

PREDICION POR MEDIO DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA Z  
DE FLUCTUACIONES DE TEMPERATURA Y PERDIDA DE CALIDAD  
EN ALIMENTOS ALMACENADOS BAJO REFRIGERACION

Viviana O. Salvadori  
Raúl O. Reynoso  
Rodolfo H. Mascheroni

Centro de Investigación y Desarrollo en Criotecología de  
Alimentos. Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacio-  
nal de La Plata.  
La Plata - Argentina.

RESUMEN

Se utilizan funciones de transferencia z para la predicción de la variación de la temperatura y pérdida de calidad en alimentos congelados almacenados en cámaras frigoríficas.

Los coeficientes de las funciones se obtienen por método numérico o experimentalmente utilizando una perturbación escalón o una doble rampa.

El cálculo de las temperaturas así como la predicción de pérdida de calidad se realiza por medio de un sencillo software. Se comparan los valores predichos contra los experimentales para estibas de baldes o de cajas, obteniéndose muy buena concordancia.

ABSTRACT

Transfer functions are used to predict temperature variation and quality loss in frozen foods stored in cold chambers.

Coefficients of the z functions are obtained by a numerical method or experimentally, using a stepwise or a double ramp type perturbation.

The calculation of temperatures, as well as the prediction of quality loss are performed using a special software. Calculated values are compared with those experimentally obtained for stacks of buckets or boxes, very good agreement being obtained.

## INTRODUCCION

El empleo de funciones de transferencia  $z$  permite resolver problemas lineales de transferencia de calor o materia multidimensionales, en los que debido a la complejidad de las condiciones de contorno y heterogeneidad de los materiales no se puede obtener la solución analítica.

En este trabajo se utilizan funciones de transferencia  $z$  para estudiar la respuesta térmica de estibas de alimentos congelados almacenados en cámaras frigoríficas a distintos tipos de fluctuaciones en la temperatura ambiente. Asimismo se relaciona la respuesta térmica en varios puntos de la estiba con ecuaciones que representan la cinética de pérdida de calidad con la temperatura y el tiempo, permitiendo predecir la evolución de la calidad para cada condición térmica ambiental.

Las funciones de transferencia se obtienen experimentalmente, midiendo la respuesta del sistema a una perturbación escalón en la temperatura del ambiente de refrigeración; y por métodos numéricos sólo la tarima de cajas, en que fue posible evaluar las propiedades térmicas efectivas del sistema.

El cálculo de respuestas térmicas y pérdida de calidad se realizó desarrollando un sencillo software general donde los coeficientes de las funciones, las constantes de la cinética de deterioro y la historia térmica del medio ambiente se incorporan como datos. Los valores de temperatura calculados por este método se correlacionan muy bien con los obtenidos en las determinaciones realizadas en una cámara de almacenamiento experimental.

## FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

### Teoría

Si el comportamiento del sistema en estudio está gobernado por una ecuación diferencial lineal, con condiciones iniciales nulas, podemos afirmar que el cociente entre la transformada de Laplace de la respuesta del sistema a una perturbación dada y la transformada de Laplace de dicha perturbación, es un invariante característico del sistema que se denomina función de transferencia  $F(s)$

$$F(s) = R(s)/P(s) \quad (1)$$

donde  $R(s)$  y  $P(s)$  son las transformadas de Laplace de las funciones temporales  $r(t)$  y  $p(t)$ .

Si sustituimos las funciones continuas  $p(t)$  y  $r(t)$  por las respectivas funciones muestreadas  $p^*(t)$  y  $r^*(t)$  la transformada de Laplace se denomina transformada  $z$ , que tiene la particularidad de poder evaluarse directamente conociendo los valores de la función a intervalos regulares de tiempo  $\Delta$  [1], [2], [3].

$$P(z) = p(0) + p(\Delta) z^{-1} + p(2\Delta) z^{-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p(i\Delta) z^{-i} \quad (2)$$

Expresando entonces la perturbación y la respuesta del sistema en función de sus transformadas  $z$ , obtendremos la función de transferencia  $z$  del sistema  $F(z)$

$$F(z) = \frac{r(0) + r(\Delta) z^{-1} + r(2\Delta) z^{-2} + \dots + r(n\Delta) z^{-n} + \dots}{p(0) + p(\Delta) z^{-1} + p(2\Delta) z^{-2} + \dots + p(n\Delta) z^{-n} + \dots} \quad (3)$$

Si para evaluar  $F(z)$  se utiliza como perturbación una doble rampa de ancho  $2\Delta$  y altura  $I$  obtenemos que:

$$P(z) = p(\Delta) z^{-1} = I z^{-1}$$

entonces:

$$F(z) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} r(n\Delta) z^{-n}}{I z^{-1}} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} + \dots \quad (4)$$

Los valores  $f_i$  se denominan coeficientes de la función de transferencia; y de la igualdad anterior surge que:

$$f_n = \frac{r((n+1)\Delta)}{I} \quad (5)$$

La definición según (1) es exacta. La aproximación según (2) a (5) introduce muy poco error siempre que el valor  $\Delta$  sea despreciable respecto de la duración total del fenómeno [3].

Conocida la función de transferencia, se puede calcular la respuesta del sistema  $S(z)$  frente a otra perturbación o entrada  $E(z)$ :

$$S(z) = S_0 + S_1 z^{-1} + S_2 z^{-2} + \dots + S_n z^{-n} + \dots \quad (6)$$

$$S(z) = F(z) \cdot E(z) \quad (7)$$

Igualando término a término las dos expresiones de  $S(z)$ :

$$S_n = f_0 e_n + f_1 e_{n-1} + \dots + f_n e_0 = \sum_{i=0}^n f_i e_{n-i} \quad (8)$$

y de acuerdo a lo expresado anteriormente, el coeficiente  $S_n$  es igual a la respuesta del sistema a  $t = n\Delta$ .

Respecto de la aplicación de funciones de transferencia  $z$  a este problema en particular, nuestro objetivo es caracterizar estibas de alimentos congelados almacenados en cámaras frías, a fin de predecir su comportamiento térmico. Aunque las propiedades térmicas del sistema dependen de la temperatura, podemos considerar con poco error, valores medios de las mismas para el rango de temperaturas de interés, y por lo tanto asumir que el sistema es lineal. Se estudian dos tipos de estibas: tarima de cajas de cartón y estiba tubular de baldes.

En general para estos sistemas la perturbación o entrada es la temperatura del aire que rodea al conjunto de cajas o baldes, y como respuesta se toma la temperatura en determinados puntos característicos del comportamiento del conjunto.

En el caso de la tarima o pallet la función de transferencia se puede determinar experimentalmente o numéricamente; para los baldes sólo cabe la solución experimental.

Obtención de los coeficientes de  $F(z)$

La función de transferencia se determinó numéricamente, sólo para el pallet de cajas, y experimentalmente para ambas estibas.

Coefficientes numéricos: A través de un método numérico se resuelve el balance diferencial de energía térmica,

$$\frac{\delta T}{\delta t} = \alpha \nabla^2 T \quad (9)$$

considerando transferencia en las tres direcciones ortogonales. Inicialmente todo el sistema se supone a temperatura uniforme  $T_i$

Las condiciones de contorno serán:

$$-k \frac{\delta T}{\delta x} = h_x (T - T_{ext}) \quad x=L_x; \quad \frac{\delta T}{\delta x}=0 \quad x = -L_x \quad (10)$$

$$-k \frac{\delta T}{\delta y} = h_y (T - T_{ext}) \quad y=L_y; \quad \frac{\delta T}{\delta y}=0 \quad y = -L_y \quad (11)$$

$$-k \frac{\delta T}{\delta z} = h_z (T - T_{ext}) \quad z=L_z; \quad \frac{\delta T}{\delta z}=0 \quad z = -L_z \quad (12)$$

El origen de coordenadas se toma en el centro del paralelepípedo;  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_z$  son las semilongitudes de los ejes principales,  $k$  la conductividad térmica,  $h_x$ ,  $h_y$  y  $h_z$  los coeficientes de transferencia calórica;  $T_{ext}$  la temperatura del medio externo, que varía de acuerdo a:

$$T_{ext} = \begin{cases} T_i & t \leq 0 \text{ y } t \geq 2 \\ T_i + \frac{I}{\Delta} t & 0 \leq t \leq \Delta \\ T_i + 2I - (I/\Delta) t & \Delta \leq t \leq 2 \end{cases} \quad (13)$$

La ecuación diferencial (9) con las respectivas condiciones de contorno (10) a (12) fue resuelta empleando un método numérico de diferencias finitas explícitas, ya que en trabajos previos [3], [4] se ha demostrado que estos tienen una precisión comparable a los métodos implícitos, con menores complicaciones de programación y necesidad de memoria de computadora.

El programa de cálculo se implementó en lenguaje FORTRAN en una computadora IBM serie 1, utilizando una grilla de 13 x 9 x 9 puntos y un intervalo de tiempo de 30 s.

Para simular las medidas experimentales se consideró un paralelepípedo de carne vacuna picada;  $L_x = 29$  cm,  $L_y = 19$  cm,  $L_z = 7.5$  cm. Los valores de los coeficientes de transferencia (calculados a partir de las velocidades del aire sobre las caras de las cajas durante las experiencias) fueron  $h_x = h_y = 3.50$  W/m<sup>2</sup>K,  $h_z = 5.00$  W/m<sup>2</sup>K.

Resuelto el balance de energía, y considerando los valores de T en 5 puntos ubicados sobre una diagonal de la caja, se calculan los coeficientes de la función de transferencia, teniendo en cuenta que:

$$r(t) = T(t) - T_i$$

$$f_n = \frac{T((n+1)\Delta) - T_i}{I} \quad (14)$$

Coefficientes experimentales: Se determinó F(z) utilizando una perturbación escalón en lugar de la doble rampa, debido a las limitaciones de control del equipo experimental.

En sistemas lineales la derivada de la respuesta al escalón es igual a la respuesta a una señal impulso. Asimismo la señal doble rampa puede asimilarse a un impulso cuando se trabaja con  $\Delta$  pequeños.

Podemos entonces calcular los coeficientes  $f_1$  derivando la respuesta medida  $u(t)$  respecto del tiempo.

$$r(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (15)$$

Solo se dispone de los valores de  $u(t)$  a  $t = n\Delta$  por lo que el cálculo de la derivada se realiza de la siguiente manera:

$$r(n\Delta) = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=n\Delta} = \frac{u((n+1)\Delta) - u((n-1)\Delta)}{2} \quad (16)$$

donde  $u(n\Delta) = T(n\Delta) - T_i$ ;  $T(n\Delta)$  es la temperatura medida en donde se evalúa F(z) a  $t = n\Delta$ .

Si la altura del escalón es  $E = T_{aire} - T_i$ , entonces  $I = E/\Delta$ .

Los coeficientes de F(z) se calculan con la siguiente expresión:

$$f_n = \frac{T((n+1)\Delta) - T((n-1)\Delta)}{2E} \quad (17)$$

### MEDIDAS EXPERIMENTALES

Se estudió experimentalmente el comportamiento de dos estibas de alimentos congelados, almacenados en una cámara frigorífica.

A continuación se describen ambas estibas:

a) Se construyó un pallet estándar, de base rectangular de 1.00 x 1.20m y 1,35 m de altura. Tal como puede verse en la fig. 1a se colocaron 5 cajas de cartón por nivel que contenían carne vacuna picada. Las dimensiones de cada caja son: 0.58 x 0.38 x 0.15 m. Para realizar las mediciones se selecciona una de las cajas ubicada en un vértice superior del pallet (punteada en la Fig. 1a) ya que es la que presenta una mayor superficie expuesta al flujo de calor, y por consiguiente, será la más afectada por las fluctuaciones de la temperatura del ambiente refrigerado.

Mediante un adquisidor del datos DATALOGGER-FLUKE se midió y registró la temperatura en 5 puntos de la caja seleccionada (ubicados sobre una diagonal de la misma) y la temperatura del aire en las inmediaciones de la caja.

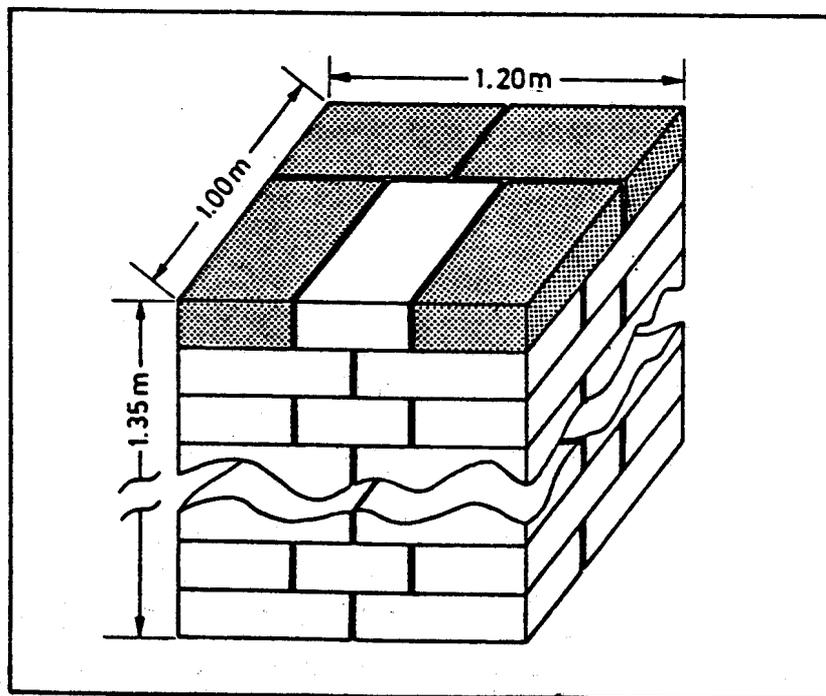


Fig. 1a. Pallet de cajas

b) Se implementó una estiba tubular de baldes. Estos eran similares a los empleados para el almacenamiento de frutillas y frambuesas congeladas, cremas heladas, etc. Se colocaron 64 baldes en 4 niveles de 16 baldes cada uno. Cada balde contenía 8 l de agua, de modo de obtener una capacidad térmica similar a la de los productos mencionados.

Al igual que en el caso anterior, para medir la respuesta del sistema, se selecciona un balde ubicado en un extremo superior de la estiba. En ambos casos, se midió la respuesta del sistema a un escalón en la temperatura del aire; con tal respuesta se calcularon los coeficientes de la función de transferencia según (17).

Para el pallet se tomó  $T_i = -28^{\circ}\text{C}$  y  $T_{\text{aire}} = -20.3^{\circ}\text{C}$ ; y para la estiba de baldes  $T_i = -32.7^{\circ}\text{C}$  y  $T_{\text{aire}} = -14.3^{\circ}\text{C}$ . Además se registró la respuesta de ambos sistemas a una perturbación seno exponencial, similar a los ciclos térmicos del aire de las cámaras frigoríficas; la que se utilizó luego para evaluar la validez del método de predicción presentado. El intervalo de muestreo  $\Delta t$  fue de 15 min para el pallet y 10 min para los baldes.

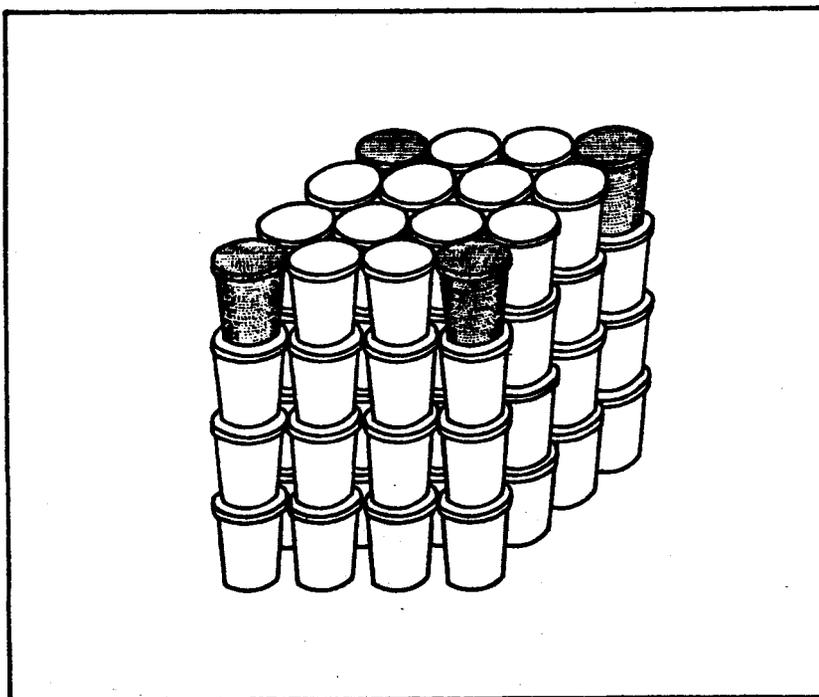


Fig. 1b. Estiba tubular de baldes

## RESULTADOS

En las figs. 2 y 3 se muestran los valores de los coeficientes de la función de transferencia  $z$ , teóricos y experimentales, correspondientes al centro y al ángulo superior externo de la caja del pallet estudiado. La diferencia observada entre los coeficientes teóricos y experimentales se debe a que experimentalmente no fue posible mantener constante la temperatura del aire que presentó oscilaciones de hasta  $\pm 1.1^\circ\text{C}$  sobre el valor promedio usado en el cálculo, ya que el control de la cámara se realizó en forma manual. Sin embargo puede apreciarse que ambos coeficientes presentan igual forma de variación, y en promedio, coinciden entre ellos.

En la fig. 4 se muestran los coeficientes experimentales correspondientes al centro y a un punto situado sobre la periferia, de uno de los baldes más expuestos de la estiba. En este caso no fue posible obtener los coeficientes teóricos ya que debido a la geometría, el sistema es muy difícil de modelar.

Caracterizados ambos sistemas a través de las respectivas funciones de transferencia, es posible predecir su comportamiento frente a una dada perturbación en la temperatura del aire. A modo de ejemplo, en las figs. 5, 6, 7 y 8 se muestra la respuesta de ambas estibas, tanto la experimental como la calculada, cuando se provoca una variación de la temperatura del aire similar a los ciclos térmicos de las cámaras frigoríficas.

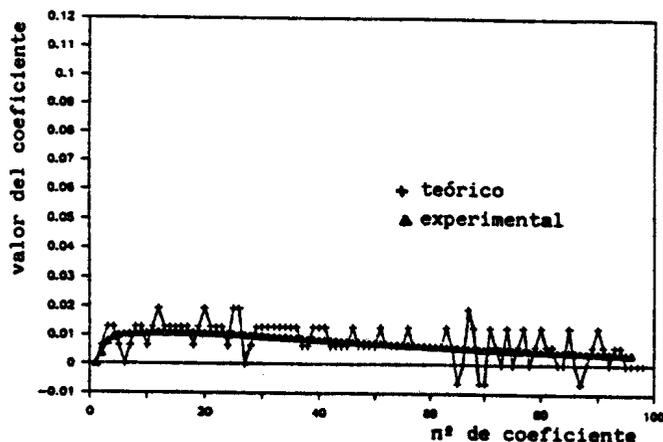


Fig. 2. Coeficientes de la función de transferencia correspondientes al centro de la caja.

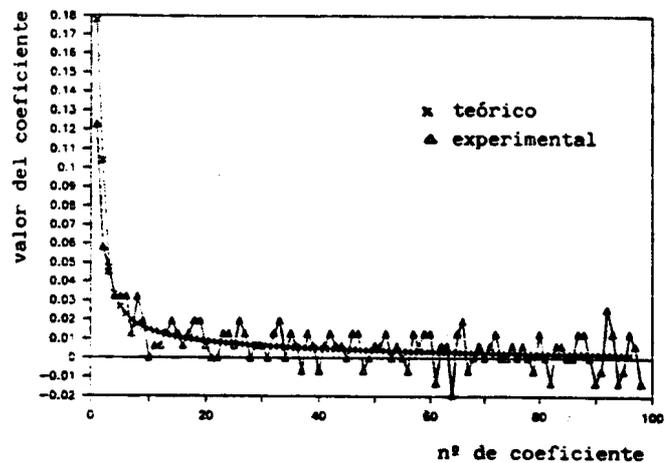


Fig. 3. Coeficientes de la función de transferencia correspondientes al ángulo superior externo de la caja.

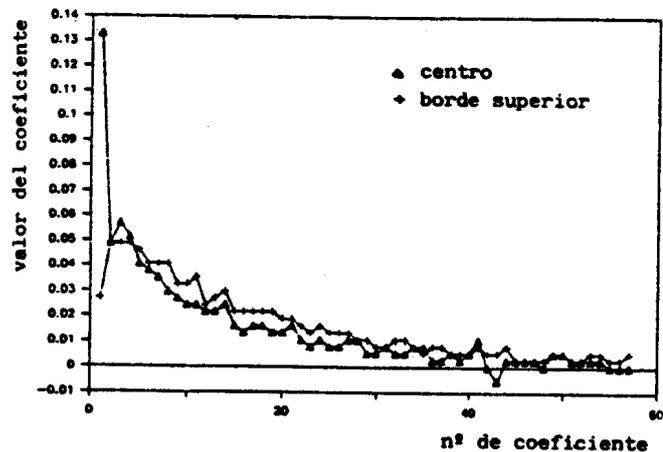


Fig. 4. Coeficientes de la función de transferencia correspondientes al centro y al borde superior externo del balde.

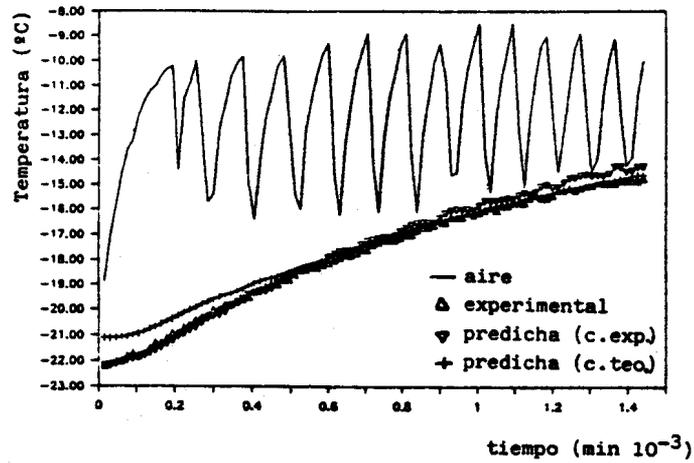


Fig. 5 Comparación de las respuestas a una señal seno exponencial, en el centro de la caja.

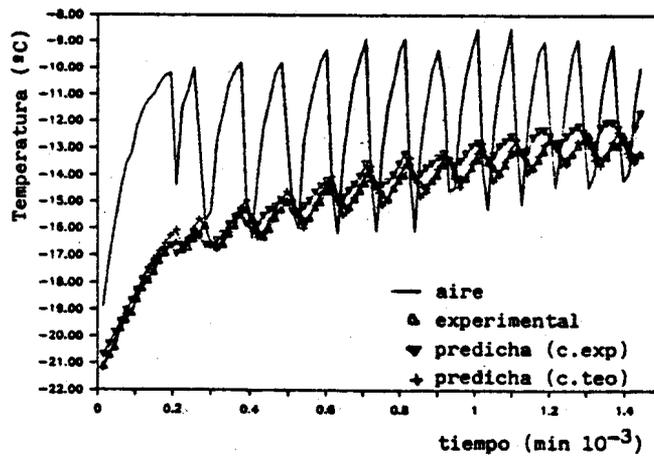


Fig. 6. Comparación de las respuestas a una señal seno exponencial, en el ángulo superior externo de la caja.

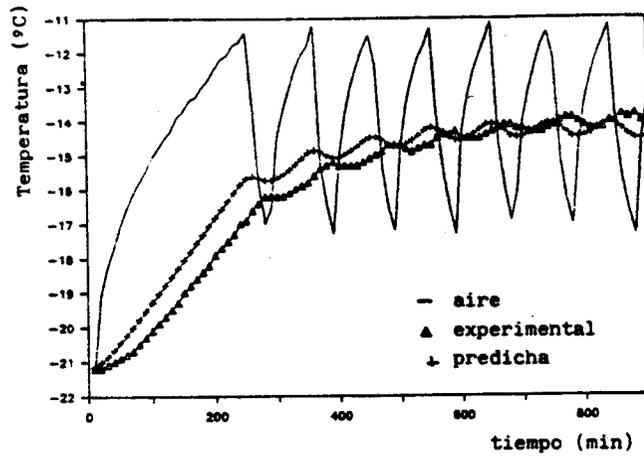


Fig. 7. Comparación de las respuestas a una señal seno exponencial, en el centro del balde.

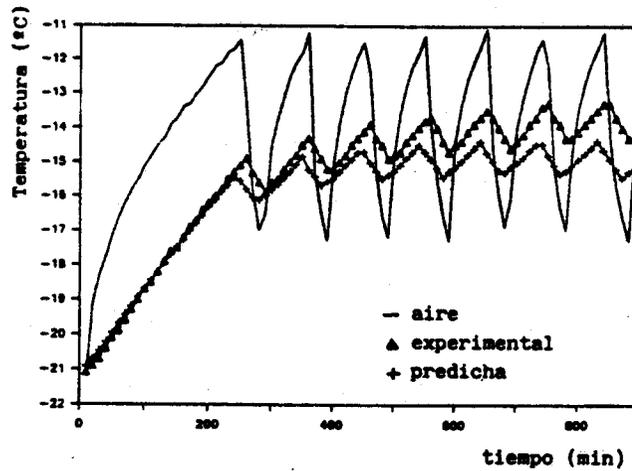


Fig. 8. Comparación de las respuestas a una señal seno exponencial, en el borde superior externo del balde.

Para el pallet de cajas podemos observar que la predicción de la historia térmica es muy buena, cuando se utilizan coeficientes experimentales o teóricos. Para la estiba de baldes se observa una leve diferencia entre el valor experimental y el predicho, que es mayor a tiempos mayores. Esto se debe principalmente a que sólo se obtuvieron 57 coeficientes y se calcula la respuesta a tiempos mayores que 570 min. En estos casos sólo se toma en cuenta la influencia de los últimos 570 minutos de variación de la temperatura externa, despreciándose la de tiempos anteriores a este lapso.

Como cálculo adicional, conociendo la respuesta térmica del sistema se puede evaluar la pérdida de calidad del alimento, luego de ser sometido a determinada fluctuación del ambiente. Si admitimos que se puede representar el deterioro por una ecuación cinética del tipo de orden cero:

$$\frac{dA}{dt} = k = k_0 \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right) \quad (18)$$

y conocemos los valores de energía de activación  $E_a$ , y factor preexponencial  $k_0$ , entonces la ecuación (18) se puede integrar numéricamente para una dada  $T(t)$ .

Dicho cálculo se realizó para el pallet de cajas, con  $k_0 = 5.25 \cdot 10^4 \text{ min}^{-1}$  y  $E_a = 11.87 \text{ kcal/mol}$  de acuerdo a datos de bibliografía para carnes vacunas picadas [5].

Utilizando la respuesta del ángulo superior de la caja, que es el punto más afectado por la perturbación del ambiente, presentada en la fig. 6, se calculó la calidad final  $A_f$ , admitiendo un valor inicial del 100 %. En este caso  $A_f = 99 \%$ , lo que representa que la pérdida de calidad para dicho ciclo no es significativa, debido principalmente a que se trata de un ciclo de 24 horas de duración cuando el producto involucrado tiene una vida útil de varios meses, a temperatura constante. Sin embargo el efecto de fluctuaciones de este tipo acumulado en el tiempo de almacenamiento puede ser importante.

#### CONCLUSIONES

El método presentado permite la predicción, con muy buena precisión, de la evolución térmica de sistemas que involucran transmisión de calor en varias dimensiones. Este tipo de problemas en muy difícil de resolver cuando no imposible, mediante otros métodos.

Simula muy bien la respuesta a oscilaciones mucho más amplias y de mayor frecuencia que las habituales en cámaras de almacenamiento. Para las condiciones reales, donde las oscilaciones de la temperatura ambiente son más leves, la precisión será mayor.

Su principal desventaja es la necesidad de realizar experiencias, a veces de larga duración, para evaluar la función de transferencia. Sin embargo con sólo una de estas experiencias es posible caracterizar al

sistema y predecir su respuesta ante cualquier perturbación.

La evaluación de los coeficientes de la función de transferencia se realizó mediante la implementación de un programa de cálculo que requiere el uso de muy cortos tiempos de máquina, muy inferiores a los usados por todos los métodos de predicción conocidos.

#### REFERENCIAS

- [1] Sanz, P.D., "Análisis de las Funciones de Transferencia para la Resolución de Problemas de Transmisión de Calor en Régimen Variable en Cámaras Adiabáticas y de Régimen Controlado". Tesis Doctoral, Universidad Complutense, Madrid, 1984.
- [2] Sanz, P.D., Mascheroni, R.H., Domínguez, M. y García de Vinueva, S., "Time-Temperature Prediction Curves of Foodstuffs by Means of the Z-Transfer Function Method", Int. J. Refrig., Vol. 9, 1986, (2), págs. 89-92.
- [3] Mascheroni, R.H., "Predicción de Historias Térmicas Durante la Transmisión de Calor en más de una Dirección Empleando Funciones de Transferencia Obtenidas Numéricamente". Mecánica Computacional, Vol. I, 1985, págs. 387-400.
- [4] Mascheroni, R.H., "The Utilization of Numerical Methods for the Solution of the Heat Balance During the Thawing of Meat Blocks Under Industrial Conditions". Lat. Am. J. Heat Mass Transf., Vol. 6, 1982 (1/2), págs. 13-29.
- [5] Labuza, T.P., "Shelf-Life Dating of Foods". Food and Nutrition Press Inc., 1982.