LA TEORIA DE LAS INECUACIONES VARIACIONALES APLICADA A PROBLEMAS ELIPTICOS CON O SIN CAMBIO DE FASE

Domingo A. TARZIA
PROMAR (CONICET-UNR),
Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agr.,
Av. Pellegrini 250,
2000 Rosario - Argentina.

RESUMEN

Esta conferencia describe algunas aplicaciones de la teoría de las inecuaciones variacionales elípticas a problemas de frontera libre, en particular al caso estacionario del problema de Stefan a dos fases.

ABSTRACT

This lecture describes some applications of the elliptic variational inequalities theory to free boundary problems, particularly related to the steady-state two-phase Stefan problem.

I. INTRODUCCION

En esta charla se verá una introducción a la teoría de las inecuaciones variacionales elípticas (IVE) [BaCa, DaLi, DuLi, EkTe, Fr2, KiSt, Li1, Li2, Ro, Ta1] aplicadas a diversos problemas de frontera libre (PFL), poniendo un especial énfasis en el caso estacionario del problema multidimensional de Stefan a dos fases.

Las IVE son un conjunto de desigualdades o de igualdades que remplazan las ecuaciones de Euler-Lagrange del cálculo de variaciones clásico cuando éstas no son más válidas.

Salvo casos particulares en los cuales puede encontrarse explícitamente la solución, los PFL son difíciles de ser atacados desde el punto de vista matemático debido a la presencia de dicha frontera libre. Estos problemas tienen la particularidad de presentar una región del espacio, llamada frontera libre, que es a priori desconocida y sobre la cual la o las funciones incógnitas del problema en estudio deben verificar ciertas condiciones que la caracterizan.

Los PFL pueden clasificarse en:

i) aquéllos que se transforman directamente en IV, como ser: problemas de la pared semi-permeable, problema del obstáculo, fluido visco-plástico de Bingham, semiconductores bajo una unión P-N, etc.

ii) aquéllos que después de un cambio de función incógnita se transforman en IVE, como ser: problema del dique poroso, problema estacionario de Stefan a dos fases, etc.

A continuación se verán algunos de los PFL enunciados más arriba en su forma más simple con sus respectivas formulaciones variacionales y referencias.

II. ALGUNOS PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

A continuación se verán cuatro problemas de frontera libre que pueden formularse a través de IVE.

A) Problema de la pared semi-permeable.

Se tiene un cuerpo Ω que posee una porción de frontera Γ_0 que está en contacto térmico con el exterior que se encuentra a una temperatura $u_0 = 0°C$ y la porción de frontera restante Γ_1 actúa como una pared semi-permeable en contacto con el exterior, es decir, deja entrar calor, proveniente del exterior, pero impide toda salida.

El problema consiste en hallar la temperatura u, definida en Ω, que satisface las siguientes condiciones:

$$(\text{A1})\qquad \begin{aligned} &-k\,\Delta u = f \ \text{en}\ \Omega\ , \\ &u/_{\Gamma_0} = 0\ , \\ &u/_{\Gamma_1} \geq 0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial n}/_{\Gamma_1} \geq 0\ ,\ (u\,\frac{\partial u}{\partial n})\,/_{\Gamma_1} = 0\ , \end{aligned}$$

donde k es el coeficiente de conducción térmica y f es un aporte de energía por unidad de volumen y de tiempo. El problema es de frontera libre pues en Γ_1 no se conocen a priori los puntos en los cuales $u=0$ o' $u > 0$.

La formulación variacional del problema está dada por

$$(\text{A2})\qquad \begin{aligned} &a(u, v\text{-}u) \geq L(v\text{-}u)\ ,\ \forall\, v \in K\ , \\ &u \in K\ , \end{aligned}$$

donde

$$(\text{A3})\qquad \begin{aligned} &V = \left\{ v \in H^1(\Omega)\ /\ v/\Gamma_0 = 0 \right\}\ ,\quad L(v) = \int_\Omega f\,v\,dx\ , \\ &K = \left\{ v \in V\ /\ v/_{\Gamma_1} \geq 0 \right\}\ ,\quad a(u,v) = k\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx\ . \end{aligned}$$

B) Fluido visco-plástico de Bingham.

Un fluido de Bingham es un fluido no newtoniano incompresible cuya ley de comportamiento traduce el carácter visco-plástico, la cual viene dada por

$$(\text{B1})\qquad \sigma_{ij} = -\,p\,\delta_{ij} + \sigma^D_{ij}\ ,\quad i,j = 1,2,3\ ,$$

con

$$(\text{B2})\qquad \begin{aligned} &(\text{i})\quad \sigma^D_{II}(\vec{u}) \leq g^2 && \text{si}\ D_{II}(\vec{u}) = 0\ , \\ &(\text{ii})\quad \sigma^D_{ij}(\vec{u}) = 2\mu\,D_{ij}(\vec{u}) + g\,\frac{D_{ij}(\vec{u})}{\sqrt{D_{II}(\vec{u})}} && \text{si}\ D_{II}(\vec{u}) \neq 0\ , \end{aligned}$$

donde

σ_{ij} : tensor de tensiones , $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$: vector velocidad ,

$D_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$: tensor velocidad de deformación ,

(B3) p : presión , σ^D : tensor desviador de tensiones ,

$g > 0$: límite de plasticidad , $\mu > 0$: viscosidad ,

$D_{II}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}{}^2(\vec{u})$: 2do invariante del tensor D.

El problema consiste en hallar $\vec{u}$ que satisface las siguientes condiciones

$$-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(\vec{u}) = f_i \quad \text{en} \quad \Omega \quad , \quad i=1,2,3$$

$$\text{(B4)} \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \ ,$$

$$\vec{u}/_{\partial\Omega} = \vec{0} \quad , \qquad \text{(B1) y (B2)} \quad ,$$

donde $\vec{f}=(f_1,f_2,f_3)$ es una densidad de fuerza exterior. El problema es de frontera libre pues el dominio Ω estará constituido por dos zonas: una con ley de comportamiento (B2ii) y otra rígida con ley de comportamiento (B2i), las cuales estarán separadas por una superficie que resulta desconocida a priori.

La formulación variacional del problema está dada por

$$\text{(B5)} \qquad \begin{cases} \mu\, a(\vec{u}, \vec{v}-\vec{u}) + g\, j(\vec{v}) - g\, j(\vec{u}) \geq L(\vec{v}-\vec{u}) \ , \ \forall \vec{v} \in K \ , \\ \vec{u} \in K \ , \end{cases}$$

donde

$$V = \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \ , \ K = \left\{\vec{v} \in V \,/\, \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \ \text{en} \ \Omega\right\} \ ,$$

$$\text{(B6)} \qquad j(\vec{v}) = 2\int_\Omega \sqrt{D_{II}(\vec{v})}\, dx \ , \ L(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\, dx \ ,$$

$$a(\vec{u},\vec{v}) = 2\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega D_{ij}(\vec{u})\, D_{ij}(\vec{v})\, dx \ .$$

C) Problema del dique poroso

Se considera el régimen estacionario bidimensional del flujo de un fluido homogéneo, isótropo e incompresible a través de un medio poroso (dique de paredes verticales y base horizontal representado por $R=(0,a)x(0,b)$, $a>0$, $b>0$).

Por efecto de la gravedad, el agua filtrará del nivel más alto (parte izquierda) al nivel más bajo (parte derecha). La región R se enmcuentra dividida en dos zonas: la zona bañada es la que se encuentra debajo de la curva $y = \phi(x)$ $(\phi(0) = H > \phi(a) > h)$ que la separa de la zona seca. Dicha curva es no conocida a priori y representa la frontera libre del problema.

El problema consiste en hallar p, ϕ de manera que satisfagan las condiciones siguientes:

$$p = 0 \text{ en } R - \overline{\Omega} \;,$$

$$\Delta p = 0 \text{ en } \Omega \;,$$

$$p(0,y) = \gamma(H-y) \;,\; 0 \leq y \leq H \;,$$

(C1)
$$p(a,y) = \begin{cases} \gamma(h-y) & \text{si } o \leq y \leq h \;, \\ 0 & \text{si } h \leq y \leq \phi(a) \;, \end{cases}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}(x,0) = \gamma \;,\; 0 \leq x \leq a \;,$$

$$p(x, \phi(x)) = 0 \;,\; 0 \leq x \leq a \;,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, \phi(x)) - \phi'(x)\frac{\partial p}{\partial x}(x, \phi(x)) + \gamma = 0 \;,\; 0 \leq x \leq a \;,$$

donde

(C2)

p : presión del fluido ,

$\gamma > 0$: peso específico del fluido .

Si se define la nueva función incógnita

$$\text{(C3)} \quad \omega(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \in R - \Omega \ , \\ \displaystyle\int_y^{\phi(x)} p(x,\zeta)\, d\zeta & \text{si} \quad (x,y) \in \Omega \ , \end{cases}$$

ésta satisface la siguiente IVE:

$$\text{(C4)} \quad \begin{cases} a(\omega, v-\omega) \geq L(v-\omega) \ , \ \forall \, v \in K \ , \\ \omega \in K \ , \end{cases}$$

donde

$$\text{(C5)} \quad \begin{aligned} & V = H^1(R) \ , \quad K = \left\{ v \in V \ / \ v \geq 0 \text{ en } R \ , \ v/_{\partial R} = G \right\} \ , \\ & a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \ , \quad L(v) = -\gamma \int_\Omega v \, dx \ , \end{aligned}$$

siendo G una adecuada función definida sobre ∂R que depende de los coeficientes γ, H, h, a, b.

D) Problema de Stefan estacionario a dos fases

Se considera un material Ω con frontera regular y se supone que 0^0 C es la temperatura de cambio de fase. Se supone que el material está dividido en dos regiones ocupadas por Ω_1 (fase sólida) y por Ω_2 (fase líquida), las cuales están separadas por la superficie $\mathcal{L}$ de cambio de fase, conocida como la frontera libre del problema.

Si se representa la temperatura θ de la siguiente manera

$$\text{(D1)} \quad \theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & \text{si} \quad x \in \Omega_1 \ , \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathcal{L} \ , \\ \theta_2(x) > 0 & \text{si} \quad x \in \Omega_2 \ , \end{cases}$$

y se supone que Γ está compuesta de dos porciones Γ_1 y Γ_2 sobre las cuales se imponen una temperatura b y un flujo de calor q respectivamente, entonces el problema consiste en hallar θ de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$- k_2 \, \Delta\theta_2 = g \quad \text{en } \Omega_2 \quad , \quad - k_1 \, \Delta\theta_1 = g \quad \text{en } \Omega_1 \quad ,$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 \, , \quad k_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial n} \quad \text{sobre } L \quad ,$$

(D2)

$$\theta \,|\, \Gamma_1 = b \, ,$$

$$- k_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial n} \,|\, \Gamma_2 = q \quad \text{si} \quad \theta \,|\, \Gamma_2 > 0 \quad ,$$

$$- k_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial n} \,|\, \Gamma_2 = q \quad \text{si} \quad \theta \,|\, \Gamma_2 < 0 \quad ,$$

donde

(D3)

k_i : conductividad térmica de la fase i ($i = 1,2$) ,

g : aporte de energía por unidad de volumen y de tiempo .

Si se define la nueva función incógnita

(D4) $$u = k_2 \, \theta^+ - k_1 \, \theta^- \quad \text{en } \Omega \quad ,$$

el problema (D2) se transforma en

(D5)

$$- \Delta u = g \ \text{ en } \ \Omega \quad ,$$

$$u \,|\, \Gamma_1 = B \quad , \quad - \frac{\partial u}{\partial n} \,|\, \Gamma_2 = q \quad ,$$

cuya formulación variacional está dada por la siguiente EVE:

(D6)

$$a(u, v-u) = L(v-u) \quad , \qquad \forall \, v \in K \quad ,$$

$$u \in K \quad ,$$

donde

$$V = H^1(\Omega) \quad , \quad K = \left\{ v \in V \,/\, v\,|_{\Gamma_1} = B \right\} ,$$

(D7) $$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \,.\, \nabla v \;dx \;, \qquad B = k_2\, b^+ - k_1\, b^- \;,$$

$$L(v) = \int_\Omega gv\, dx \;-\; \int_{\Gamma_2} q\, v\; d\gamma \;.$$

Si se reemplaza la condición $u\,|_{\Gamma_1} = B$ por

(D8) $$-\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha\,(\,u - B\,) \;,\; \alpha > 0 \;,$$

entonces el problema (D5) se transforma en

(D9)
$$- \Delta u = g \;\text{ en }\; \Omega$$
$$-\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha\,(\,u - B\,) \;, \quad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \;,$$

cuya formulación variacional está dada por la siguiente EVE:

(D10)
$$a_\alpha(u,v) = L_{\alpha qB}(v) \,,\; \forall\, v \in V \,,$$
$$u \in V \,,$$

donde

$$a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u\, v\; d\gamma \;,$$

(D11) $$L_{\alpha qB}(v) = L_q(v) + \alpha \int_{\Gamma_1} B\, v\; d\gamma \,.$$

$\alpha > 0$: coeficiente de transferencia de la frontera Γ_1 .

En los cuatro ejemplos precedentes se han obtenido tres IVE y una EVE, presentando cada uno de ellos una característica diferente: los dos primeros ejemplos se transforman directamente en una IVE; en cambio los dos últimos lo hacen definiendo previamente una nueva función incógnita. Los ejemplos A y B difieren entre sí en que el primero representa una IVE de primera especie y en cambio el segundo representa una IVE de segunda especie. Por otra parte, el ejemplo C representa una IVE de primera especie y el ejemplo D una EVE.

Por último, cabe destacar que a través de la teoría de las IVE puede realizarse el análisis numérico del problema en cuestión [Ci, DaLi, Gl, GLT, No].

En las referencias se da una bibliografía consistente, en su mayor parte, en libros a través de los cuales podrán ampliarse los temas expuestos aquí, como así también encontrar otras referencias [ACH, BaCa, Ba, BeLi1, BeLi2, BDF, Ca, Ch, Cr, Di, ElOc, FaPr, Fr1, Fr2, GLT, Je, KiSt, Li1, Li2, Li3, Ma, NiPa, OcHo, Ro, Ru, Sa, Ta1, Ta2, Ta3, Tay, WSB].

A continuación se darán propiedades que caracterizan a los problemas elípticos mixtos (D5) y (D9) o a sus respectivas formulaciones variacionales (D6) y (D10).

III. SOBRE EL CASO ESTACIONARIO DEL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

De ahora en adelante se considerarán las EVE (D6) y (D10) para datos:

$$(1) \qquad g \equiv 0 \ \text{ en } \ \Omega \ , \ q = \text{cte} > 0 \text{ sobre } \Gamma_2 \ , \ B = \text{cte} > 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \ .$$

Uno de los problemas que se presenta es el de determinar condiciones suficientes y/o necesarias para los datos de manera que las soluciones de las EVE (D6) y (D10) representen un caso estacionario del problema de Stefan a dos fases en Ω, es decir que la solución correspondiente es de signo no-constante en el dominio Ω. Si se denota con u y u_α las soluciones de (D6) y (D10) respectivamente, entonces se tienen los siguientes resultados [TaTa, Ta3, Ta4].

<u>TEOREMA</u>. (i) Si $q > q_0(B)$ entonces (D5) o (D6) representa un caso estacionario de un problema de Stefan a dos fases en Ω, es decir que u es una función de signo no-constante en Ω, donde

$$(2) \qquad q_0(B) = \frac{B\,|\Gamma_2|}{C} > 0 \ , \ B > 0 \ ,$$

con $C = C(\Omega,\Gamma_1,\Gamma_2) > 0$ una adecuada constante geométrica. Si además, por cuestiones de simetría, la función u es constante sobre Γ_2 entonces la condición suficiente es también necesaria.

(ii) Si $q > q_0(B)$ entonces (D9) o (D10) representa un caso estacionario de un problema de Stefan a dos fases en Ω (es decir, la función u_α es de signo no-constante en Ω) para $\alpha > \alpha_0(q,B)$, donde

$$(3) \qquad \alpha_0(q,B) = \frac{q\,|\Gamma_2|}{B\,|\Gamma_1|} > 0 \ , \ q > 0 \ , \ B > 0 \, .$$

(iii) Si q verifica las desigualdades

$$(4) \qquad q_m(\alpha,B) < q < q_M(\alpha,B) \ , \ \alpha > 0 \ , \ B > 0 \ ,$$

entonces (D9) o (D10) representa un caso estacionario de un problema de Stefan a dos fases en Ω (es decir, la función u_α es de signo no-constante en Ω), donde

$$(5) \qquad 0 < q_m(\alpha,B) = \frac{B\,|\Gamma_2|}{A(\alpha)} < q_M(\alpha,B) = B\alpha \frac{|\Gamma_1|}{|\Gamma_2|} \ ,$$

con $A = A(\alpha) > 0$ una función definida para $\alpha > 0$ y que tiene las siguientes propiedades:

$$A = A(\alpha) \text{ es decreciente en } \alpha \ ,$$

$$(6) \qquad A(\alpha) > \frac{|\Gamma_1|}{|\Gamma_2|} \frac{1}{\alpha} \ ,$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = C \ , \quad \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha A'(\alpha) = 0 \, .$$

(iv) Si la función u_α verifica la condición

$$(7) \qquad \frac{1}{q^2} a(u_\alpha, u_\alpha) = \text{Const.} \ , \ \forall \ \alpha,q,B > 0 \ ,$$

entonces se tiene que

$$(8) \qquad u_\alpha \,|_{\Gamma_1} = B - \frac{q\,|\Gamma_2|}{\alpha\,|\Gamma_1|} \ , \qquad A(\alpha) = C + \frac{|\Gamma_2|^2}{|\Gamma_1|\,\alpha} \ .$$

Si además, por cuestiones de simetría, la función u_α es constante sobre Γ_1 y Γ_2 entonces la condición suficiente (4) es también necesaria.

Utilizando el software científico MODULEF (Módulos de Elementos Finitos) se han realizado en [Ta4, SaTa] cálculos numéricos sobre los problemas (D6) y (D9) respectivamente, verificándose las condiciones dadas en (i) y en (iii) del Teorema precedente. Más aún, en [Ta5] se presenta un análisis numérico correspondiente a la EVE (D6) y a la aproximación, por elementos finitos, de $q_0(B)$.

AGRADECIMIENTO

El presente trabajo ha sido realizado a través de los proyectos de investigación y desarrollo "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática" y "Análisis Numérico de Ecuaciones e Inecuaciones Variacionales", del CONICET - UNR, Rosario , Argentina.

REFERENCIAS

[ACH] J. ALBRECHT-L. COLLATZ-K. H. HOFFMANN (Eds.), "Numerical treatment of free boundary value problems", ISNN N°. 58, Birkhauser Verlag, Basel , 1982.

[BaCa] C. BAIOCCHI - A. CAPELO, "Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1: Problemi variazionali, Vol. 2: Problemi quasivariazionali, Pitagora Editrice, Bologna , 1978.

[Ba] V. BARBU, "Optimal control of variational inequalities", Research Notes in Mathematics, N° 100, Pitman, London, 1984.

[BeLi1] A. BENSOUSSAN-J. L. LIONS, "Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique", Dunod, Paris, 1978.

[BeLi2] A. BENSOUSSAN-J. L. LIONS, "Contrôle impulsional et inéquations quasi variationnelles", Dunod, Paris, 1982.

[BDF] A. BOSSAVIT-A. DAMLAMIAN-M. FREMOND (Eds.), "Free Boundary Problems: Applications and Theory", Vol. III, IV, Research Notes in Mathematics N° 120, 121, Pitman, London, 1985.

[Ca] J.R. CANNON, "The one-dimensional heat equation", Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.

[Ch] M. CHIPOT, "Variational inequalities and flow in porous media", Springer Verlag, New York, 1984.

[Ci] P.G. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", North-Holand, Amsterdam, 1978.

[Cr] J. CRANK, "free and moving boundary problems", Clarendon Press, Oxford, 1984.

[DaLi] R. DAUTRAY-J.L. LIONS (Eds.), "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", tome 1, 2, Masson, Paris, 1984.

[Di] J.I. DIAZ, "Nonlinear partial differential equations and free boundaries, I : Elliptic problems", Research Notes in Math. N_0 106, Pitman, London, 1985.

[DuLi] G. DUVAUT-J.L. LIONS, "Les inéquations en mécanique et en physique", Dunod,Paris, 1972.

[EkTe] I. EKELAND-R. TEMAM, "Analyse convexe et problèmes variationnelles", Dunod - Gauthier Villars, Paris, 1973.

[ElOc] C.M. ELLIOTT-J.R. OCKENDON, "Weak and variational methods for moving boundary problems", Research Notes in Math., N_0 59, Pitman, London, 1982.

[FaPr] A. FASANO-M. PRIMICERIO (Eds.), "Free boundary problems: Theory and Applications", Vol. I, II, Research Notes in Mathematics, N° 78, 79, Pitman, London, 1983.

[Fr1] A. FRIEDMAN, "Partial differential equations of parabolic type", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

[Fr2] A. FRIEDMAN, "Variational principles and free boundary problems", J. Wiley, New York, 1982.

[Gl] R. GLOWINSKI, "Numerical methods for nonlinear variational problems", Springer Verlag, Berlin, 1984.

[GLT] R. GLOWINSKI-J.L. LIONS-R. TREMOLIERES, "Analyse numérique des inéquations variationnelles", Tome 1, 2, Dunod, Paris, 1976.

[Je] J.W. JEROME, "Approximation of nonlinear evolution systems", Academic Press, New York, 1983.

[KiSt] D. KINDERLEHRER - G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York, 1980.

[LSU] O.A. LADYZENSKAJA-V.A. SOLONNIKOV-N.N. URAL'CEVA, "Linear and quasilinear equations of parabolic type", Amer. Math. Soc., Providence, 1968.

[Li1] J.L. LIONS, "Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles", Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1968.

[Li2] J.L. LIONS, "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires", Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.

[Li3] J.L. LIONS, "Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal", Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1976.

[Ma] E. MAGENES (Ed.), "Free boundary problems", Vol. I, II, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, 1980.

[NiPa] M. NIEZGODKA-I. PAWLOW (Eds.), "Recent advances in free boundary problems", in Control and Cybernetics, 14 N° 13, 1985.

[No] R.H. NOCHETTO, "Aproximación de problemas elípticos de frontera libre", Depto Ecuaciones Funcionales, Univ. Complutense de Madrid, Madrid, 1985.

[OcHo] J.R. OCKENDON-W.R. HODGKINS (Eds.), "Moving boundary problems in heat flow and diffusion", Clarendon Press, Oxford, 1975.

[Ro] J.F. RODRIGUES, "Obstacle problems in mathematical physics", North-Holland Mathematics Studies N_0 134, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[Ru] L.I. RUBINSTEIN, "The Stefan problem", Translations of Mathematical Monographs, Vol.

27, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. , 1971.

[Sa] C. SAGUEZ, "Contrôle optimal de systèmes à frontière libre", Thèse d'Etat, Univ. de Compiègne (Septembre 1980).

[SaTa] M.C. SANZIEL - D.A. TARZIA, "Cálculo numérico de problemas elípticos mixtos con presencia de cambio de fase mediante el software científico MODULEF, en MECOM '88, Mecánica Computacional,Vol. 8, L.A. Godoy -F. Flores (Comp.), AMCA, Santa Fe , 1989, 117-125.

[TaTa] E.D. TABACMAN-D.A. TARZIA, "Sufficient and/or necessary conditions for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", J. Diff. Equations, 77(1989), 16-37.

[Ta1] D.A. TARZIA, "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI - CONICET, No. 5, Buenos Aires, 1981.

[Ta2] D.A. TARZIA (Comp.), "Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", CUADERNOS Inst. Mat. "Beppo Levi", N° 11, 12, 1984. "II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones", CUADERNOS Inst. Mat. "Beppo Levi", N° 13, 14, Rosario, 1987.

[Ta3] D.A. TARZIA, "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniões em Matemática Aplicada e Computacão Científica, Vol. 5, SBMAC, Gramado (1987).

[Ta4] D.A. TARZIA, "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady state two-phase Stefan problem", Engineering Analysis, 5(1988), 177-181.

[Ta5] D.A. TARZIA, "Análisis numérico de un problema elíptico mixto con cambio de fase", en ENIEF '89, Mecánica Computacional, AMCA, Por aparecer.

[Tay] A.B. TAYLER, "Mathematical models in applied mechanics", Clarendon Press, Oxford, 1986.

[WSB] D.G. WILSON-A.D. SOLOMON-P.T. BOGGS (Eds.), "Moving Boundary Problems", Academic Press, New York, 1978.