

VIBRACION DE PLACAS DE ESPESOR VARIABLE Y UN BORDE LIBRE:  
ANALISIS POR EL METODO DE KANTOROVICH OPTIMIZADO Y  
POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

V.E. Sonzogni  
Grupo de Mecánica Computacional - INTEC (CONICET-UNL).  
3000 - Santa Fe - Argentina.

P.A.A. Laura  
Instituto de Mecánica Aplicada (CONIET).  
8000 - Bahía Blanca - Argentina.

V.H. Cortinez  
Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos - FRBB (UTN).  
8000 - Bahía Blanca - Argentina.

S.R. Idelsohn  
Grupo de Mecánica Computacional - INTEC (CONICET-UNL).  
3000 - Santa Fe - Argentina.

RESUMEN

Se analiza la vibración libre de placas con un borde libre y espesor variable exponencialmente, siguiendo dos metodologías: el método de Kantorovich optimizado y el método de elementos finitos. La frecuencia fundamental obtenida mediante ambos procedimientos, para una amplia gama de parámetros del problema, presenta buena concordancia. Se proporcionan los coeficientes de frecuencia para modos superiores, obtenidos mediante el método de elementos finitos.

ABSTRACT

Transverse vibrations of the structural system described in the title are analyzed using classical plate theory and employing two different methodologies:  
- the recently developed "optimized Kantorovich approach"  
- a finite element algorithmic procedure.

It is shown that the fundamental frequency coefficients obtained using both techniques for a rather wide variation of the governing geometric parameters are in very good agreement.

Lower frequency coefficients of the plate system determined by means of the finite element method are also presented.

### INTRODUCCION

Quando se estudia el problema de vibración libre de placas elásticas delgadas, la presencia de un borde libre introduce una complicación matemática al dificultar la satisfacción de las condiciones de contorno en ese borde. Desde un punto de vista práctico, esto se resuelve de manera simple haciendo uso del método de Rayleigh-Ritz donde solamente se precisa hacer cumplir con las condiciones esenciales de contorno. Por su parte, el problema de vibración de placas de espesor variable con un borde libre es de especial interés en varias áreas de las ciencias aplicadas y la tecnología: bioingeniería, aeronáutica, sistemas mecánicos y navales, etc. Sin embargo, se dispone de un número muy limitado de estudios para este problema [1].

En este trabajo se estudia la vibración libre de una placa rectangular con tres bordes vinculados y un borde libre (figura 1). El borde  $y = b$  es libre y se ha considerado dos combinaciones de condiciones de borde para los restantes. El espesor de la placa es variable y se supone una ley de variación descripta por:

$$h(y) = h_0 e^{ay/b}$$

Se utiliza aquí el método de Kantorovich optimizado, método recientemente desarrollado [2,3], para obtener la ecuación de frecuencia. Por otro lado el problema se resuelve también mediante elementos finitos y se ha obtenido buena concordancia entre los resultados. Finalmente se presentan los resultados numéricos para diez modos de vibración de estas placas.

### SOLUCION MEDIANTE EL METODO DE KANTOROVICH OPTIMIZADO

Suponiendo que el sistema de la figura 1 vibra en uno de sus modos normales, la función desplazante transversal  $w(x,y,t)$  se expresará en la forma:

$$w(x,y,t) = W(x,y) e^{i\omega t} \quad (1)$$

La función  $W(x,y)$  hace estacionario el funcional gobernante

$$J[W] = \frac{1}{2} \iint_R \left\{ D \left[ (\nabla^2 W)^2 + 2(1-\mu) \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \right] - \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \right\} W^2 dx dy \quad (2)$$

Sea  $W(x,y)$  una aproximación a la solución exacta del problema, tal que  $W_a$  no satisface exactamente la condición de contorno en el borde libre ( $y = b$ , figura 1).

Reemplazando  $W(x,y) = W_a(x,y)$  en (2) y obteniendo la variación del funcional:  $\delta J[W_a]$ , se llega a:

$$\iint_R \left\{ D \nabla^4 W_a + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 W_a}{\partial x} + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 W_a}{\partial y} + \nabla^2 D \nabla^2 W_a - \right. \\ \left. - (1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_a}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} \right] - \rho h \omega^2 W_a \right\} \delta W_a dx dy -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left\{ \left[ 2(1-\mu) \left( \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^2 W_a}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial^3 W_a}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial D}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + D \left( \mu \frac{\partial^2 W_a}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 W_a}{\partial y^3} \right) \right] \delta W_a \right\}_{y=b} dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left\{ D \left( \mu \frac{\partial^2 W_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_a}{\partial y^2} \right) \delta \left( \frac{\partial W_a}{\partial y} \right) \right\}_{y=b} dx = 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

donde la rigidez a flexión de la placa  $D(y)$  está dada por:

$$D = \frac{Eh^3(y)}{12(1-\mu^2)} = D_0 e^{3\alpha y/b} \quad (4)$$

y

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\mu^2)} \quad (5)$$

Se considerará el caso en que la placa está empotrada en el borde  $y=0$ . En ese caso la función

$$g(y) = (e^{\gamma y/b} - 1)^2 \quad (6)$$

satisface las condiciones

$$g(0) = g'(0) = 0 \quad ; \quad g(b) \neq 0 \quad (7)$$

El exponente  $\gamma$  de la función (6) constituye un parámetro de optimización. Resulta conveniente expresar  $W_a(x,y)$  en la forma:

$$W_a = f(x) g(y) \quad (8)$$

donde  $f(x)$  es una función a determinar usando el método de Kantorovich. A partir de la aproximación (8) puede escribirse:

$$\delta W_a = g \cdot \delta f \quad (9a)$$

$$\delta \left( \frac{\partial W_a}{\partial y} \right) = g' \cdot \delta f \quad (9b)$$

y reemplazando (4), (8) y (9) en (3) resulta:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left\{ D_0 e^{3\alpha y/b} \left[ f^{IV} g^2 + 2f'' g'' g + f g^{IV} \right] + D_0 \frac{6\alpha}{b} e^{3\alpha y/b} \left[ f'' g g' + f g''' g \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu \frac{9\alpha^2}{b^2} e^{3\alpha y/b} f'' g^2 + \frac{9\alpha^2}{b^2} e^{3\alpha y/b} f g'' g - \rho h_0 e^{\alpha y/b} \omega^2 f g^2 \right\} \delta f dx dy - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left\{ \left[ 2(1-\mu) D_0 e^{3\alpha y/b} f'' g' g + \frac{3\alpha}{b} D_0 e^{3\alpha y/b} (\mu f'' g^2 + f g'' g) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + D_0 e^{3\alpha y/b} (\mu f'' g' g + f g''' g) \right] \right\} \delta f dx + \\
 & + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ D(\mu f'' g g' + f g'' g') \right]_{y=b} \delta f dx = 0 \quad (10)
 \end{aligned}$$

Reordenando términos y efectuando las integraciones requeridas con respecto a  $y$ , la ecuación (1) conduce a:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (f^{IV} A_1 + f'' A_2 + f A_3) \delta f dx = 0 \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_1 &= D_0 \int_0^b e^{3\alpha y/b} g^2 dy \\
 A_2 &= D_0 \int_0^b \left\{ e^{3\alpha y/b} \left( 2g''g + \frac{6\alpha}{b} g g' + \frac{9\alpha^2}{b^2} \mu g^2 \right) \right\} dy - D_0 e^{3\alpha} \left[ 2(1-\mu) g' g + \frac{3\alpha}{b} \mu g^2 \right]_{(x,b)} \\
 A_3 &= D_0 \int_0^b \left\{ e^{3\alpha y/b} \left( g^{IV} g + \frac{6\alpha}{b} g''' g + \frac{9\alpha^2}{b^2} g'' g \right) \right\} dy - \\
 & - D_0 e^{3\alpha} \left[ \frac{3\alpha}{b} g'' g + g''' g - g'' g' \right]_{(x,b)} + D_0 h_0 \omega^2 \int_0^b e^{\alpha y/b} g^2 dy
 \end{aligned}$$

Dado que  $\delta f$  es arbitrario, debe anularse el integrando de (11). Dividiendo por  $A_1$  se llega a la ecuación diferencial.

$$\frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{M}{b^2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \left[ \frac{N_1}{b^4} - \frac{N_2}{b^4} \lambda^{-4} \Omega^2 \right] f = 0 \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{a}{b} \quad ; \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho h_0}{D}} \omega a^2 \\
 M &= \frac{1}{K_4} \left[ 2K_1 (4\gamma^2 + 6\alpha\gamma) - 4K_2 (\gamma^2 + 3\alpha\gamma) - e^{3\alpha} K_5 \right] + 9\alpha^2 \mu \\
 N_1 &= \frac{1}{K_4} \left[ K_1 (4\gamma^2 + 6\alpha\gamma)^2 - 2K_2 (\gamma^2 + 3\alpha\gamma)^2 - e^{3\alpha} K_6 \right]
 \end{aligned}$$

$$N_2 = \frac{K_3}{K_4}$$

$$K_1 = \frac{e^{4\gamma + 3\alpha} - 1}{4\gamma + 3\alpha} - 2 \frac{e^{3\gamma + 3\alpha} - 1}{3\gamma + 3\alpha} + \frac{e^{2\gamma + 3\alpha} - 1}{2\gamma + 3\alpha}$$

$$K_2 = \frac{e^{3\gamma + 3\alpha} - 1}{3\gamma + 3\alpha} - 2 \frac{e^{2\gamma + 3\alpha} - 1}{2\gamma + 3\alpha} + \frac{e^{\gamma + 3\alpha} - 1}{\gamma + 3\alpha}$$

$$K_3 = \frac{e^{4\gamma + \alpha} - 1}{4\gamma + \alpha} + 6 \frac{e^{2\gamma + \alpha} - 1}{2\gamma + \alpha} - 4 \frac{e^{3\gamma + \alpha} - 1}{3\gamma + \alpha} - 4 \frac{e^{3\gamma + \alpha} - 1}{\gamma + \alpha}$$

$$K_4 = \frac{e^{4\gamma + 3\alpha} - 1}{4\gamma + 3\alpha} + 6 \frac{e^{2\gamma + 3\alpha} - 1}{2\gamma + 3\alpha} - 4 \frac{e^{3\gamma + 3\alpha} - 1}{3\gamma + 3\alpha} - 4 \frac{e^{\gamma + 3\alpha} - 1}{\gamma + 3\alpha} + \frac{e^{3\alpha} - 1}{3\alpha}$$

$$K_5 = 4\gamma (1 - \mu) (e^{2\gamma} - e^{\gamma}) (e^{\gamma} - 1)^2 + 3\alpha\mu (e^{\gamma} - 1)^4$$

$$K_6 = 6\alpha\gamma^2 (2e^{2\gamma} - e^{\gamma}) (e^{\gamma} - 1)^2 + 2\gamma^3 (e^{\gamma} - 1)^2 (4e^{2\gamma} - e^{\gamma}) - 4\gamma^3 (2e^{2\gamma} - e^{\gamma}) (e^{2\gamma} - e^{\gamma})$$

La solución de (12) es:

$$f = C_1 \cosh P_1 \lambda \frac{x}{a} + C_2 \sinh P_1 \lambda \frac{x}{a} + C_3 \cosh P_2 \lambda \frac{x}{a} + C_4 \sinh P_2 \lambda \frac{x}{a} \quad (13)$$

con

$$P_{1,2} = \left\{ \frac{\pm M + [M^2 - 4(N_1 - N_2 \Omega^2 \lambda^{-4})]^{1/2}}{2} \right\}^{1/2}$$

Si la placa está simplemente apoyada en los bordes  $x = \pm \frac{a}{2}$ , las condiciones de contorno requieren que:

$$f = f'' = 0 \quad \text{para} \quad x = \pm \frac{a}{2}$$

Para el modo fundamental de vibración

$$C_2 = C_4 = 0$$

y aplicando las condiciones de borde

$$C_3 = 0$$

Consecuentemente,

$$\cos P_1 \frac{\lambda}{2} = 0$$

de donde se obtiene:

$$\Omega_{11} = \lambda^2 \sqrt{\frac{\pi^4 \lambda^{-4} - \pi^2 M \lambda^{-2} + N_1}{N_2}} \quad (14)$$

Si los bordes  $x = \pm \frac{a}{2}$  son empotradas las condiciones de contorno requieren que:

$$f = f' = 0 \quad \text{para} \quad x = \pm \frac{a}{2}$$

y el coeficiente de frecuencia del modo fundamental es la menor raíz de

$$P_2 \cos P_1 \frac{\lambda}{2} \sinh P_2 \frac{\lambda}{2} + P_1 \sin \frac{P_1 \lambda}{2} \cosh P_2 \frac{\lambda}{2} = 0 \quad (15)$$

Dado que el proceso empleado conduce a límites superiores de la frecuencia, se requiere entonces que:

$$\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial \gamma} = 0 \quad (16)$$

obteniéndose así el valor optimizado de la frecuencia fundamental.

El procedimiento descrito es similar para otras combinaciones de las condiciones de borde.

#### SOLUCION MEDIANTE EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

El problema de vibración libre de la placa que se indica en Figura 1 se resolvió también por medio del método de los elementos finitos utilizando para ello el sistema SAMCEF [4]. Entre los diversos elementos finitos para placas, se utilizó en este caso un elemento cuadrangular para placas delgadas, en modelo de desplazamientos. Este es el denominado elemento de Fraeijs de Veubecke, posee cuatro nodos de esquina donde los parámetros nodales son el desplazamiento transversal y las dos rotaciones asociadas. Tiene además cuatro nodos ubicados en la mitad de cada lado, con un parámetro nodal que representa la rotación normal a ese lado (la derivada normal del desplazamiento transversal). El elemento, indicado en la Figura 2, está subdividido en cuatro triángulos y en cada uno de ellos el desplazamiento transversal se representa por un polinomio cúbico completo:

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 \quad (17)$$

Los coeficientes incógnitas  $\alpha_i$  se expresan en función de los parámetros nodales que son: el desplazamiento transversal y dos rotaciones en cada esquina; y la derivada normal en el medio de cada lado. Resulta así un elemento conforme de 16 grados de libertad. La variación de espe sor se supone bilineal en el interior de cada elemento.

El análisis por elementos finitos se realiza de la manera usual [5]. Los desplazamientos de la placa se aproximan por:

$$w(x,y) = \tilde{w}(x,y) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y) a_i = \underline{N}^T \underline{a} \quad (18)$$

donde  $\underline{a}$  es un vector con parámetros incógnitas nodales (desplazamientos y rotaciones);  $\underline{N}(x,y)$  un vector con funciones de forma; y  $n$  el número total de grados de libertad. Las ecuaciones de movimiento se pueden escribir:

$$\underline{M} \ddot{\underline{a}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{a}}(t) + \underline{K} \underline{a}(t) = \underline{P}(t) \quad (19)$$

donde  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  y  $\underline{K}$  son respectivamente las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez;  $\underline{P}(t)$  es el vector de fuerzas nodales; y el punto representa derivadas temporales. La matriz de rigidez está dada por:

$$\underline{K} = \sum_{\text{Elem.}} \left( \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV_e \right) \quad (20)$$

donde  $\underline{B}$  contiene derivadas de las funciones de forma  $\underline{N}$ ;  $\underline{D}$  es la matriz de coeficientes elásticos; y  $V_e$ , el volumen elemental. La matriz de masa, denominada "matriz de masa consistente" se define:

$$\underline{M} = \sum_{\text{Elem.}} \left( \int_{V_e} \rho \underline{N} \underline{N}^T dV_e \right) \quad (21)$$

siendo  $\rho$  la densidad del material.

En el caso de vibración libre no amortiguada las ecuaciones de movimiento (19) quedan de la forma:

$$\underline{M} \ddot{\underline{a}} + \underline{K} \underline{a} = 0 \quad (22)$$

Si la vibración se produce en un modo normal, cada punto experimentará un movimiento armónico en fase y puede exhibirse:

$$\underline{a}(t) = \underline{X} \cos \omega t \quad (23)$$

siendo  $X$  un vector con una forma modal y  $\omega$  la frecuencia natural de ese nudo. De esta manera la ecuación (22) queda:

$$\underline{K} \underline{X} - \omega^2 \underline{M} \underline{X} = 0 \quad (24)$$

representativa de un problema de autovalores. La solución del mismo puede obtenerse a través de varios métodos. En este caso se utilizó el Método de Iteración por Subespacios [6].

#### RESULTADOS NUMERICOS

El problema de la placa de Figura 1 fue resuelto con una malla de 10 x 10 elementos finitos. Esta discretización permite obtener con cinco cifras significativas la frecuencia fundamental de una placa cuadrada, simplemente apoyada, y de espesor uniforme cuyo valor es  $\Omega_{11} = 2\pi^2$ . Para mostrar la influencia de la malla en la frecuencia fundamental de una placa cuadrada, con tres lados empotrados y uno libre, y de espesor uniforme, se indican en la Tabla I los resultados obtenidos con diferentes mallas. En ella aparecen resultados correspondientes a mallas de 4 x 4, 8 x 8 y 10 x 10 elementos en la placa completa.

En Tablas II y III se proporcionan los resultados obtenidos, para diferentes parámetros del problema y formas de vinculación, mediante los métodos de Kantorovich optimizado y de elementos finitos. La concordancia entre los resultados es muy buena, desde el punto de vista ingenieril.

En Tabla IV y V se indican los resultados obtenidos por el método de elementos finitos para los diez primeros modos de vibración. La forma del primer modo para la placa cuadrada de espesor uniforme, con 3 lados empotrados, se muestra en la Figura 3. Análogamente en las figuras 4 y 5 se muestran las correspondientes a placas con relaciones de lados  $a/b = 0.4$  y  $a/b = 2.5$ .

En conclusión, el método de Kantorovich optimizado se muestra convenientemente y bastante preciso para determinar la frecuencia fundamental de sistemas estructurales con relativa complejidad. Por otra parte la función coordenada exponencial resulta una aproximación conveniente para este problema particular.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado dentro de los Proyectos de Investigación y Desarrollo PID 0005/89 y PID 75000/88 del CONICET.



Malla	4 x 4 Elementos	8 x 8 Elementos	10 x 10 Elementos
$\Omega_{11}$	24.002	23.934	23.930

Tabla 1 - Coeficientes de Frecuencia Fundamental para Diferentes Mallas de Elementos Finitos (caso de placa cuadrada de espesor uniforme y 3 lados empotrados).

$\lambda$ $\nu$	$\Omega$ Present Study	$\Omega_{11}$ [1]
0.4	10.28 (A) 10.19 (B)	10.18
2/3	11.10 (A) 10.97 (B)	10.97
1	12.83 (A) 12.68 (B)	12.68
1.5	16.95 (A) 16.82 (B)	16.82
2.5	30.69 (A) 30.62 (B)	30.62
0.4	22.60 (A) 22.53 (B)	22.57
2/3	23.08 (A) 22.94 (B)	23.01
1	24.09 (A) 23.93 (B)	24.02
1.5	26.80 (A) 26.63 (B)	26.73
2.5	37.74 (A) 37.58 (B)	37.65

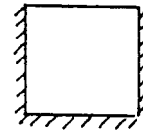
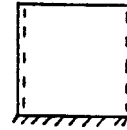


Tabla 2 -- Comparación de Coeficientes de Frecuencia Fundamental para Placas de Espesor Uniforme ( $\mu = 0.30$ ).  
 (A) Método de Kantorovich Optimizado.  
 (B) Método de Elementos Finitos.

$\lambda$ \ $h_1/h_0$	1	0.8	0.5
0.4	10.28 (A)	8.70 (A)	6.06 (A)
	10.19 (B)	8.65 (B)	6.05 (B)
2/3	11.10 (A)	9.52 (A)	6.93 (A)
	10.97 (B)	9.44 (B)	6.91 (B)
1	12.83 (A)	11.22 (A)	8.67 (A)
	12.68 (B)	11.15 (B)	8.67 (B)
1.5	16.95 (A)	15.36 (A)	12.96 (A)
	16.82 (B)	15.31 (B)	12.94 (B)
2.5	30.69 (A)	29.39 (A)	27.60 (A)
	30.62 (B)	29.35 (B)	27.42 (B)
0.4	22.60 (A)	18.8 (A)	12.64 (A)
	22.53 (B)	18.86 (B)	12.65 (B)
2/3	23.08 (A)	19.4 (A)	13.4 (A)
	22.94 (B)	19.38 (B)	13.44 (B)
1	24.09 (A)	20.4 (A)	14.7 (A)
	23.93 (B)	20.40 (B)	14.67 (B)
1.5	26.80 (A)	23.3 (A)	17.8 (A)
	26.63 (B)	23.20 (B)	17.80 (B)
2.5	37.74 (A)	34.7 (A)	30.6 (A)
	37.58 (B)	34.68 (A)	30.41 (B)

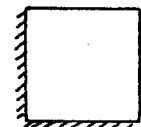
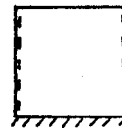


Tabla 3 - Comparación de Coeficientes de Frecuencia Fundamental para Placas de Espesor Exponencialmente Variable. ( $\nu = 0.30$ ).  
 (A) Método de Kantorovich Optimizado.  
 (B) Método de Elementos Finitos.

$\lambda$	$\frac{h}{L}$	MODOS									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.4	1	10.19	13.61	20.12	29.7	39.7	42.	43.	49.	59.	59.
	0.8	8.65	12.07	17.91	26.5	33.2	38.	38.	44.	52.	53.
	0.5	6.05	9.36	14.03	20.8	22.3	28.9	29.	34.	41.	42.
2/3	1	10.97	20.33	37.98	40.28	49.7	64.	68.	89.	94.	98.
	0.8	9.444	18.13	33.99	34.08	44.1	57.	60.	75.	84.	87.
	0.5	6.919	14.29	23.54	26.90	34.1	45.	47.	50.	66.	67.
1	1	12.68	33.06	41.71	63.04	72.4	90.7	103.	112.	131.	153.
	0.8	11.15	29.80	35.58	56.00	65.1	76.7	92.1	99.4	118.	134.
	0.5	8.670	24.03	25.34	43.65	52.1	53.0	72.3	76.	91.	93.
1.5	1	16.82	45.31	61.02	92.33	93.9	141.9	149.	162.	181.	210.
	0.8	15.31	39.17	55.67	80.1	82.5	126.	135.	137.	162.	187.
	0.5	12.94	29.11	45.99	57.0	65.4	96.	98.	108.	129.	145.
2.5	1	30.62	58.09	105.6	149.4	173.	182.	235.	262.	306.	375.
	0.8	29.35	51.97	91.83	137.9	149.	165.	211.	224.	273.	319.
	0.5	27.42	42.24	69.27	108.5	116.2	135.	159.	168.	214.	224.



Tabla 4 - Coeficientes de Frecuencia para los Diez Primeros Modos. Placa con 2 Bordes Simplemente Apoyados y un Borde Empotrado.

$\lambda$	$\frac{h_1}{h_0}$	MODOS									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.4	1	22.53	24.6	29.2	37.1	48.	61.	64.	64.	70.	78.
	0.8	18.8	21.8	26.0	33.1	43.	51.	57.	57.	62.	70.
	0.5	12.6	16.5	20.5	26.1	34.	34.	42.	45.	48.	55.
2/3	1	22.94	29.40	44.3	62.2	69.0	69.6	85.	103.	109.	121.
	0.8	19.38	26.06	39.6	52.2	61.7	61.8	75.	92.	97.	101.
	0.5	13.44	20.24	31.2	35.3	47.2	48.7	59.	67.	73.	76.
1	1	23.93	40.01	63.26	76.7	80.6	116.8	122.	134.	140.	173.
	0.8	20.40	35.76	53.52	68.9	71.5	103.	104.	120.	124.	154.
	0.5	14.67	28.38	37.13	54.9	55.3	70.1	81.7	95.	96.	113.
1.5	1	26.63	65.89	65.95	106.7	125.0	152.5	167.	191.	204.	247.
	0.8	23.20	56.29	59.78	95.0	106.0	137.	148.	171.	172.	219.
	0.5	17.80	40.39	48.86	74.1	74.7	110.5	115.	118.	135.	169.
2.5	1	37.58	76.17	134.8	152.4	193.1	213.	255.	314.	337.	398.
	0.8	34.68	66.63	115.9	140.4	174.	182.	228.	267.	300.	360.
	0.5	30.41	51.45	85.07	117.9	130.	142.	180.	188.	235.	260.

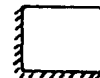


Tabla 5 - Coeficientes de Frecuencia para los Diez Primeros Modos. Placa con Tres Bordes Empotrados.

LEYENDAS DE LOS FIGURAS

- Figura 1 - Placa de Espesor No Uniforme, con un Borde Libre.
- Figura 2 - Elemento Finito Cuadrilátero para Flexión de Placas.
- Figura 3 - Primer Modo para la Placa Cuadrada de Espesor Uniforme con Tres Lados Empotrados.
- Figura 4 - Primer Modo para la Placa de Espesor Uniforme y Tres Lados Empotrados, con Relación de Lados  $a/b = 0.4$  .
- Figura 5 - Primer Modo para la Placa de Espesor Uniforme y Tres lados Empotrados, con Relación de Lados  $a/b = 2.5$  .

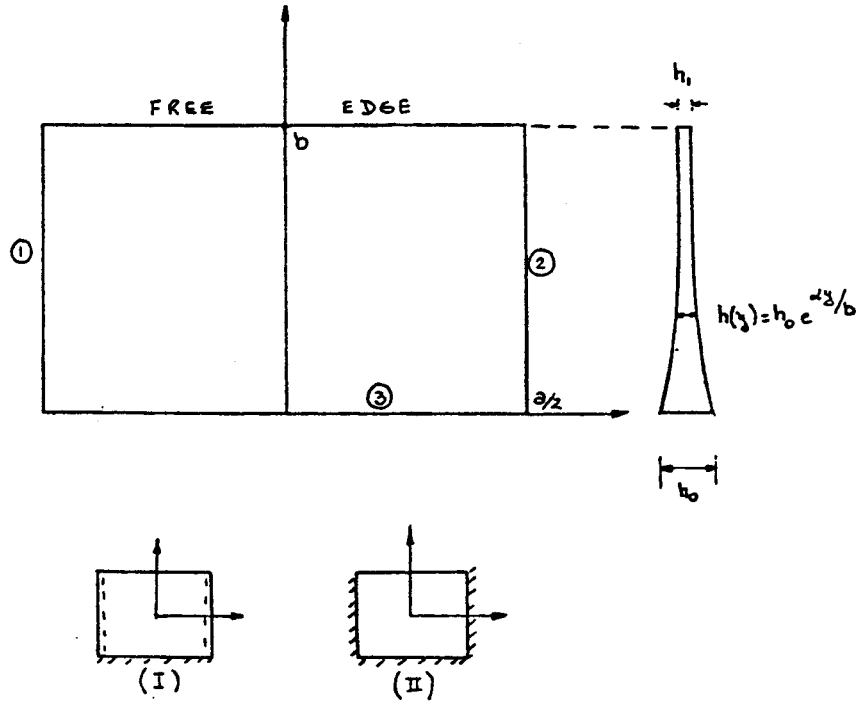


Figure 1 -

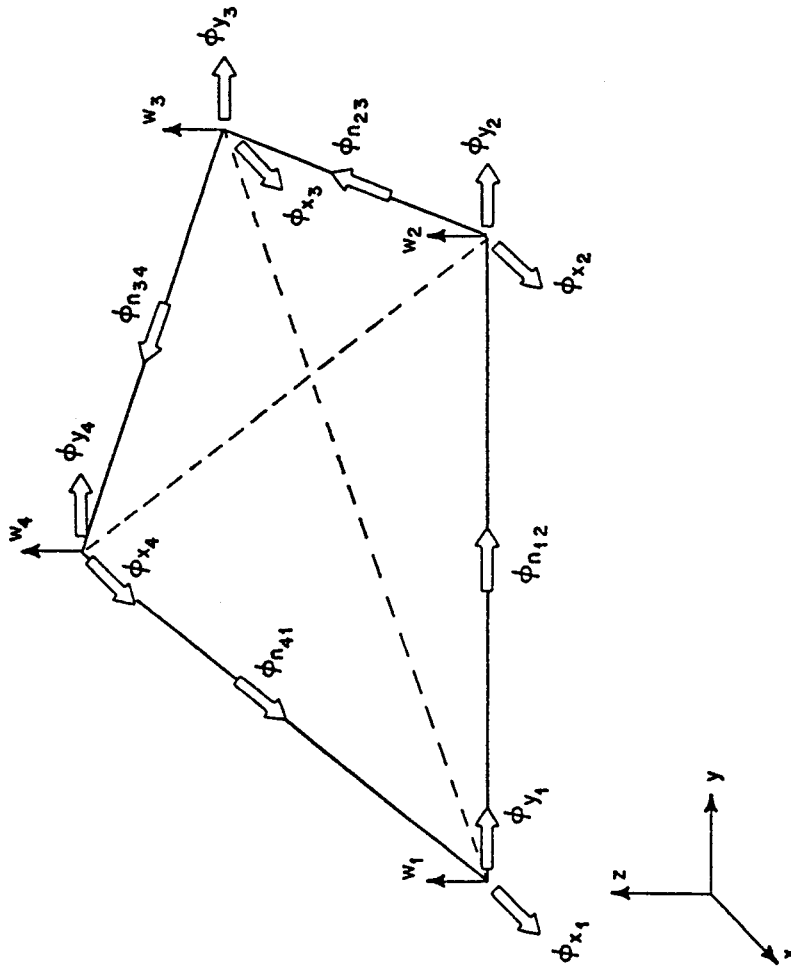


Fig. 2



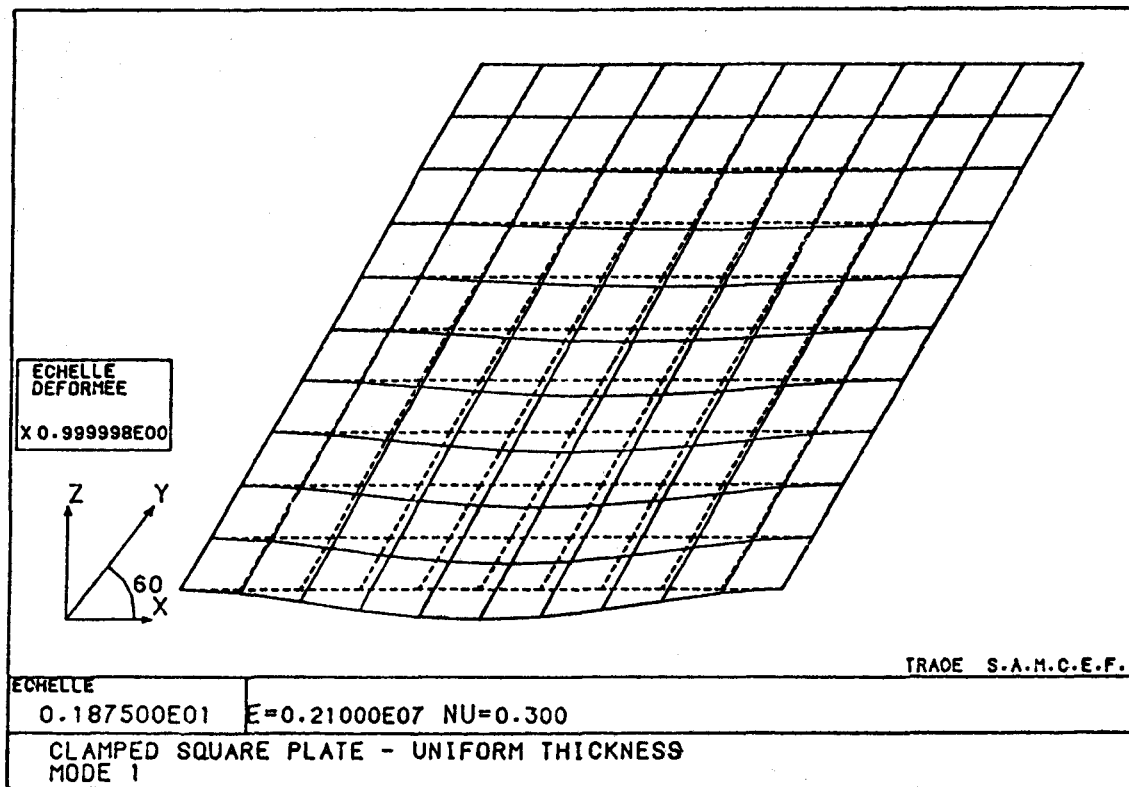


Figure 3

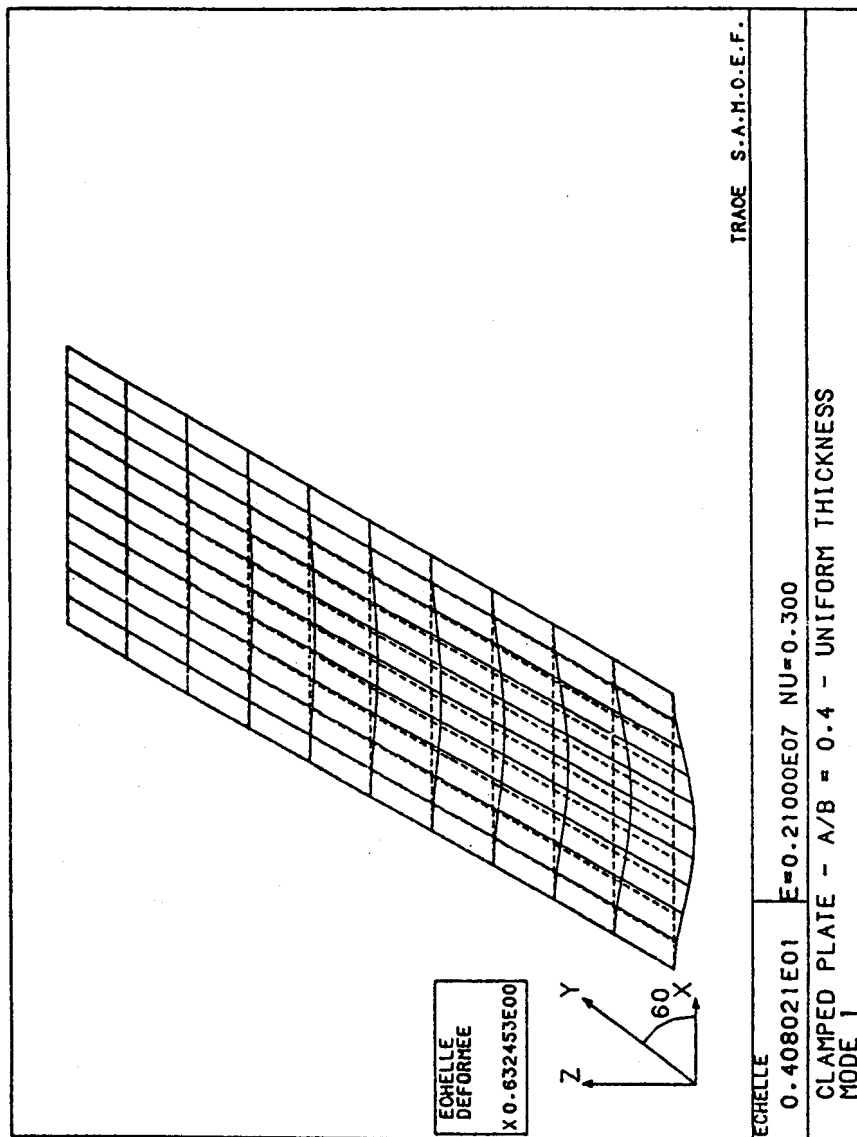


Figure 4

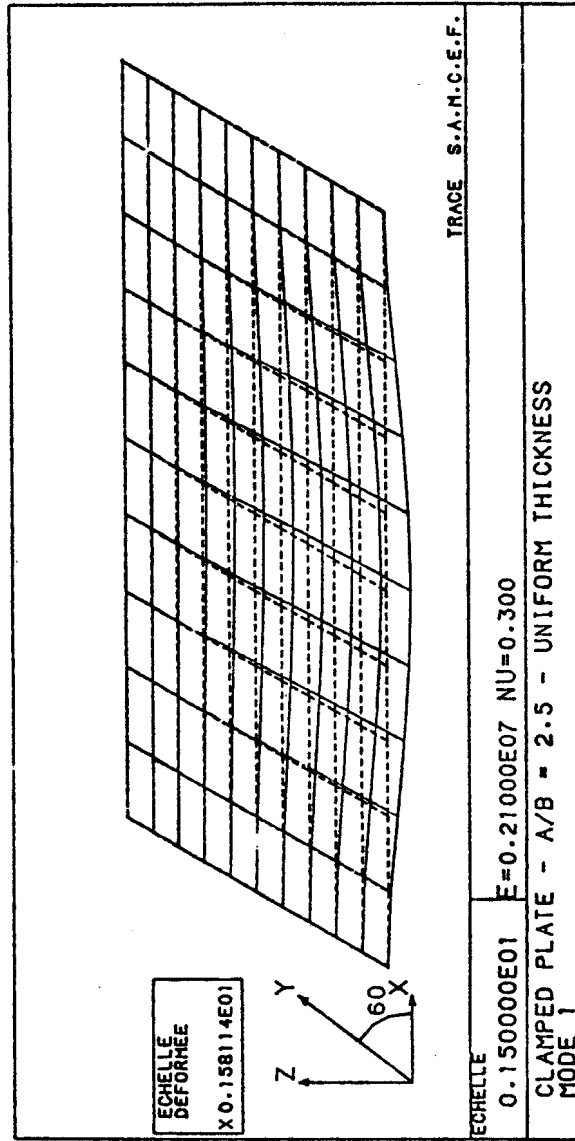


Figure 5

