

ESTIMACIONES CRÍTICAS PARA UN ESQUEMA DE APROXIMACIÓN DE LA ECUACIÓN  
DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

Roberto L. González

Mabel M. Tidball

Instituto de Matemática Beppo Levi

Universidad Nacional Rosario.

Rosario - Argentina.

RESUMEN

En este trabajo consideramos el problema de control óptimo con horizonte infinito, su aproximación discretizada en el tiempo y estudiamos la velocidad de convergencia de la solución discretizada a la solución del problema original. En particular probamos que la velocidad de convergencia es siempre del orden  $h^7$ , generalizando así los resultados obtenidos (bajo hipótesis de semiconcavidad) por Capuzzo Dolcetta-Ishii [3].

ABSTRACT

In this paper we consider an infinite horizon optimal control problem and its discrete time approximation. We study the rate of convergence of the approximate solutions to the solution of the original problem. In particular we prove the rate is always of order  $h^7$ , generalizing in this way the results obtained by Capuzzo Dolcetta-Ishii in [3].

## 1-INTRODUCCIÓN

El método de la programación dinámica muestra que la función de costo óptimo del problema de control óptimo para ecuaciones diferenciales ordinarias satisface (bajo hipótesis de regularidad) una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden no lineal del tipo de Hamilton-Jacobi-Bellman (ver [1]), y por otra parte la existencia de una solución suave de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman nos facilita encontrar un control óptimo en feedback (ver [1]).

No obstante, este procedimiento no siempre puede implementarse en la práctica ya que en problemas simples la función costo óptimo tiene discontinuidades en sus derivadas parciales, y otros ejemplos muestran que la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman no tiene en general solución  $C^1$ . Para salvar este inconveniente, se demuestra, (ver [7]), que la función costo óptimo está caracterizada como la única solución de viscosidad de la ecuación de Bellman asociada.

El objetivo de este trabajo es presentar una aproximación de la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\max_{\alpha \in A} \left\{ \lambda u - \sum_{i=1}^n g_i^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} - f^\alpha \right\} = 0, \text{ en } \mathbb{R}^n, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

relacionada con el problema de control óptimo con horizonte infinito y obtener el orden de convergencia de dicha aproximación.

Demostraremos que la velocidad de convergencia de la solución aproximada  $u^h$  a la función  $u$  de costo óptimo del problema original es de orden  $\gamma$ , con  $\gamma \in (0, 1)$ , es decir:

$$\|u(x) - u^h(x)\| \leq e h^\gamma$$

## 2- PLANTEO DEL PROBLEMA

El problema consiste en encontrar la función de costo óptimo  $u$ :

$$u(x) = \inf_{\alpha \in A} J(x, \alpha), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

donde:

$A$  es el conjunto de todas las funciones medibles definidas en  $(0, \infty)$  con valores en un subconjunto compacto  $AC \mathbb{R}^m$ ,

$$J(x, \alpha) = \int_0^{\infty} f(y(x, s), \alpha(s)) e^{-\lambda s} ds,$$

$f: \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}$  es una función dada,

$\lambda > 0$ , constante

El vector  $y(s) = y(x, s)$  y el control  $\alpha$  están relacionados por la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{y}(s) &= g(y(s), \alpha(s)), \quad s > 0, \\ y(0) &= x. \end{aligned} \quad (3)$$

Es conocido (ver [1]) que la ecuación (1) no tiene en general una solución  $C^1$ , por lo que en este trabajo se considera la llamada solución de viscosidad de (1).

Una función  $u$  es llamada solución de viscosidad de la ecuación (1) si para todo  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$  se cumple:

(i) Si  $u - \phi$  tiene un máximo local en  $x_0$ , entonces

$$\max_{\alpha \in A} \left\{ \lambda u - \sum_{i=1}^n g_i^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - f^\alpha \right\} \leq 0, \text{ en } x_0$$

(ii) Si  $u - \phi$  tiene un mínimo local en  $x_1$ , entonces:

$$\max_{\alpha \in A} \left\{ \lambda u - \sum_{i=1}^n g_i^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - f^\alpha \right\} \geq 0, \text{ en } x_1.$$

• Propiedades de  $u$

Si las siguientes hipótesis son válidas

$$\|g(x, \alpha) - g(\hat{x}, \alpha)\| \leq L_g \|x - \hat{x}\|, \quad (4)$$

$$\|g(x, \alpha)\| \leq M_g,$$

para alguna constante  $L_g > 0$ ,  $\forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in A$ .

$$\|f(x, \alpha) - f(\hat{x}, \alpha)\| \leq L_f \|x - \hat{x}\|, \quad (5)$$

$$\|f(x, \alpha)\| \leq M_f,$$

para alguna constante  $L_f > 0$ ,  $\forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in A$ .

Entonces  $u$  satisface:

$$\|u(x)\| \leq \frac{M_f}{\lambda}, \quad (6)$$

$$\|u(x) - u(\hat{x})\| \leq C \|x - \hat{x}\|^\gamma,$$

$\forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , donde

$$C = \frac{L_f}{\lambda - L_g}, \quad \gamma = 1 \quad \text{si } \lambda > L_g,$$

$$C = L_f \frac{\gamma_1}{\lambda(1-\mu)} \frac{M_f^{1-\gamma_1}}{\lambda(1-\mu)}, \quad \gamma_1 = \mu\gamma, \quad \mu \in (0,1), \quad \gamma = \frac{\lambda}{L_g} \quad \text{si } \lambda < L_g,$$

$$C = L_f \frac{\gamma}{\lambda - \gamma L_g}, \quad \gamma \in (0,1) \quad \text{si } \lambda = L_g.$$

Además  $u$  es la única solución de viscosidad de la ecuación de Bellman (1). Para la prueba de estos hechos ver Crandall-Lions [4].

### 3- APROXIMACIÓN DE LA ECUACIÓN (1)

Para encontrar la solución aproximada de (1) consideramos la ecuación:

$$\max_{\alpha \in A} \left\{ u^h(x) - (1-\lambda h) u^h(x+hg(x,\alpha)) - hf(x,\alpha) \right\} = 0, \text{ en } \mathbb{R}^n, \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0 \quad (7)$$

Se puede demostrar que si  $0 < h < \frac{1}{\lambda}$  entonces (7) tiene una única solución continua y acotada  $u^h$  y que  $(u^h)$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}^n$ , cuando  $h$  tiende a cero, a la única solución de viscosidad de (1).

Además (ver [3]):

$$u^h(x) = \inf_{\alpha \in A^h} J^h(x,\alpha), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (8)$$

donde:

$A^h$  denota el subconjunto de  $A$  de todos los controles que toman un valor constante en el intervalo  $[kh, (k+1)h)$ ,  $k=0,1,\dots$

$$J^h(x,\alpha) = h \sum_{k=0}^{\infty} f(u_n(x,k), \alpha(kh)) (1-\lambda h)^k$$

y la secuencia  $u_n(x,k)$  está determinada por la siguiente fórmula recurrente:

$$u_n(x,0) = x,$$

$$u_n(x,k+1) = u_n(x,k) + h g(u_n(x,k), \alpha(kh)), \quad k=0,1,\dots \quad (9)$$

• Propiedades de  $u^h$

$$|u^h(x)| \leq \frac{M_f}{\lambda}, \quad |u^h(x) - u^h(\hat{x})| \leq C|x - \hat{x}|^\gamma,$$

donde:

$$h \in (0, \frac{1}{\lambda}), \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$C = \frac{L_f}{\lambda - L_g}, \quad \gamma = 1 \quad \text{si } \lambda > L_g$$

$$C = L_f \frac{M_f^{1-\gamma_1}}{\lambda(1-\mu)}, \quad \gamma_1 = \mu\gamma, \quad \mu \in (0,1), \quad \gamma = \frac{\lambda}{L_g} \quad \text{si } \lambda < L_g$$

$$C = L_f \frac{M_f^{1-\gamma}}{\lambda - \gamma L_g}, \quad \gamma \in (0,1) \quad \text{si } \lambda = L_g$$

Nuestro propósito es demostrar que la velocidad de convergencia de la solución aproximada  $u^h$  a la función  $u$  de costo óptimo del problema original es de orden  $\gamma$ , es decir:

$$\|u(x) - u^h(x)\| \leq C h^\gamma \tag{10}$$

4- PROPIEDADES FUNDAMENTALES

Propiedad 4.1

Sea  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , si  $F = \{f(\alpha) / \alpha \in A\}$  es compacto entonces  $w_0 \in \text{Co}F$ , siendo

$$w_0 = \int_0^1 f(\alpha(t)) dt, \quad \text{y Co}F \text{ la cápsula convexa de } F \text{ es decir,}$$

$$\text{Co}F = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_i \in F, n \in \mathbb{N} \right\}$$

NOTA:

Se puede demostrar (ver [8]), que en espacios de dimensión finita, (dimensión =  $n$  en nuestro caso) es:

$$\text{Co}F = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, x_i \in F \right\} \tag{11}$$

Demostración

• Veamos primero que  $\text{Co}F$  es cerrado

Sea  $x^k \in \text{CoF}$ , es decir,  $x^k = \sum_{i=1}^{\nu+1} \lambda_i^k x_i^k$ ,  $\sum_{i=1}^{\nu+1} \lambda_i^k = 1$ ,  $\lambda_i^k \geq 0$ ,  $x_i^k \in F$

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\nu+1} \lambda_i^k x_i^k$$

pero  $\{\lambda_i^k\}_k \subset [0,1]$  entonces, existe una subsucesión, (que seguiremos llamando

$\lambda_i^k$ ) convergente  $\lambda_i^k \rightarrow \lambda_i$  cuando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\forall i, \lambda_i \in [0,1]$ ,  $\sum_{i=1}^{\nu+1} \lambda_i = 1$

Análogamente  $\{x_i^k\}_k \subset F$  entonces  $x_i^k \rightarrow x_i \in F$  (por ser  $F$  compacto) cuando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\forall i$ .

En virtud de estas observaciones y (11) tenemos que:

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \sum_{i=1}^{\nu+1} \lambda_i x_i \in \text{CoF},$$

por lo tanto  $\text{CoF}$  es cerrado

•  $w_0 \in \text{CoF}$

Por definición de integral  $w_0$  es límite de la integral de funciones escaleras definidas en una partición  $\{I_i\}_{i=1, \dots, k}$  del intervalo  $[0,1]$

$$w_0 = \int_0^1 f(\alpha(t)) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \int_0^1 f(\alpha_i^k) \chi_i^k(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f(\alpha_i^k) m_i^k,$$

donde  $\chi_i^k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in I_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

$$\text{y } \sum_{i=1}^k m_i^k = 1,$$

entonces  $\sum_{i=1}^k f(\alpha_i^k) m_i^k = x^k \in \text{CoF}$ ,  $\forall k$ , por ser  $\text{CoF}$  convexo.

y  $w_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k \in \text{CoF}$  por ser  $\text{CoF}$  cerrado.

□

#### Observaciones:

• En virtud de la propiedad 4.1 y (11) tenemos que:

$$w_0 = \sum_{i=1}^{\nu+1} \lambda_i f(\alpha_i) = \int_0^1 f(\alpha_w(t)) dt, \text{ con } \sum_{i=1}^{\nu+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, f(\alpha_i) \in F, \alpha_i \in A.$$

Es decir, existe una partición  $\{I_i\}_{i=1, \dots, \nu+1}$ , del intervalo  $[0,1]$ , con medida de  $I_i = \lambda_i$ , y una función escalonada  $\alpha_w(t)$ , con  $\alpha_w(t) = \alpha_i \in A$ , si  $t \in I_i$ , tal que:

$$w_D = \int_0^1 f(\alpha_w(t)) dt = \int_0^1 f(\alpha(t)) dt$$

Por simple cambio de variables se obtiene igualmente que para un intervalo arbitrario  $[a,b]$  existe una partición  $\{I_i\}$ ,  $i=1, \dots, n+1$ , del intervalo  $[a,b]$ , y una función escalonada  $\alpha_w(t)$ , con  $\alpha_w(t) = \alpha_i$  si  $t \in I_i$ , tal que:

$$w_D = \int_a^b f(\alpha_w(t)) dt = \int_a^b f(\alpha(t)) dt \quad (12)$$

• Si  $\mathcal{F} = \{\alpha: \mathbb{R} \rightarrow A, \text{medibles}\}$ ,  $\mathcal{F}_W = \{\alpha: \mathbb{R} \rightarrow A, \text{escalonadas}\}$ , en virtud de (12), podemos definir el siguiente operador:

$T_W: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_W$  tal que  $\alpha \rightarrow \alpha_w$  con la siguiente propiedad:

$$\int_a^b f(\alpha(t)) dt = \int_a^b f(\alpha_w(t)) dt.$$

En virtud de (12) el siguiente lema es inmediato.

Lema 4-1

Sea  $b: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ , una función continua en sus dos argumentos y acotada,  $t_i = \frac{iT}{n}$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$  una partición del intervalo  $[0, T]$ , entonces existe una política escalonada  $\alpha_w$  con valores en  $A$  tal que:

a)  $\alpha_w$  tiene a lo sumo  $n+1$  escalones en cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$

$$b) \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(t_i, \alpha(s)) ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(t_i, \alpha_w(s)) ds$$

Propiedad 4-2

Si  $a_k \leq \beta a_{k+1} + b$ , entonces  $a_k \leq \frac{b}{\beta-1} \beta^k$ ,  $\beta > 1$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

En efecto, sea  $c_k = a_k \beta^{-k}$  (13)

entonces por hipótesis

$$c_k \leq \beta^{-k} (\beta a_{k+1} + b) = \beta^{-k} b + c_{k-1}$$

sumando esta última desigualdad desde 1 hasta  $n$  tenemos que:

$$c_n \leq \sum_{k=1}^n \beta^{-k} b \leq b \frac{1}{\beta-1}$$

reemplazando en (13) nos queda:

$$a_k \leq \frac{b}{\beta-1} \beta^k \quad (14)$$

como queríamos demostrar.

□

Lema 4-2

Sea  $y_W(t) = x + \int_0^t g(y_W(s), \alpha_W(s)) ds \forall t \in [0, T]$ , y una subdivisión del intervalo  $[0, T]$  en  $n$  intervalos de amplitud  $h = \frac{T}{n}$ , entonces

$$\| y(t) - y_W(t) \| < 3 M_0 h e^{L_0 t}$$

Demostración:

Sea

$$\begin{aligned} E_i &= \left\| \int_0^{t_i} g(y(s), \alpha(s)) ds - \int_0^{t_i} g(y_W(s), \alpha_W(s)) ds \right\| = \| y(t_i) - y_W(t_i) \| \\ E_{i+1} &= \left\| \int_0^{t_{i+1}} g(y(s), \alpha(s)) ds - \int_0^{t_{i+1}} g(y_W(s), \alpha_W(s)) ds \right\| = \\ &= \left\| \int_0^{t_{i+1}} g(y(s), \alpha(s)) - g(y_W(s), \alpha_W(s)) ds \right\| \leq \\ &\leq E_i + \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(y(s), \alpha(s)) - g(y_W(s), \alpha_W(s)) ds \right\| \leq \\ &\leq E_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| g(y(s), \alpha(s)) - g(y(t_i), \alpha(s)) \| ds + \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(y(t_i), \alpha(s)) - g(y(t_i), \alpha_W(s)) ds \right\| + \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| g(y(t_i), \alpha_W(s)) - g(y_W(s), \alpha_W(s)) \| ds \end{aligned} \quad (15)$$

En virtud del lema 4-1 el tercer sumando de (15) es cero, es decir:

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(y(t_i), \alpha(s)) - g(y(t_i), \alpha_W(s)) ds \right\| = 0,$$

aplicando la desigualdad (4) y que:

$$\| y(s) - y(t_i) \| \leq M_0 (s - t_i) \quad \forall s \in [t_i, t_{i+1}),$$

tenemos que:

$$E_{i+1} \leq E_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_0 M_0 (s - t_i) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_0 \| y(t_i) - y_W(s) \| ds$$



teniendo en cuenta que:

$$\|u(t_i) - u_w(s)\| \leq \|u(t_i) - u_w(t_i)\| + \|u_w(t_i) - u_w(s)\|$$

la desigualdad anterior queda:

$$\begin{aligned} E_{i+1} &\leq E_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_g M_g (s-t_i) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_g (E_i + M_g (s-t_i)) ds \leq \\ &\leq E_i + L_g M_g \frac{h^2}{2} + L_g E_i h + L_g M_g \frac{h^2}{2} = E_i (1 + L_g h) + L_g M_g h^2 \end{aligned}$$

Esta última desigualdad está en las condiciones de la propiedad 4-2, entonces:

$$E_i \leq L_g M_g h^2 \frac{(1 + L_g h)^i}{1 + L_g h - 1} = M_g h (1 + L_g h)^i \quad (16)$$

Sea  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .  $0 \leq i \leq n$ , entonces:

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_w(t)\| &= \left\| \int_0^t g(u(s), \alpha(s)) ds - \int_0^t g(u_w(s), \alpha_w(s)) ds \right\| \leq \\ &\leq E_i + \left\| \int_{t_i}^t g(u(s), \alpha(s)) ds - \int_{t_i}^t g(u_w(s), \alpha_w(s)) ds \right\| \leq \\ &\leq E_i + \int_{t_i}^t \|g(u(s), \alpha(s)) - g(u_w(s), \alpha_w(s))\| ds \leq \\ &\leq E_i + 2M_g(t - t_i) \end{aligned}$$

En virtud de (16) esta última desigualdad queda:

$$\|u(t) - u_w(t)\| \leq M_g h (1 + L_g \frac{T}{n})^i + 2M_g h \leq M_g h (e^{L_g t_i} + 2e^{L_g t_i}) \leq 3M_g h e^{L_g t} \quad (17)$$

Por lo tanto

$$\|u(t) - u_w(t)\| \leq 3M_g h e^{L_g t}$$

Como queríamos demostrar.

□

5- ACOTACIÓN DE LA CONVERGENCIA

Teorema 5-1

$$|u(x) - u^h(x)| \leq C h^\gamma$$

donde  $\gamma=1$  si  $\lambda > L_g$ ,  $\gamma = \frac{\lambda}{L_g}$  si  $\lambda < L_g$ , y  $\gamma$  es un número arbitrario en  $(0,1)$  si  $\lambda = L_g$ .

Demostración

Consideremos el vector extendido:

$$b(s, \alpha) = (g^t(y(s), \alpha), f(y(s), \alpha) e^{-\lambda s})^t$$

$$u^e(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}^h} J(x, \alpha_e)$$

y sea  $\alpha_w$  dado por el lema 4.1 para el intervalo  $[0, T]$ , y definido como constante arbitraria en  $(T, \infty)$ .

Entonces:

$$|u(x) - u^h(x)| \leq |u(x) - u^e(x)| + |u^e(x) - u^h(x)| \quad (18)$$

pero

$$|u^h(x) - u^e(x)| \leq K h^\sigma \quad (19)$$

donde:

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda > L_g, \\ \theta \in (0, 1), & \text{si } \lambda = L_g, \\ \frac{\lambda}{L_g}, & \text{si } \lambda < L_g. \end{cases}$$

(ver [3]).

Resta entonces acotar  $|u(x) - u^e(x)|$ .

Dado un control arbitrario  $\alpha(\cdot)$ , se tiene que:

$$\int_0^{+\infty} (f(y(s), \alpha(s)) - f(u_w(s), \alpha_w(s))) e^{-\lambda s} ds \leq 2M_f e^{-\lambda T} + \int_0^T (f(y(s), \alpha(s)) - f(u_w(s), \alpha_w(s))) e^{-\lambda s} ds \quad (20)$$

pero

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (f(y(s), \alpha(s)) - f(u_w(s), \alpha_w(s))) e^{-\lambda s} ds \right| &\leq \int_0^T (f(y(s), \alpha(s)) - f(u_e(s), \alpha_e(s))) e^{-\lambda s} ds + \\ &+ \left| \int_0^T (f(u_e(s), \alpha_e(s)) - f(u_w(s), \alpha_w(s))) e^{-\lambda s} ds \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T \left( f(u_0(s), a_w(s)) - f(u(s), a_w(s)) \right) e^{-\lambda s} ds + \\
 & + \int_0^T \left( f(u(s), a_w(s)) - f(u_w(s), a_w(s)) \right) e^{-\lambda s} ds \quad (21)
 \end{aligned}$$

donde  $u_0(s) = u(t_i)$  si  $s \in [t_i, t_{i+1})$ ,  $i=1, \dots, n-1$ . Es conocido que:

$$\| u(s) - u_0(s) \| \leq M_g (s - t_i) \quad \forall s \in [t_i, t_{i+1}) \quad (22)$$

Acotaremos cada uno de los sumandos de (21).

En virtud de (5) y (22) el primer sumando de (21) queda:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \left( f(u(s), a(s)) - f(u_0(s), a(s)) \right) e^{-\lambda s} ds & \leq \int_0^T L_f \| u(s) - u_0(s) \| e^{-\lambda s} ds \leq \\
 & \leq M_g L_f \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i) e^{-\lambda s} ds \leq \\
 & \leq M_g L_f h \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\lambda s} ds \leq M_g L_f \frac{h}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) \quad (23)
 \end{aligned}$$

En forma similar se acota el tercer sumando de (21)

$$\int_0^T \left( f(u_0(s), a_w(s)) - f(u(s), a_w(s)) \right) e^{-\lambda s} ds \leq M_g L_f \frac{h}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T})$$

El segundo sumando puede escribirse de la forma:

$$\int_0^T \left( f(u_0(s), a(s)) - f(u_0(s), a_w(s)) \right) e^{-\lambda s} ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( f(u(t_i), a(s)) - f(u(t_i), a_w(s)) \right) e^{-\lambda s} ds = 0$$

por el lema 4-1.

En virtud de (5) y del lema 4-2 el último sumando de (21) puede acotarse de la siguiente manera, si  $L_g > \lambda$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \left( f(u(s), a_w(s)) - f(u_w(s), a_w(s)) \right) e^{-\lambda s} ds & \leq \int_0^T L_f \| u(s) - u_w(s) \| e^{-\lambda s} ds \leq \\
 & \leq \frac{L_f 3M_g}{L_g - \lambda} h (e^{-\lambda T} - 1) \quad (24)
 \end{aligned}$$

Entonces la desigualdad (21) queda:

$$\int_0^T (f(y(s), \alpha(s)) - f(y_W(s), \alpha_W(s))) e^{-\lambda s} ds \leq \frac{L_f 3M_g}{L_g - \lambda} h (e^{(L_g - \lambda)T} - 1) + 2 L_f M_g \frac{h}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T})$$

Con lo cual (20) queda acotada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (f(y(s), \alpha(s)) - f(y_W(s), \alpha_W(s))) e^{-\lambda s} ds &\leq 2M_f e^{-\lambda T} + \frac{3M_g L_f}{L_g - \lambda} h (e^{(L_g - \lambda)T} - 1) + 2L_f M_g \frac{h}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) \leq \\ &\leq 2M_f e^{-\lambda T} + \frac{L_f 3M_g}{L_g - \lambda} h (e^{(L_g - \lambda)T} - 1) + 2L_f M_g \frac{h}{\lambda}, \quad \forall T \end{aligned}$$

Pero entonces  $\forall \epsilon > 0 \exists \alpha_W(\cdot) / \int_0^{+\infty} (f(y(s), \alpha(s)) - f(y_W(s), \alpha_W(s))) e^{-\lambda s} ds \leq \epsilon$  con

$$\epsilon = 2M_f e^{-\lambda T} + \frac{L_f 3M_g}{L_g - \lambda} h (e^{(L_g - \lambda)T} - 1) + 2L_f M_g \frac{h}{\lambda}$$

por lo que:

$$u^e(x) = \inf_{\alpha_W} J(x, \alpha_W) \leq \inf_{\alpha} J(x, \alpha) + \epsilon = u(x) + \epsilon.$$

Además  $u(x) \leq u^e(x)$ ; entonces:

$$|u(x) - u^e(x)| \leq \epsilon = 2M_f e^{-\lambda T} + \frac{L_f 3M_g}{L_g - \lambda} h (e^{(L_g - \lambda)T} - 1) + 2L_f M_g \frac{h}{\lambda}, \quad \forall T \quad (25)$$

Analizaremos los siguientes casos:

• Caso 1:  $L_g > \lambda$

De (25) tenemos que

$$|u^e(x) - u(x)| \leq M_1 (e^{-\lambda T} + h e^{(L_g - \lambda)T}) \quad (26)$$

$$\text{donde } M_1 = 3 \max \left( 2M_f, \frac{L_f 3M_g}{L_g - \lambda}, \frac{2L_f M_g}{\lambda} \right)$$

La expresión (26) tiene mínimo y está dado por:

$$T = \frac{1}{L_g} \ln \left( \frac{\lambda}{L_g - \lambda} h^{-1} \right)$$

entonces:

$$e^{(L_g - \lambda)T} = \left( \frac{\lambda}{L_g - \lambda} \right)^{\frac{L_g - \lambda}{L_g}} h^{\frac{\lambda - L_g}{L_g}}, \quad e^{-\lambda T} = \left( \frac{L_g - \lambda}{\lambda} \right)^{\frac{\lambda}{L_g}} h^{\frac{\lambda}{L_g}}$$

reemplazando en (26) queda:

$$|u^e(x) - u(x)| \leq M_1 K h h^{\frac{\lambda-L_g}{L_g}} + M_1 K h^{\frac{\lambda}{L_g}} = 2 M_1 K h^{\frac{\lambda}{L_g}} \quad (27)$$

donde  $K = \max \left\{ \left( \frac{\lambda}{L_g - \lambda} \right)^{\frac{L_g - \lambda}{L_g}}, \left( \frac{L_g - \lambda}{\lambda} \right)^{\frac{\lambda}{L_g}} \right\}$

En virtud de (18), (19) y (27) tenemos que:

$$|u(x) - u^h(x)| \leq C h^{\tau} \quad \text{si } L_g > \lambda, \text{ con } \tau = \frac{\lambda}{L_g}$$

• Caso 2:  $L_g < \lambda$

$$\begin{aligned} |u^e(x) - u(x)| &\leq 2M_f e^{-\lambda T} + \frac{L_f 3M_g}{L_g - \lambda} h (1 - e^{-(L_g - \lambda)T}) + 2L_f M_g \frac{h}{\lambda} \leq \\ &\leq 2M_f e^{-\lambda T} + \frac{L_f 3M_g}{\lambda - L_g} h + 2L_f M_g \frac{h}{\lambda}, \quad \forall T \end{aligned}$$

luego, tomando  $T \rightarrow \infty$  obtenemos:

$$|u^e(x) - u(x)| \leq \left( \frac{L_f 3M_g}{\lambda - L_g} + 2L_f M_g \frac{1}{\lambda} \right) h \quad (28)$$

entonces en virtud de (18), (19) y (28) tenemos que:

$$|u(x) - u^h(x)| \leq C h \quad \text{si } L_g < \lambda$$

• Caso 3:  $\lambda = L_g$

El último sumando de (21) puede acotarse de la siguiente manera en virtud de (5):

$$\begin{aligned} \int_0^T |f(u(s), a_w(s)) - f(u_w(s), a_w(s))| e^{-\lambda s} ds &\leq \int_0^T L_f |u(s) - u_w(s)| e^{-\lambda s} ds \leq \\ &\leq \int_0^T L_f 3M_g h e^{-(L_g - \lambda)s} ds = L_f h T \end{aligned}$$

con lo cual (25) puede acotarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |u^e(x) - u(x)| &\leq 2M_f e^{-\lambda T} + L_f 3M_g h T + 2L_f M_g \frac{h}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) \leq \\ &\leq 2M_f e^{-\lambda T} + L_f 3M_g h T + 2L_f M_g \frac{h}{\lambda} \leq M_2 e^{-\lambda T} + M_2 h T, \quad \forall T \quad (29) \end{aligned}$$

$$\text{con } M_2 = \max\left(2M_f, 3M_g, L_f + \frac{2L_f M_g}{\lambda}\right)$$

El mínimo de la expresión  $M_2 e^{-\lambda T} + M_2 h T$  está dado por:

$$T = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{h}{\lambda}, \text{ si } h < \lambda,$$

entonces la expresión (29) queda:

$$|u^h(x) - u(x)| \leq -M_2 \frac{h}{\lambda} \ln \frac{h}{\lambda} + M_2 \frac{h}{\lambda} \quad (30)$$

demostraremos ahora que  $\forall \gamma \in (0,1)$  existe  $K > 0$  tal que:

$$-x \ln x \leq K x^\gamma, \quad \gamma \in (0,1). \quad (31)$$

En efecto:

$$-x \ln x \leq K x^\gamma \Leftrightarrow -\ln x \leq K x^{-\alpha}, \Leftrightarrow x^\alpha \ln \frac{1}{x} \leq K, \text{ siendo } \alpha = 1 - \gamma.$$

Sea  $t(x) = x^\alpha \ln \frac{1}{x} \geq 0, x \in (0,1)$

$t(1)=0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} t(x)=0$ , entonces  $t(x)$  tiene su máximo en  $\hat{x} = e^{-\frac{1}{\alpha}}$ , por lo que:

$$t(x) \leq t\left(e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{1}{\alpha} e^{-1} = K$$

En virtud de (18), (19), (30) y (31) tenemos que:

$$\|u(x) - u^h(x)\| \leq C h^\gamma \quad \text{si } L_g = \lambda, \text{ con } \gamma \in (0,1)$$

como queríamos demostrar □

## 6- CONCLUSIONES

1) Resultados de este tipo fueron demostrados por Capuzzo Dolcetta e Ishii en [3] donde fue lograda esta acotación usando hipótesis fuertes sobre semiconcavidad de las funciones  $f$  y  $g$ .

2) En este trabajo se ha demostrado la generalidad de la acotación (10) haciendo uso de técnicas del análisis convexo sin utilizar la hipótesis de semiconcavidad.

3) La acotación de la forma (10) constituye una extensión de las cotas

correspondientes al método de Euler (de primer orden) de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias, que fue generalizado en este trabajo para problemas de control óptimo determinístico. La validez de esta cota es general, siendo extensible a problemas de juegos diferenciales [5]. Asimismo, para problemas generales de juegos diferenciales estocásticos (que dan origen a ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman de segundo orden, totalmente no-lineales, degeneradas o no) es posible demostrar fórmulas similares a (10) [6].

4) Con vista a obtener resultados numéricos concretos es necesario discretizar la ecuación (1) también con respecto a las variables espaciales utilizando el método de los elementos finitos. De esta forma puede calcularse una solución totalmente discreta  $u_k^h$ . Las cotas del error total de aproximación  $|u(x) - u_k^h(x)|$  se obtienen esencialmente a partir de la acotación (10) [5].

#### REFERENCIAS

- [1] Fleming, W. H., Rishel, R. W., "Deterministic and stochastic optimal control", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
- [2] Capuzzo Dolcetta, L., "On a discrete approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming", Appl. Math. Optim. Vol. 10, 1983, págs. 367-377.
- [3] Capuzzo Dolcetta, L., Ishii, H., "Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory", Applied Mathematics and Optimization, Vol. 11, 1984, págs. 161-181.
- [4] Crandall, M. G., Lions, P. L., "Viscosity solutions of Hamilton Jacobi equations", Trans. AMS, Vol. 277, 1983, págs. 1-42.
- [5] González, R., Tidball, M., "Approximation of deterministic optimization problems". En preparación, 1989.
- [6] González, R., Tidball, M., "Approximation of stochastic optimization problems". En preparación, 1989.
- [7] Lions, P. L., "Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations", Pitman London, 1982.
- [8] Rockafellar, R., "Convex Analysis", Princeton, New Jersey, 1970.

