

CONVECCION NATURAL BIDIMENSIONAL EN CAVIDADES
DOBLEMENTE CONEXAS TRAPEZOIDALES PARA REGIMENES DE BAJO
NUMERO DE RAYLEIGH

Luis Cardón #
INENCO, Universidad Nacional de Salta
Buenos Aires 177

RESUMEN

Se presentan simulaciones numéricas de la convección natural en cavidades bidimensionales simple y doblemente conexas, rectangulares y con el borde superior oblicuo.

El modelo se basa en la formulación temporal vorticidad función corriente acoplada a una ecuación de balance de energía.

Se discretiza mediante diferencias finitas centradas y se resuelve mediante direcciones alternantes y sobre-relajación sucesiva. El número de Rayleigh está limitado por el método de discretización empleado a valores menores a 10^5 .

ABSTRACT

Numeric simulation of the natural convection in a simple and double conected enclosures, rectangular or with a sloping uper border are shown.

The model is based on the time dependent vorticity-stream function formulation coupled to an energy balance equation.

Discretization is made by centered finitte difference and alternating direction implicit method and successive-overrelaxation are applied for the solution. Rayleigh number is limited by the discretization method to values lower than 10^5 .

INTRODUCCION

El interés que motiva este trabajo y las geometrías analizadas reside en las frecuentes veces en que la convección natural es el mecanismo de pérdida, motor, o de distribución de calor en colectores y acumuladores de energía solar, en edificios calentados con energía convencional o no, o en la climatización de aquéllos con energías naturales.

En los edificios solares, se promueve mediante el diseño adecuado, que lazos convectivos naturales transporten calor de la zona de ganancia a lugares remotos. Los mismos principios se utilizan en climatización bioclimática. En un caso particular, el diseño de un banco de germoplasma (1), se pretende extraer calor de las semillas almacenadas y radiar el mismo a través de un techo metálico a la atmósfera nocturna (Abra Pampa, temperatura media de mínima en julio -14.20). Un lazo convectivo de aire sería el mecanismo caloportador. La Fig. 1 muestra un corte esquemático del banco y su idealización a los fines de cálculo. Probablemente un análisis unidimensional hubiera bastado para algunos fines, dejando sin respuestas problemas relativos a la mejor configuración para el arranque diario del sistema.

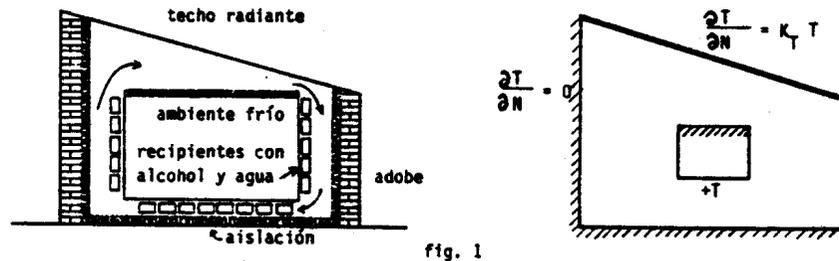


fig. 1

Dado el escaso conocimiento sobre la convección en geometrías rectangulares no conexas, el autor no conoce bibliografía precedente en el tema, se han resuelto una serie de situaciones previas a la de interés, algunas ya mencionadas en la literatura, algunas de ellas aún novedosas pero de comportamiento más cercano a lo intuitivo, a fin de validar el programa. En algunas de las situaciones analizadas deberá esperarse una validación a través de otras experiencias numéricas o de resultados provenientes de modelos físicos. De todas maneras el objetivo final propuesto, la modelización del banco, no ha sido

alcanzado aún debido a la limitación que el método empleado impone en el Ra ($< 10^5$), debiéndose alcanzar valores superiores a 10^{11} .

El cálculo se basa en el procedimiento de Wilkes y Churchill (2) para cavidades rectangulares y se utilizaron entre otros los resultados de estos autores para la validación de parte del programa. La aplicación de diferencias finitas centradas o de la serie de Taylor para la discretización de las derivadas implica suponer una dependencia lineal entre nodos de la variable dependiente y esto sólo resulta aceptable como modelo para números de Rayleigh característicos de diferencias de temperatura y dimensiones pequeñas ($Pr = .733$, $Ra = 10^5$, $\Delta\theta = 5$ C, $L = 5$ cm). Esta dificultad se puede resolver utilizando esquemas tipo corriente-arriba, como en el trabajo de Kublbeck et al (3), esquemas híbridos como el de Spalding, o el de la ley de la potencia de Patankar, estos dos últimos como se describen en Patankar (4) y con aplicaciones recientes en contextos de similar interés al del presente, por ejemplo, en los trabajos de Guo y Wu (5) y Gadgil et.al. (6).

En nuestro caso en que se ha trabajado con computadoras AT de 9 Mhz, los métodos mencionados presentan la desventaja de requerir una iteración por paso de tiempo, al aparecer la velocidad como variable implícita en las ecuaciones discretizadas. Esta iteración no es estrictamente necesaria en el esquema utilizado, Wilkes (2), y podría requerirse para mejorar el problema de inconsistencia que aparece en los bordes. Hemos comprobado que su aplicación no afecta los resultados.

EL MODELO MATEMATICO

Se considera como es habitual que el fenómeno está gobernado por las ecuaciones no lineales debidas a Boussinesq, que en la formulación adimensional vorticidad-función de corriente quedan expresadas por (2):

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{Gr}{2} \frac{\partial T}{\partial Y} + \nabla^2 w \quad (1)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (2)$$

donde la vorticidad adimensional w se define

$$w = -\nabla^2 \phi \quad (3)$$

y la función de corriente, ϕ , es tal que las velocidades dimensionales en las direcciones X e Y son

$$U = \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad \text{y} \quad V = -\frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (4) \text{ y } (5)$$

La temperatura y demás parámetros se definen

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_2 - \theta_0} ; \quad Pr = \frac{\mu C_p}{k}$$

$$Gr = \frac{g \beta (\theta_2 - \theta_0) d^3}{\nu^2} \quad X = \frac{x}{d} \quad Y = \frac{y}{d}$$

Esta formulación supone fluido newtoniano, incomprensible, constancia de las propiedades del fluido, μ y ν salvo en este último caso en que se permite la variación de la densidad con la temperatura en donde aparece asociada a las fuerzas de flotación: $\rho = \rho_0 (1 + \beta (\theta_2 - \theta_1))^{-1}$. En la ecuación de la energía se desprecia la disipación viscosa. En las ecuaciones no aparece la presión como variable dependiente y puede resolverse adecuadamente en dos dimensiones.

CONDICIONES DE BORDE

Las ecuaciones 1 a 5 se resuelven proveyendo las condiciones en flujo de calor o temperatura, vorticidad y función de corriente en los bordes.

Para la ecuación de temperatura se consideraron tres tipos de condición de borde, Dirichlet, Neuman, Robbins, esta última para tener en cuenta bordes con pérdidas de calor de tipo radiativo linealizadas. Siendo η perpendicular al borde se tiene:

$$\theta = \theta_c = \text{cte.} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = e \sigma (\theta^4 - \theta_c^4) \quad (8)$$

En la última ecuación la temperatura debe ser la temperatura absoluta y θ_c es la temperatura de cielo (1), el factor de forma se calcula $(1/e_1 + 1/e_2 - 1)^{-1}$ donde e_1 y e_2 son las emisividades de la atmósfera y del radiador (se supone que el techo radiador tiene conductividad infinita). Linealizando y adimensionalizando la ec 8 se obtiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = e_4 \theta (\theta - \theta_c) \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial N} = K_T T \quad (10)$$

Esta última es la condición de borde tipo Robinns mencionada.

La condición de borde para la función de corriente resulta inmediata si se considera que la velocidad del fluido en los bordes debe ser cero. De las ec. (4) y (5) resulta $\phi = \text{cte.}$, y en forma arbitraria se toma igual a cero.

Para la vorticidad, la condición de borde se evalúa a partir de su definición, ec. (3), suponiendo conocidos los valores de w en el interior del dominio de cálculo.

METODO DE DISCRETIZACION

La discretización espacial de las ecuaciones 1, 2 y 3 se hace mediante diferencias finitas centradas, mientras que en las dos primeras la discretización temporal se hace en dos pasos mediante diferencias finitas hacia adelante con el método de las direcciones alternantes.

Considerando una ecuación general del tipo advec - cion-difusión con un término de acoplamiento

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial X} + V \frac{\partial f}{\partial Y} = C_1 \nabla^2 f + C_2 \frac{\partial f}{\partial Y} \quad (11)$$

donde f puede ser temperatura o vorticidad, con $C_1 = 1/Pr$ y $C_2 = 0$ en el primer caso y $C_1 = 1$ y $C_2 = Gr/2$ en el segundo. El primer paso se calcula para un tiempo intermedio $(n+1/2) * dt_{ao}$ evaluándose las diferencias en la dirección X para dicho tiempo, mientras que las diferencias en Y se calculan para el tiempo conocido $n * dt_{ao}$. Utilizando ∇_x^2 ; ∇_{xx}^* ; ∇_t^* para los operadores que definen las diferencias centradas, para la primera derivada, segunda derivada y diferencia hacia adelante para la primera derivada respectivamente, resulta la ecuación implícita en X

$$\frac{f_{ij}^* - f_{ij}^n}{\Delta t / 2} + U \nabla_x^* f_{ij}^* + V \nabla_y f_{ij}^n = C_1 (\nabla_{xx}^* f_{ij}^* + \nabla_{yy} f_{ij}^n) + C_2 \nabla_y f_{ij}^{n+1} \quad (12)$$

El segundo paso se calcula para el tiempo $(n + 1) * dt_{ao}$. Mediante la evaluación de las diferencias en X en el tiempo mencionado y de las diferencias en el tiempo $(n + 1/2)$, cuyos valores se obtuvieron en el paso anterior, la ecuación discretizada resulta implícita en Y

$$\frac{f_{ij}^{n+1} - f_{ij}^*}{\Delta c/2} + U \nabla_x^{\circ} f_{ij}^* + V \nabla_y^{\circ} f_{ij}^{n+1} = C_1 (\nabla_{xx}^{\circ} f_{ij}^* + \nabla_{yy}^{\circ} f_{ij}^{n+1}) + C_2 \nabla_y^{\circ} f_{ij}^{n+1}$$

Efectuando las operaciones indicadas resulta para cada fila de puntos en la red

$$a_1 f_{i,j-1}^* + a_2 f_{ij}^* + a_3 f_{i,j+1}^* = d_1 f_{i-1,j}^n + d_2 f_{i,j}^n + d_3 f_{i+1,j}^n + C_2' (f_{i,j-1}^{n+1} - f_{i,j+1}^{n+1}) \quad (14)$$

y para cada columna

$$a_1 f_{i-1,j}^{n+1} + a_2 f_{i,j}^{n+1} + a_3 f_{i+1,j}^{n+1} = d_1 f_{i,j-1}^* + d_2 f_{i,j}^* + d_3 f_{i,j+1}^* + C_2' (f_{i,j-1}^{n+1} + f_{i,j+1}^{n+1}) \quad (15)$$

Los valores de las constantes que aparecen en las ecuaciones 14 y 15 se calculan como se indica a continuación para el caso implícito en X. Para el caso implícito en Y debe reemplazarse los valores de U y DX por V y DY y viceversa.

$$a_1 = -\frac{V}{2\Delta Y} - \frac{C_1}{\Delta Y^2} \quad d_1 = \frac{U}{2\Delta X} + \frac{C_1}{\Delta X^2}$$

$$a_2 = 2 \left(\frac{1}{\Delta c} + \frac{C_1}{\Delta Y^2} \right) \quad d_2 = 2 \left(\frac{1}{\Delta c} - \frac{C_1}{\Delta X^2} \right)$$

$$a_3 = \frac{V}{2\Delta Y} - \frac{C_1}{\Delta Y^2} \quad d_3 = -\frac{U}{2\Delta X} + \frac{C_1}{\Delta X^2}$$

$$C_2' = C_2/2\Delta X$$

La simetría existente entre ambos casos facilita la programación del cálculo.

Fila por fila y columna por columna se resuelve el problema como si fuera unidimensional. Las ecuaciones 14 y 15 conducen a sistemas tridiagonales que se resuelven mediante el algoritmo de Thomas.

La discretización de la ecuación 3 mediante diferencias finitas centradas

$$\nabla_{xx}^2 \phi + \nabla_{yy}^2 \phi = -w \quad (16)$$

conduce a

$$-4 \phi_{ij} + (\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1}) = -w_{ij} \Delta X^2 \quad (17)$$

ecuación que se resuelve mediante Gauss-Seidel o sobrerrelajación sucesiva

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n + \frac{w}{4} (\phi_{i-1,j}^n + \phi_{i+1,j}^n + \phi_{i,j-1}^n + \phi_{i,j+1}^n + w_{ij}^{n+1} \Delta X^2) \quad (18)$$

DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES DE BORDE

Se describirá la discretización de las ecuaciones de borde para la temperatura y su introducción en los sistemas algebraicos dados por las ecuaciones 14 y 15. Se toma como ejemplo la línea definida por $i = i_{min} \dots i = i_{max}$, $J = 0$, en la ecuación 14 implícita en Y . La aplicación de las condiciones de borde modifica los coeficientes a_3 y d_j (suma de los términos independientes) en la primera ecuación del sistema ($i = i_{min}$) y a_1 y d_j en la última ecuación del sistema ($i = i_{max}$). Los valores de i_{min} y i_{max} serán distintos según el tipo de condición de borde y de la geometría del mismo.

En la Tabla 1 se esquematizan las distintas situaciones de borde analizadas, como se modifican los coeficientes y los los valores i_{min} o i_{max} que debe tomarse en cada caso. En su derivación se emplearon diferencias finitas centradas y condición de reflexión en el caso de borde adiabático.

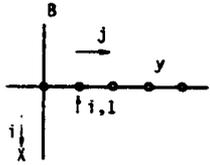
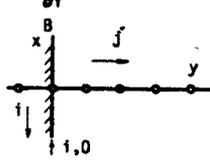
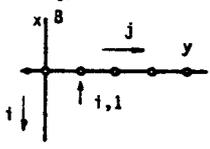
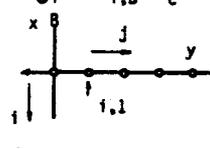
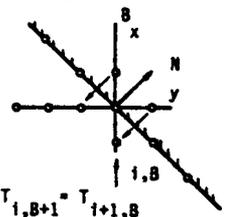
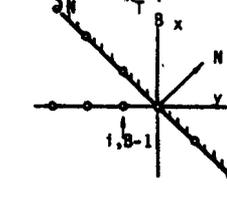
La discretización de la función corriente en el borde no presenta dificultad alguna, en cambio de la derivación de las condiciones de borde para la vorticidad resulta la principal dificultad de la formulación vorticidad - función de corriente (véase Peyret y Taylor (6)).

En este trabajo se ha empleado la misma fórmula que Wilkes (2), obtenida a partir de la definición de vorticidad, ecuación 3, que reescribimos

$$w(y,0) = - \left(\frac{\partial^2 \phi(y,0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(y,0)}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

Por nuestra elección de $\phi = cte = 0$ en el borde, la derivada segunda en X en la ecuación 19 es cero. Se evalúa

TABLA I

<p>1) $T = \text{cte.}$</p>  <p>$a_2 T_{i,1} + a_3 T_{i,2} = D_i - a_1 T_{i,0}$</p>	<p>2) $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$</p>  <p>$T_{i,-1} = T_{i,1}$ $a_2 T_{i,0} + (a_1 + a_3) T_{i,1} = D_i$</p>
<p>3) $\frac{\partial T}{\partial y} = q = \text{cte.}$</p>  <p>$(a_2 - a_1) T_{i,1} + a_3 T_{i,2} = D_i - a_1 Yq$</p>	<p>4) $\frac{\partial T}{\partial y} = T_{i,B}^4 - T_c^4$</p>  <p>$(\frac{a_1}{1 - \gamma K_T} + a_2) T_{i,1} + a_3 T_{i,2} = D_i$</p>
<p>5) $\frac{\partial T}{\partial N} = 0$</p>  <p>$T_{i,B+1} = T_{i+1,B}$ $T_{i-1,B} = T_{i+1,B}$ $a_1 T_{i,B-1} + a_2 T_{i,B} = D_i - a_3 T_{i,B+1}$</p>	<p>6) $\frac{\partial T}{\partial N} = K_T T$</p>  <p>$a_1 T_{i,B-2} + a_2 T_{i,B-1} = D_i - \frac{a_3}{(1 - K_T)} T_{i+1,B}$</p>

la derivada segunda en Y mediante expansión en serie de Taylor alrededor de uno o dos puntos hacia el interior de la red, resultando las fórmulas

$$w_{i,0}^{n+1} = -2 \frac{\phi_{i,1}}{\Delta Y^2} \quad (20)$$

$$w_{i,0}^{n+1} = \left(\frac{\phi_{i,2} - 8 \phi_{i,1}}{2 \Delta Y^2} \right) \quad (21)$$

ALGORITMO Y METODOLOGIA DE RESOLUCION

El algoritmo de resolución es el siguiente :

- 1) Se supone $T_{ij}^n = w_{ij}^n = \phi_{ij}^n = U_{ij}^n = V_{ij}^n = 0$
- 2) Se calcula $T_{ij}^{n+1/2}$ implícito en Y y luego T_{ij}^{n+1} implícito en X
- 3) Con los valores de temperatura calculados se calcula $w_{ij}^{n+1/2}$ implícito en Y y w_{ij}^{n+1} implícito en X.
- 4) Con los valores de vorticidad se calcula ϕ_{ij} .
- 5) Con los valores de la función de corriente se calcula la vorticidad en los bordes.
- 6) Con los valores de la función de corriente se calcula U_{ij}^{n+1} y V_{ij}^{n+1} .
- 7) Se repite desde 2 para un nuevo paso de tiempo.

Como la región discretizada es doblemente conexa, la programación de la solución tiene en cuenta los límites geométricos y las condiciones de borde en la zona donde se hace el barrido, sea implícito en X o Y. La fig. 2 muestra en forma esquemática las zonas y condiciones de borde correspondientes a la ecuación de temperatura para uno de los casos resueltos. La zona puede estar comprendida por una o más filas o columnas con condiciones de borde similares.

RESULTADOS

Los resultados que se presentan se obtuvieron con un doble propósito, el primero de los cuales fué resolver la situación planteada en la introducción, para la cual el comportamiento convectivo simulado no concordó con las expectativas intuitivas de que se formara un lazo convectivo alrededor del obstáculo. Esto originó la necesidad de pro-

bar el programa en situaciones similares.

En todos los casos en que fué posible se validó el programa con la solución de Wilkes (2) para la cavidad cuadrada. Esto no se pudo hacer, por ejemplo, en los casos con el borde oblicuo si alterar el programa.

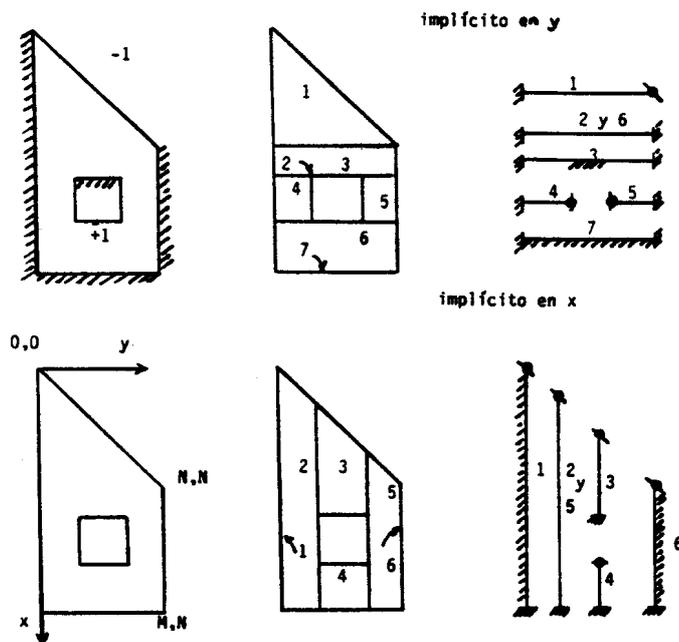


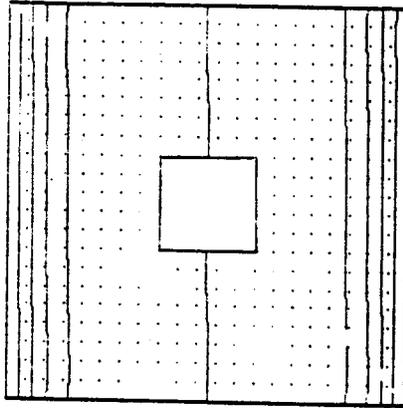
fig. 2

En la fig. 3 se muestran las isoterma y líneas de corriente para tres corridas con una cavidad cuadrada de lado adimensional unitario, con una red de 20×20 puntos interiores y con un obstáculo interno de 6×6 puntos. Se mantiene una diferencia de temperatura entre los lados de la cavidad mientras que su techo y piso son adiabáticos, como así también el obstáculo interno.

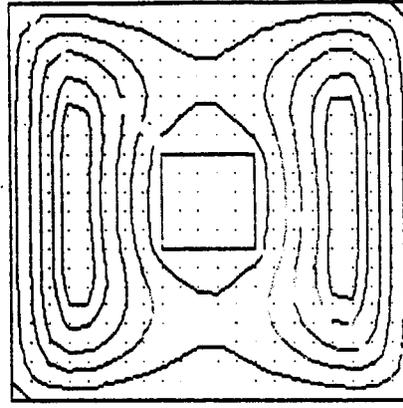
Las corridas se hicieron con un paso de tiempo de .001 para observar el arranque de la convección y se calculó hasta alcanzar el estado estable, que en general, para los casos con obstáculo interno se obtiene antes que para los casos sin el mismo.

El caso mostrado en la fig. 3 es el único en que se observó la permanencia de un lazo convectivo alrededor del obstáculo hasta el estado estable.

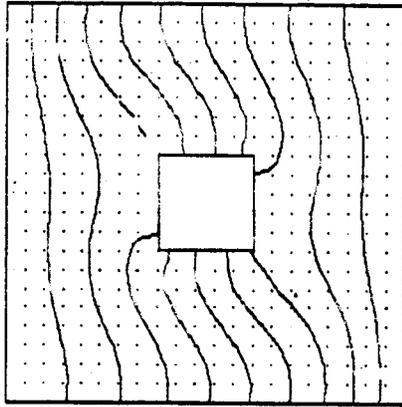
La fig. 4 muestra un caso similar en cuanto a las con



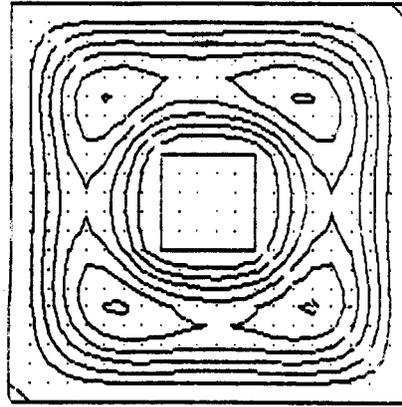
Gr=20000, tiempo=0.005
isotermas -1(.2)1



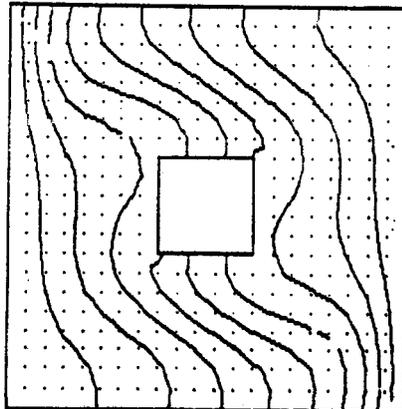
función de corriente .1(.2).9 y .8



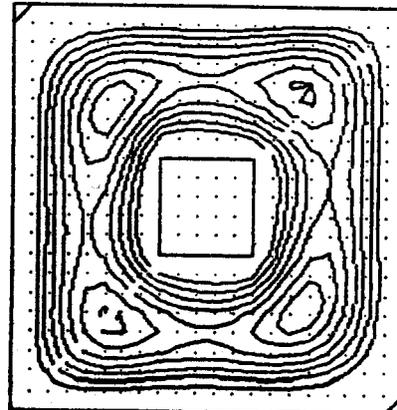
Gr=20000, tiempo=.075
isotermas -1(.2)1



función de corriente .25(.25)1.5

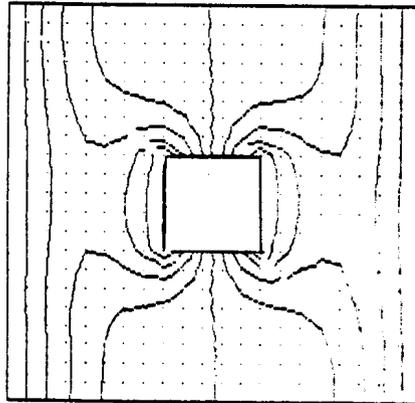


Gr=60000, tiempo=.05
isotermas -1(.2)1

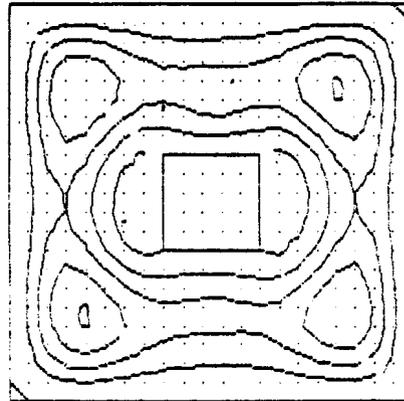


función de corriente 1(.5)3.5 y 3.9

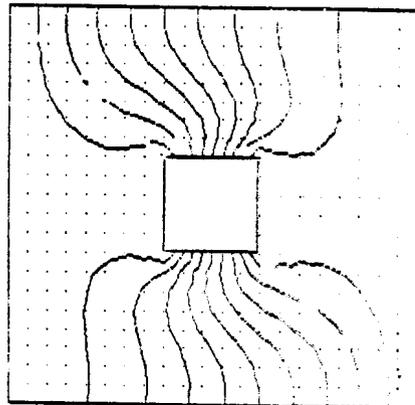
fig. 3



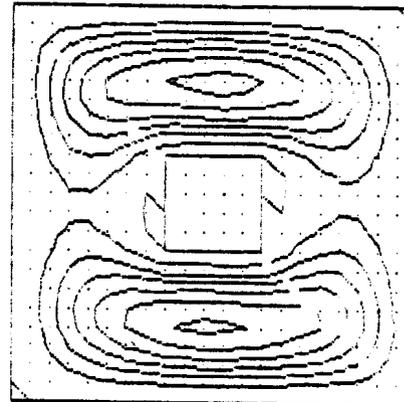
Gr=20000 tiempo=.01
isotermas -1(.2)1



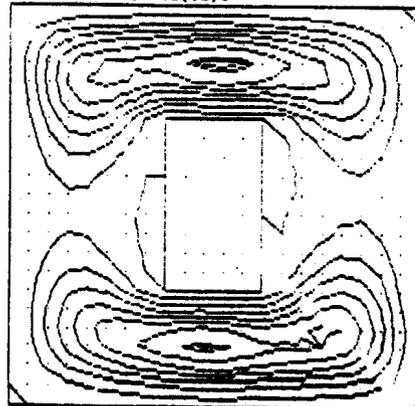
función de corriente .2(.2).8 y -.1



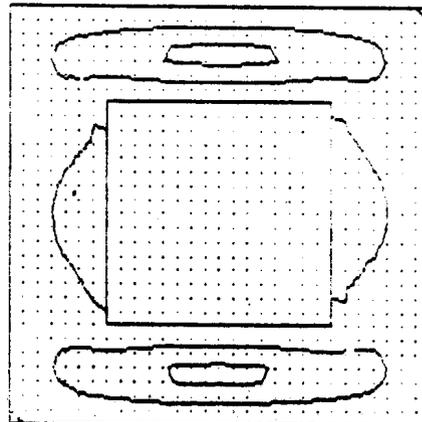
Gr=20000 tiempo=.1
isotermas -1(.2)1



función de corriente .25(.25)1.5 y 1.6

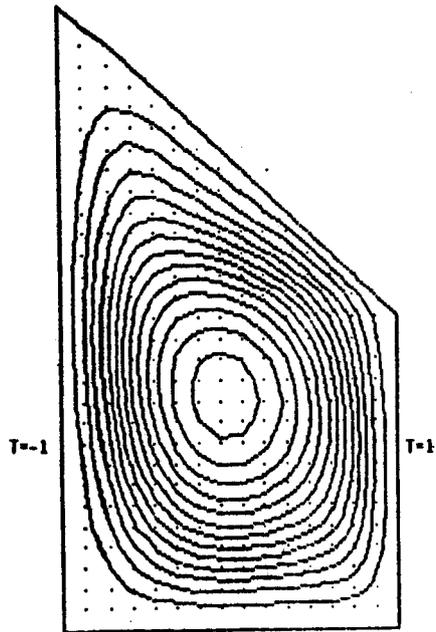


Gr=60000 tiempo=.075
función de corriente .25(.25)1.75 y 1.8.

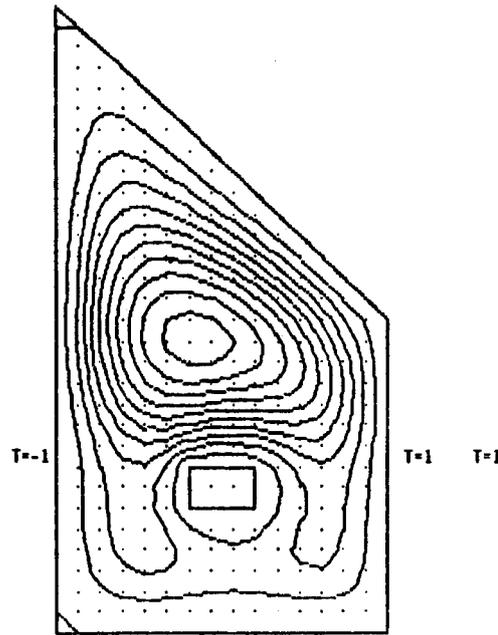


Gr=20000 tiempo=.025
función de corriente .1 y 2

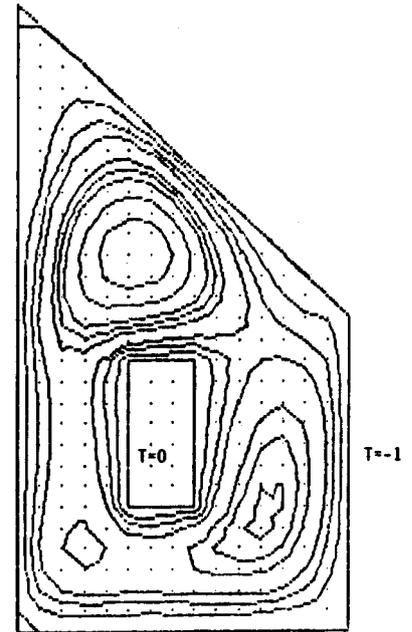
fig. 4



Gr=20000
 tiempo = .05
 función de corriente 1(1)13

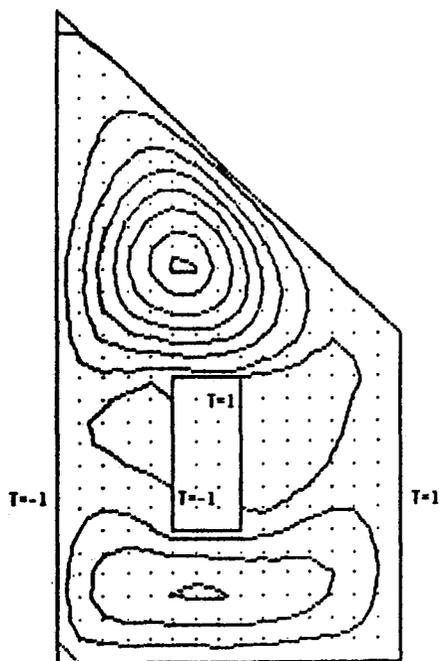


Gr=200000
 tiempo = .05
 función de corriente 1(1)10



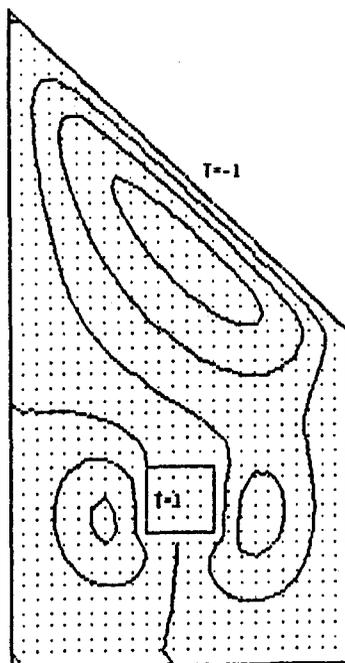
Gr=20000
 tiempo = .025
 función de corriente $-.5,-1(-1)-4,-4.5$

fig. 5



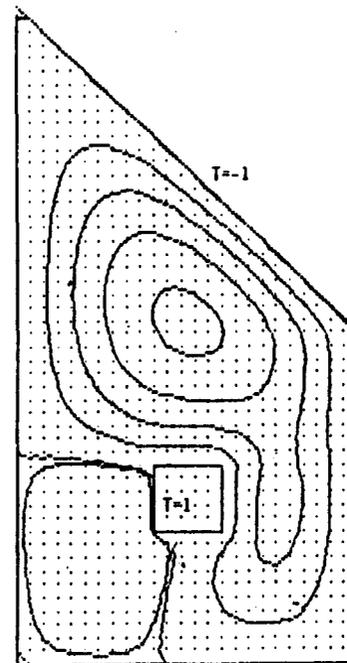
Gr=60000 , tiempo =.1

función de corriente -1(-2)-11 y -12



Gr=20000 , tiempo = .004

función de corriente -.1(.1).3



Gr=20000 , tiempo = .15

función de corriente -.01 .1(.1).4

fig. 6

diciones de borde de la cavidad. Las paredes del obstáculo interno tiene las mismas temperaturas que las paredes de la cavidad, y su techo y piso mantienen una variación lineal.

En este caso, el lazo convectivo inicialmente formado desaparece al poco tiempo.

En la fig. 5 se muestran situaciones con el borde oblicuo. En ellas, se aplica una diferencia de temperatura entre los lados de la cavidad, y techo y piso son adiabáticos. El obstáculo interno se mantiene a $T=0$ en los dos últimos casos.

En el primer caso mostrado en la fig. 6 se ha intentado promover la convección mediante temperaturas adecuadas en los bordes del obstáculo, sin obtener resultados positivos.

Los dos otros casos mostrados en la fig. 6 corresponden a una cavidad aislada salvo en el techo, con un obstáculo aislado en el techo. La diferencia de temperatura se establece entre el techo de la cavidad y el obstáculo a temperatura superior. Tampoco se establece el lazo convectivo alrededor del obstáculo.

CONCLUSION

Se desarrolló una serie de programas para simular la convección natural en cavidades trapezoidales simple o doblemente conexas

Se buscó configuraciones en las que se establecieran lazos convectivos alrededor de un obstáculo dentro de la cavidad, sin alcanzar resultados satisfactorios.

Se reconoce que este aparente fracaso puede deberse o a un deficiente conocimiento experimental de los modos en que se establece la convección en las cavidades analizadas, o a siempre posibles fallas en el método o la programación. La validación final será fruto de mayores esfuerzos.

REFERENCIAS

Cardón L., L. Saravia et. al. Generación de bajas temperaturas mediante radiación nocturna en la Zona Andina. Actas de la 8va Reunión de ASADES, Santa Rosa, 1983.

Wilkes J. O., S. W. Churchill. The finite-difference computation of natural convection in a rectangular enclosure. AICHE Journal Vol. 12, N°1, pag. 161-166.

Kublbeck K., G. P. Merker y J. Straub. Advanced numerical computation of two-dimensional time-dependent free convection in cavities. Int. J. Heat Mass Transfer and Fluid Flow, Vol 23, 1980, pag. 203-217.

Patankar S. V..Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.
Hemisphere,1980.

Guo K. L. y S. T. Wu. A numerical study of the natural
convection in a rectangle with various aspect ratios and
inclination angle for a solar energy system.Solar Engineering
Proceedings of the ASME Solar Energy Division.Sixth Annual
Conference,Las Vegas,1984.

Gadgil A. F. ,F. Bauman, R. Kammerud. Natural Convection
in passive buildings: experiments analysis and results.
Passive Solar Journal,Vol 1, January,1982.

Peyret R. y T. D. Taylor. Computational methods for fluid
flow.Springer-Verlag,1983.