r'_{F,i}\|}{\|r_{F,i}\|} > \theta \quad \Rightarrow \quad \text{baja convergencia} \quad (3)$$

3.- Cómputo del residuo

Otro aspecto importante en el método multigrilla es el cómputo del residuo. Como vimos en la relajación el cálculo del mismo sobre los nodos tipo F nos daba un indicio de la velocidad de convergencia. Por otro lado también se hace necesario calcular el residuo para toda la malla para poder testear convergencia en norma y además para poder inyectar su valor nodal como segundo miembro cuando se produce el paso a una grilla más gruesa, operación que luego será tratada. Durante el cómputo del residuo sobre cada elemento aparece un caso especial que sucede si dicho elemento posee nodos que son irregulares. Como estos nodos no son considerados como grados de libertad, su valor es descargado sobre sus nodos padres, entendiéndose por tal aquellos nodos entre los cuales se halla el irregular. Además para garantizar continuidad de las funciones de forma - en el caso lineal aquí considerado - el valor del residuo en el nodo irregular es repartido en partes iguales [5].

4.- Interpolación e Inyección

Para finalizar con lo concerniente al método multigrilla en sí, hemos usado como operadores de interpolación e inyección el denominado *Full weighing* para los elementos que poseen nodos tipo F y B, cuya estrella asociada a dicho operador es la siguiente:

$$I_{i+1}^i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y un operador identidad para aquellos elementos que poseen nodos tipo R.

Con la inyección de los nodos irregulares no hay inconveniente pues a ésta altura del cómputo su valor ya ha sido descargado. Además la condición de continuidad no es alterada pues durante la relajación sus valores no se modifican ya que no son involucrados y en la posterior interpolación de la corrección el operador usado ya satisface este requisito.

C.- REFINAMIENTO ADAPTIVO

1.- Estimador de error

En lo que respecta a éste tema cabe mencionar aquí que hemos usado como estimación del error uno que básicamente está relacionado con la norma p del error de la interpolada y que en el caso de una aproximación lineal como la usada viene determinado por las derivadas segundas.

$$\|u^R - u\|_p \leq \|u^R - u^I\|_p + \|u^I - u\|_p \approx \|u^I - u\|_p \quad (4)$$

$$\|u^I - u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u^I - u|^p d\Omega \right)^{1/p} = \left(\sum_c \int_{\Omega_c} |u^I - u|^p d\Omega \right)^{1/p}$$

$$|u^R(x) - u(x)|_p \approx \left| \sum_{i,j=1}^{n_d} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{v_k} \Delta x_i \Delta x_j \right| \quad (5)$$

$$\Delta x_i \leq \frac{h_\epsilon}{2} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^{n_d} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{v_k} \Delta x_i \Delta x_j \right| &\leq \sum_{i,j=1}^{n_d} \left| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{v_k} \Delta x_i \Delta x_j \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n_d} \left| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{v_k} \right| \frac{h^2}{4} \leq \Phi_\epsilon \frac{h^2}{4} \end{aligned}$$

$$\Phi_\epsilon = \max_{v_k \in \Omega_\epsilon} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n_d} \left| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{v_k} \right| \right\} \quad (7)$$

Sobre cada elemento se calcula el máximo valor de las derivadas segundas sobre los nodos, considerando sobre cada nodo la suma de los valores absolutos de las respectivas derivadas segundas parciales evaluadas sobre el mismo

$$\|u^R - u\|_p \approx \left(\sum_\epsilon \Phi_\epsilon^p \left(\frac{h}{2} \right)^{2p} \Omega_\epsilon \right)^{1/p} = E_p \quad (8)$$

y debido a que la solución por elementos finitos es lineal en este caso, se necesita realizar una debilitación de la derivada segunda contra la función de forma utilizada.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{v_k} \approx \left(- \int_\Omega \frac{\partial N_k}{\partial x_i} \frac{\partial u^R}{\partial x_j} d\Omega \right) / \left(\int_{\Omega_B} N_k d\Omega \right) \quad (9)$$

Además este tipo de estimador tiene la virtud de detectar singularidades tipo salto en la función presentes en problemas de cambio de fase, frontera libre, shocks en flujos compresibles y singularidades por irregularidades en el contorno geométrico o en los datos de contorno. A través de una estimación de cómo varía el estimador conforme $h \rightarrow 0$ y suponiendo que la Φ está acotada por abajo surge que este tiende a cero lo que garantiza que al ir refinando se logre converger.

$$\left(\frac{4E_p}{\Phi_{\min}} \right)^p \geq \sum_\epsilon h_\epsilon^{2p} \Omega_\epsilon \geq h_{\min}^{2p} \sum_\epsilon \Omega_\epsilon = h_{\min}^{2p} \Omega \quad (10)$$

$$h_{\min} \leq \left(\frac{4E_p}{\Phi_{\min}} \right)^{1/2} \frac{1}{\Omega^{1/2p}} \leq C_p E_p^{1/2} \quad (11)$$

2.- Criterio de refinamiento

i.- Elección del criterio

En cuanto a la estrategia de refinamiento uno por lo general debe encontrar un conjunto de parámetros η_e , uno por elemento, que refleje el comportamiento del mismo según la estimación usada y a partir de él uno pueda decidir si debe o no refinar cada uno de los elementos. Según el criterio a usar surgirá un parámetro asociado al mismo. Uno puede usar como criterio reducir el error local en cuyo caso definimos el parámetro η_e como el error en la norma del supremo sobre cada elemento.

$$\eta_e = \Phi_e h_e^2 \approx \max_{x \in \Omega_e} |u(x) - u^R(x)| \quad (12)$$

Otro criterio más integral sería reducir la norma p del error sobre cada elemento en cuyo caso tenemos la expresión

$$\eta_e = \Phi_e h_e^{2+n_e/p} \approx 4 \left(\int_{\Omega_e} |u - u^R|^p d\Omega \right)^{1/p} = 4 \|(u - u^R)|_{L_p(\Omega_e)}\|_p \quad (13)$$

y así podemos seguir definiendo distintos criterios y generalizarlos con la expresión $\eta_e = \Phi h_e^m$ con m arbitrario, donde cada uno de ellos está asociado a un valor de m en particular. A continuación necesitamos definir un objetivo a lograr con el refinamiento, lo que se conoce como malla óptima. En nuestro caso y como es común hacerlo la malla óptima sería aquella que en el límite tiene como indicador de error por elemento un valor constante a todo lo largo del dominio. O sea el objetivo es lograr que η_e sea similar para todos los elementos. Definiendo el error como un funcional del tamaño h y del mismo modo con el costo computacional, obtenemos las ecuaciones de Euler para encontrar el extremal, en este caso fijando como constante el costo computacional a través de un multiplicador de Lagrange [4]. Esto da como resultado que el criterio óptimo en el sentido definido por los funcionales es reducir el error en norma L^p [6].

$$W \approx w N_e = w \sum_e 1 \approx w \sum_e h^{-n_e} \Omega_e \approx w \int_{\Omega} h^{-n_e} d\Omega = W[h(x)] \quad (14)$$

$$E[h(x)] = \frac{1}{4} \left(\int_{\Omega} \Phi^p(x) h^{2p}(x) d\Omega \right)^{1/p} \quad (15)$$

$$\delta(E[h(x)] + \lambda W[h(x)]) = 0 \quad (16)$$

Por lo tanto el valor de m está asociado con la elección de la norma p.

Esto último puede ser visto en la figura 6 a través de un ejemplo en el cual se graficó la norma p del error en función del tiempo de cpu para varios valores de m bastante diferente entre si.

ii.- Elección del número de elementos a refinar

Otro aspecto muy importante en la estrategia de refinamiento es la elección del número de elementos a refinar. Existen muchas alternativas posibles al respecto. Por un lado se podría pensar en refinar una cantidad fija de elementos que estén ordenados según el valor del indicador del error. Esto parece difícil que sea óptimo

ya que podría presentarse un caso no muy inusual donde existen pocos elementos con gran error y muchos con bajo error y ésta estrategia refinaría elementos con valores del error muy disímiles y con el correr del algoritmo difícilmente se llegue a una malla con valores en el indicador de error que estén dentro de una banda lo más estrecha posible, lo que nosotros hemos definido como malla óptima. Por otro lado se podría pensar en refinar no una cantidad fija sino colocar un valor umbral tal que solo los elementos que lo superen serían refinados. Esta elección del valor umbral es otro aspecto de los considerados interesantes y a continuación trataremos de mostrar cómo puede ser elegido en forma óptima. La elección del valor umbral se realiza tomando un parámetro β entre 0 y 1 y definiéndolo como beta veces el valor máximo del indicador de error. Si β es cercano a 1 habrá convergencia a la malla óptima pero la velocidad de convergencia será muy lenta debido a que muy pocos elementos son refinados en cada paso. Contrariamente si β es cercano a 0 en cada paso se refinan casi todos los elementos pero muy probablemente no haya convergencia a la malla óptima. El valor óptimo para β sería aquel que muestre máxima velocidad de convergencia a una malla con indicadores de error por elemento todos ubicados en una banda lo más estrecha posible. Por lo tanto 2 valores interesan para hallar dicho óptimo, a saber :

- a) velocidad de convergencia a la malla óptima, dada por la cantidad de pasos de refinamiento necesarios para alcanzarla, y
- b) el ancho de la distribución final, o sea la diferencia entre los valores máximos y mínimos del indicador.

Cada vez que un elemento se refina nacen 2^{nd} hijos -en el caso bidimensional 4- con eficiencias del orden de 2^{-m} veces la eficiencia del elemento padre asumiendo que el valor Φ , no varía mucho por la subdivisión, cosa que parece ser así si $u^R \rightarrow u$. La figura 7 muestra la distribución del número de elementos en función del logaritmo de la inversa de las eficiencias. Al refinar los elementos con un valor de su indicador de error mayor al valor umbral - definido como una fracción β del máximo valor del indicador sobre todos los elementos η_{max} -, el área resultante - sombreada en la figura - que representa la cantidad de elementos refinados se traslada hacia la zona de menores valores de la inversa de la eficiencia en un valor $m \log(2)$. El corrimiento del valor η_{max} en cada paso de refinamiento se designa por S y por lo apuntado anteriormente el área sombreada se amplifica en un factor 2^{nd} veces. La cantidad de pasos de refinamiento necesarios para alcanzar la malla óptima viene dado por el valor R_c [6], valor cuya expresión explícita se halla en la figura 7.

y como vemos es inversamente proporcional al valor S . En este grafico se muestra que sucede al elegir un valor de β comprendido entre 2^{-m} y 1. En este caso el corrimiento vale $S = -\log \beta$ y el gap final viene dado por $\Delta = m \log 2$. Por lo tanto aquí no tenemos control sobre el ancho del gap Δ ya que este no depende de la elección del β pero si podemos disminuir al máximo la cantidad de pasos necesarias aumentando el valor de S lo que equivale a disminuir β lo máximo posible, o sea $\beta_{opt} = 2^{-m}$.

Haciendo el mismo análisis para β comprendido entre 0 y 2^{-m} se muestra en la figura 8 que aquí $S = m \log 2$ y $\Delta = -\log \beta$ y por lo tanto no tenemos control sobre la velocidad que no depende de β sino que podemos ajustar el parámetro para obtener el gap más estrecho, y esto se logra con el valor máximo posible de β , o sea llegamos a la misma conclusión que en el caso anterior [6].

La figura 9 muestra que sucede en el caso de elegir el valor de β en forma óptima y el caso contrario. Como vemos la figura 9.a muestra la distribución inicial, la figura 9.b muestra la distribución luego de 4 pasos de refinamiento elegido el valor de β en forma óptima y en la figura 9.c y 9.d mostramos qué sucede si se elige un β inadecuado al cabo de 4 y 8 pasos de refinamiento. Como conclusión en este último caso la distribución muestra tener un gap doble al cabo del doble de la cantidad de pasos de refinamiento que el caso resultante de elegir β_{opt} .

3.- Convergencia en mallas

Por último mostramos en la figura 10 una secuencia de mallas en donde partiendo de distintas configuraciones iniciales llegamos a menos de un refinamiento homogéneo a la misma malla final. La malla 10.e es la malla final partiendo de la malla 10.a y la 10.f es la obtenida partiendo tanto de la malla 10.b, 10.c y 10.d [6].

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] M. Storti y N. Nigro; "Método Multigrilla y Refinamiento Adaptivo en Problemas Elípticos Discretizados por el Método de los Elementos Finitos"; presentado en el Congreso de Mecánica Computacional *MECOM 88*, Córdoba, Noviembre 1988.
- [2] R. E. Bank, A. H. Sherman and A. Weiser, "Refinement Algorithms and data Structures for Regular Local Mesh Refinement", in *Scientific Computing*, R. S. Stepleman (edt.), North-Holland, Amsterdam (1983)
- [3] G. F. Carey, M. Sharma and K. C. Wang "A class of Data Structures for 2-D and 3-D Adaptive Mesh Refinement", *Int. J. of Num. Meth. in Eng.*, **26**, 2607-2622 (1988)
- [4] A. Brandt, "Multi Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems", *Math. of Comp.*, **31**, N° 138, 333-390 (April 1977)
- [5] G. F. Carey and J. Tinsley-Oden, *Finite Elements - Computational Aspects*, Vol III, Prentice Hall, N. J. (1984)
- [6] M. Storti, N. Nigro y S. Idelsohn; "Multigrid Methods and Adaptive Refinement Techniques in Elliptic Problems by Finite Elements Methods", presentado para revisión en *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*

2	1
3	4

-a-

2		1	
6	5	10	9
7	8	11	12

-b-

2		14	13	
		15	16	
18	17	5	10	9
19	20			
7	8	11	22	21
			23	24

-c-

2		14	13			
		15	16			
18	17	5	10	26	25	
19	20			27	28	
7	8	11	30	29	22	33
			31	32		44

-d-

FIGURA 1

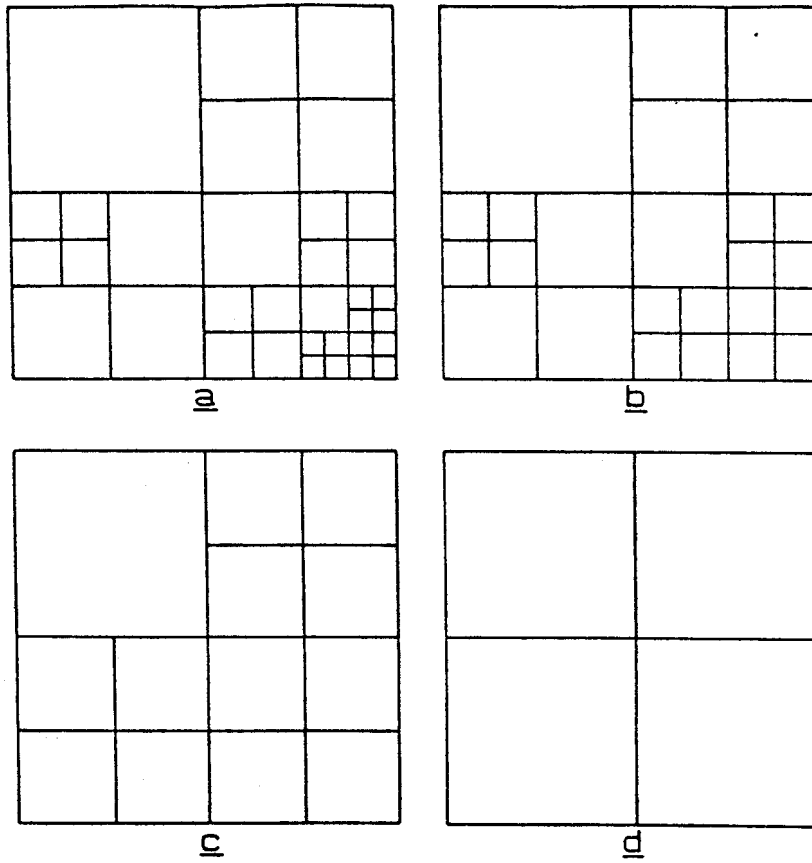


FIGURA 2

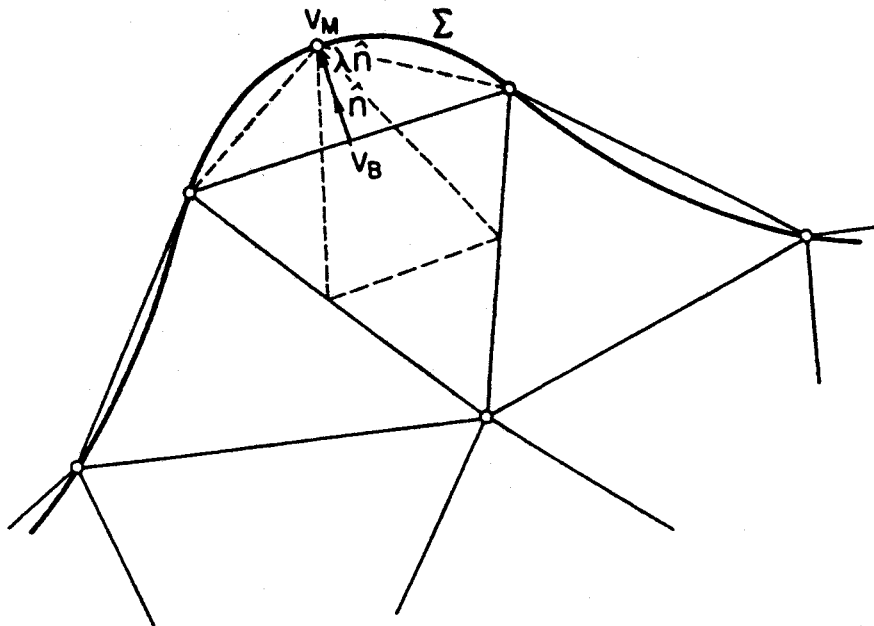


FIGURA 3

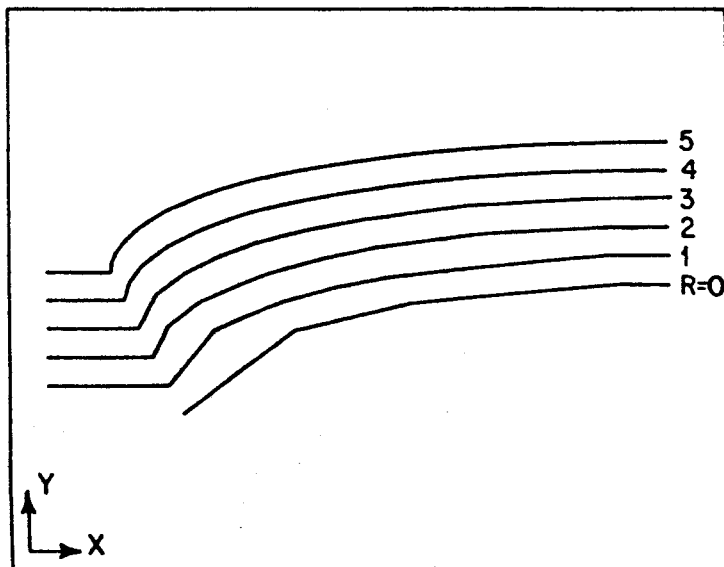


FIGURA 4

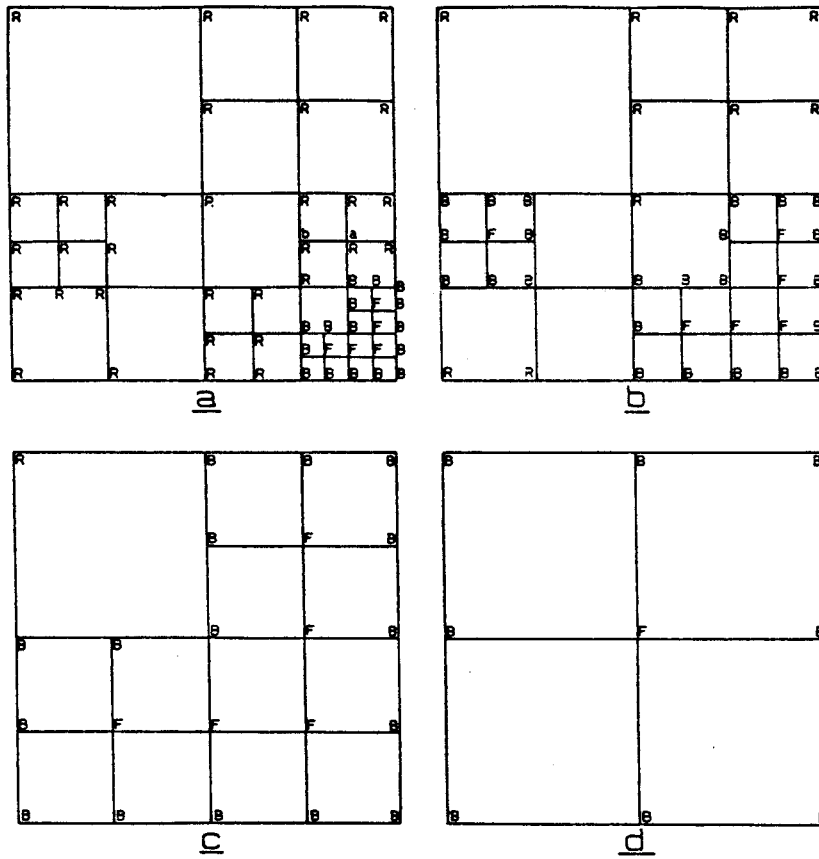


FIGURA 5

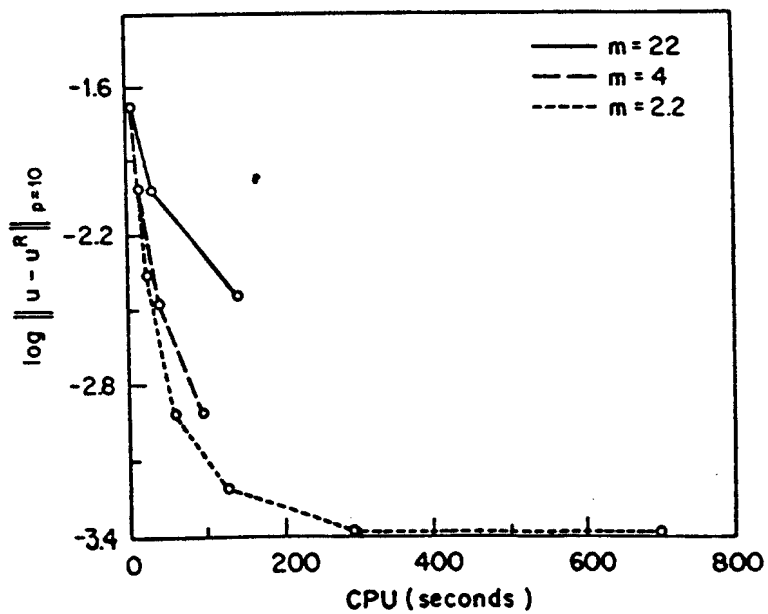
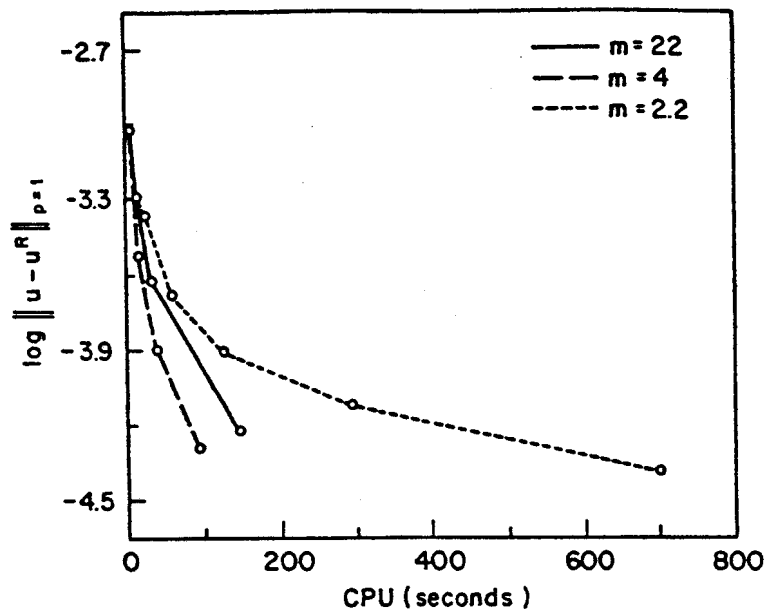


FIGURA 6

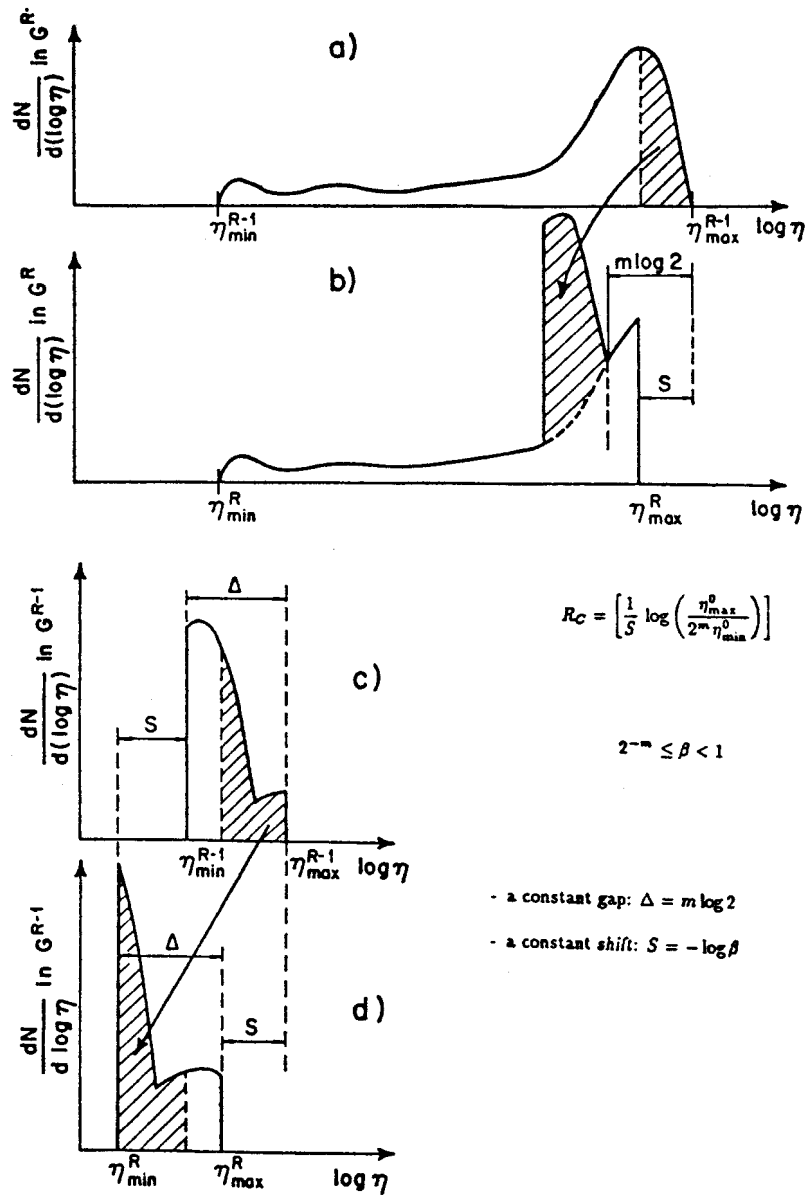
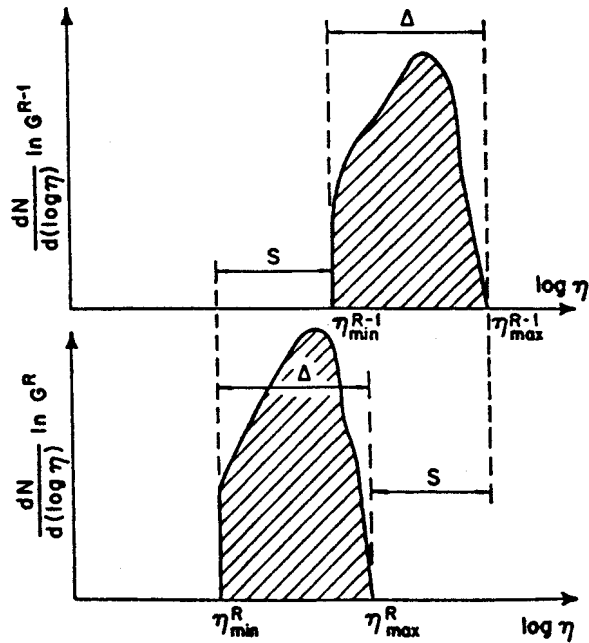
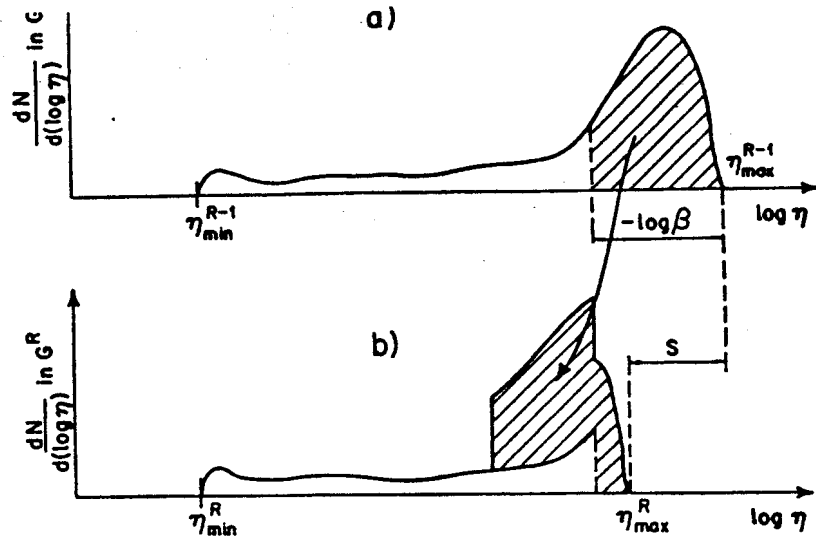


FIGURA 7



$$0 < \beta \leq 2^{-m}$$

- a shift $S = m \log 2$
- a gap $\Delta = -\log \beta$

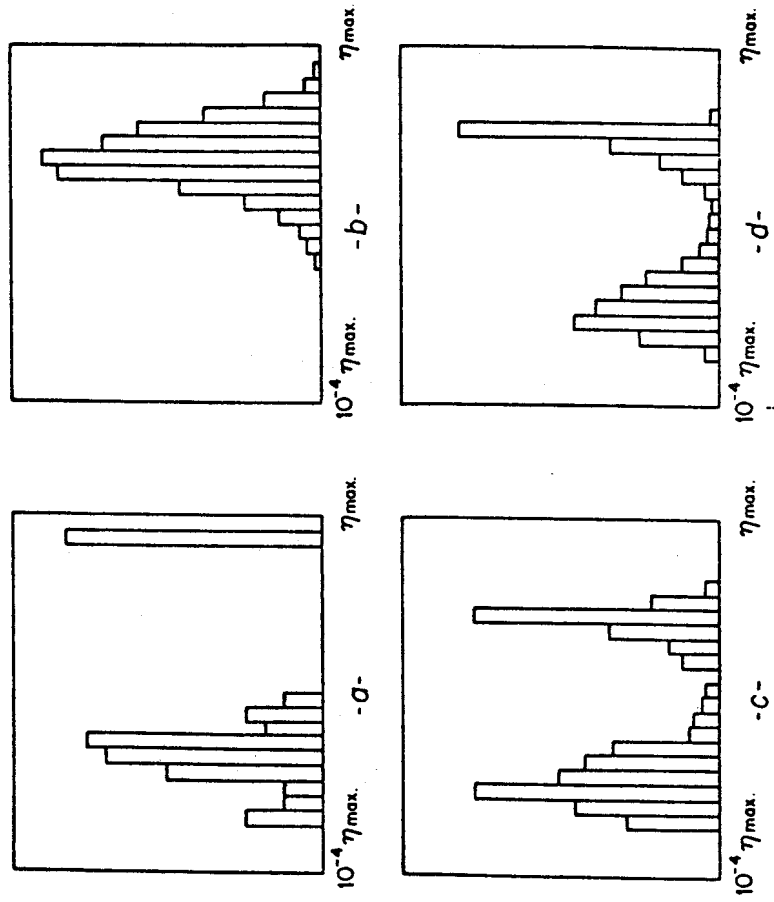
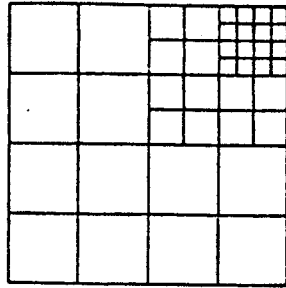
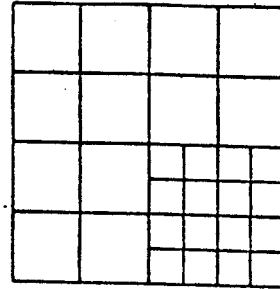


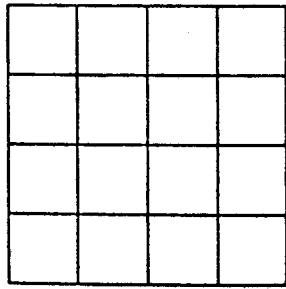
FIGURA 9



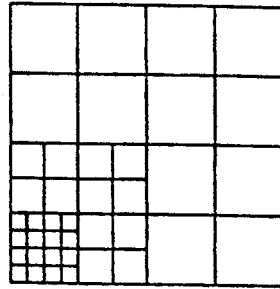
-a-



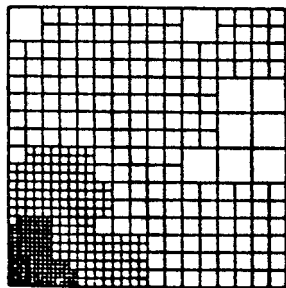
-b-



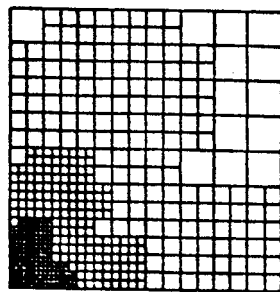
-c-



-d-



-e-



-f-

FIGURA 10

