

## MODELO PARA COMPUESTOS LAMINADOS REFORZADOS CON FIBRAS

Bibiana M. Luccioni\*

\* CONICET,  
Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán  
Av. Roca 1800, 4000 San Miguel de Tucumán, Tucumán  
e-mail: bluccioni@herrera.unt.edu.ar

**Key words:** Compuestos laminados, fibras, modelo constitutivo, plasticidad, elementos finitos

**Abstract.** *En los últimos años, los materiales compuestos han reemplazado progresivamente a los materiales tradicionales en una amplia variedad de aplicaciones. Dentro de los compuestos, es de especial interés el caso de los materiales laminados compuestos por láminas con fibras unidireccionales dispuestas en distintas direcciones. Para el adecuado diseño de piezas constituidas por estos materiales, se requiere disponer de modelos que permitan evaluar su rigidez y resistencia.*

*En este trabajo se presenta un modelo general para compuestos formados por láminas reforzadas con fibras. El modelo se obtiene de una generalización de la teoría de mezclas clásica, teniendo en cuenta la participación en la deformación y tensión del compuesto de cada una de las componentes en sus direcciones principales de simetría.*

*Las ecuaciones constitutivas del compuesto resultan de la combinación de las ecuaciones constitutivas de las láminas que, a su vez, se obtienen de la combinación de fibras y matriz. El modelo desarrollado permite considerar a cada una de las componentes con un modelo elastoplástico anisótropo general.*

*En el trabajo se describen las hipótesis básicas de la teoría de compuestos propuesta y las distintas etapas en la obtención del modelo final. Se presenta, además, un algoritmo para la implementación numérica en un programa de elementos finitos 3D no lineal. El trabajo se completa con ejemplos de aplicación y comparación de resultados con resultados experimentales. Los mismos muestran la capacidad del modelo propuesto para simular el comportamiento rigidez y resistencia de compuestos laminados de distintos tipos de materiales y estructuras.*

## 1 INTRODUCCION

Indudablemente los materiales laminados reforzados con fibras han ganado reconocimiento como una alternativa de sustitución de materiales metálicos en una amplia variedad de aplicaciones. Es por ello que se requieren modelos predictivos que contemplen la rigidez y resistencia de este tipo de materiales y que puedan ser aplicados a situaciones reales sin la necesidad de determinar numerosas constantes empíricas.

El análisis de compuestos laminados puede iniciarse a diferentes niveles. La mayoría de los métodos de diseño toman a las láminas como bloques elementales (meso-modelos) e intentan utilizar datos obtenidos a partir de ensayos simples, realizados sobre láminas aisladas, para predecir el comportamiento del laminado completo. Las láminas están generalmente reforzadas con fibras unidireccionales continuas.

Una alternativa distinta consiste en comenzar el análisis a nivel constitutivo (micro-modelos) y usar datos experimentales de las propiedades de los materiales de las fibras y de la matriz para predecir el comportamiento de las láminas individuales, luego el laminado y finalmente la estructura. Si resulta satisfactorio, este enfoque tiene la ventaja potencial de permitir al diseñador predecir los efectos de cambios de material, sin necesidad de disponer de ensayos de láminas. Sin embargo, requiere un conjunto adicional de cálculos y la consiguiente posibilidad de introducción de errores en la predicción de las propiedades de las láminas.

Se han hecho varios intentos para reproducir micro-mecánicamente la falla de compuestos reforzados con fibras. En general, las teorías desarrolladas son muy complicadas o cuando son simples, sólo logran reproducir algunos aspectos del comportamiento en la dirección longitudinal de las fibras o son válidas únicamente para compuestos en los que la rigidez y resistencia de las fibras son significativamente mayores que las de la matriz<sup>1</sup>.

Recientemente, se organizó un ejercicio de falla<sup>2-6</sup> para proveer una descripción de las teorías de falla existentes para laminados poliméricos reforzados con fibras y comparar su capacidad predictiva con resultados experimentales. Los resultados de ese ejercicio<sup>7-10</sup> permitieron evaluar las capacidades y debilidades de las distintas teorías actualmente disponibles.

Los enfoques que demostraron mejor comportamiento son las teorías de Zinoviev, Bogetti, Puck, Cuntze y Tsai<sup>10</sup>. Estas teorías son representativas de cinco diferentes enfoques. El único de ellos que emplea, hasta cierto punto, un enfoque micro-mecánico es el modelo de Tsai.

Zinoviev<sup>11,12</sup> usa el criterio de falla de la máxima tensión con un cuidadoso análisis post-falla. Supone que el comportamiento es lineal elástico hasta la falla inicial pero incluye una continua corrección del cambio de orientación de las fibras durante la carga.

Bogetti<sup>13</sup> usa una forma tridimensional del criterio de falla de la máxima deformación y un análisis de falla progresiva simple.

Tsai<sup>14,15</sup> emplea el conocido criterio de falla interactivo de Tsai-Wu que no identifica explícitamente el mecanismo de falla. Supone comportamiento lineal elástico con reducción de la rigidez inicial después de la falla inicial.

Las teorías utilizadas por Puck<sup>16,17</sup> y Cuntze<sup>18</sup> consideran mecanismos de falla tridimensional con cierto grado de detalle y aplican análisis no lineal para predecir la falla

progresiva. El enfoque de Cuntz es similar al de Puck en ciertos aspectos pero supone interacción entre modos de falla debido a efectos probabilísticos. Estas dos teorías produjeron el mayor número de predicciones acertadas (dentro del 10% de los valores medidos) y capturaron mayor cantidad de aspectos del comportamiento experimental de los laminados que las otras teorías.

En este trabajo se presenta un modelo para materiales compuestos en general<sup>19</sup>, adecuado para el tratamiento de compuestos laminados cuyas láminas están formadas, a su vez, por una matriz reforzada con fibras largas. El modelo está basado en un análisis micro-mecánico que permite obtener, en primer lugar, el comportamiento de las láminas a partir de las propiedades mecánicas de la matriz y de las fibras y de su disposición. Luego se puede obtener el comportamiento del laminado componiendo láminas que pueden tener las fibras con orientaciones cualesquiera. El modelo es general y puede ser aplicado a otro tipo de compuestos. Como caso particular, se puede obtener la teoría de mezclas y otras teorías de compuestos.

El modelo se basa en hipótesis cinemáticas y de equilibrio muy simples que, manejadas adecuadamente, permiten obtener la ecuación constitutiva del compuesto y conocer las deformaciones y tensiones de cada una de las componentes. De esta manera, se pueden evaluar las propiedades elásticas de las láminas y el laminado, estudiar el comportamiento no lineal y la falla progresiva del compuesto y obtener envolventes de falla identificando los distintos modos de falla.

Cada componente puede tener un modelo constitutivo elastoplástico anisótropo cualquiera. De este modo se puede reproducir aproximadamente el comportamiento de las matrices y fibras más usuales en el tipo de materiales compuestos en estudio.

## **2 MODELO PROPUESTO**

### **2.1 Introducción**

Este modelo supone que el compuesto puede descomponerse sucesivamente en sub-compuestos, hasta llegar a compuestos simples en los que puedan plantearse hipótesis cinemáticas y de equilibrio entre componentes sencillas. Básicamente, en ese compuesto se debe poder identificar cuáles componentes de deformación son comunes a todas sus constituyentes, lo que normalmente se identifica como comportamiento en paralelo, y cuáles componentes de tensión son comunes a todas sus componentes, lo que normalmente se identifica como comportamiento en serie.

Generalmente, para llegar a poder establecer estas hipótesis es necesario descomponer el compuesto en varias etapas. Básicamente, en el caso de un compuesto laminado formado por láminas con fibras unidireccionales se requeriría separar el mismo en láminas y analizar en primer lugar las láminas. Se verá más adelante, en los ejemplos de aplicación, que aún el análisis de una lámina con precisión requiere más de una descomposición.

Claro está que el mismo modelo puede ser utilizado como un enfoque meso-mecánico en donde los datos de partida, son las propiedades mecánicas y modelos constitutivos de las

láminas que forman el laminado, con lo cual se reduce considerablemente el volumen de cálculo.

## 2.2 Modelo constitutivo de las componentes

Es conocido que las fibras presentan un comportamiento marcadamente anisótropo, generalmente se considera transversalmente isótropo, caracterizado no sólo por su ortotropía elástica, como en el caso de las fibras de carbono, sino también por la marcada diferencia de resistencia en sus direcciones principales. Otra característica importante del comportamiento de las fibras es que presentan una resistencia a compresión levemente inferior a la resistencia a tracción.

En el caso de las matrices poliméricas, si bien el material en sí es aproximadamente isótropo, si se considera dentro del compuesto y se quiere tener en cuenta dentro de él la presencia de la interfaz fibra/matriz, se debe admitir que su resistencia a tracción en la dirección perpendicular a las fibras es mucho menor que en la dirección longitudinal. En general, las resinas epoxy son materiales con resistencia a tracción menor que a compresión, como los materiales estructurales frágiles.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se supone que cada una de los materiales componentes básicos del compuesto responde a un modelo elastoplástico ortótropo general, con lo cual se logra reproducir aproximadamente el comportamiento de fibras y matrices.

El modelo parte de la hipótesis de que existen dos espacios<sup>20-22</sup>: a) Un espacio anisótropo real y b) un espacio ficticio isótropo. El problema se resuelve en el espacio isótropo ficticio lo que permite utilizar modelos elastoplásticos desarrollados para materiales isótropos.

Los tensores de tensión en ambos espacios están relacionados mediante una transformación del tipo:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p) : \boldsymbol{\sigma} \quad (1)$$

Donde:  $\boldsymbol{\tau}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  son los tensores de tensión en los espacios (a) y (b) respectivamente y  $\mathbf{A}$  es un tensor de transformación de cuarto orden, que contiene la información sobre la anisotropía de resistencia. En el caso más general, este tensor es función del tipo de estado tensional y de la evolución del proceso elastoplástico a través de la variable de daño plástico  $\kappa^p$ <sup>23</sup>, que hace las veces de variable de endurecimiento plástico isótropo.

El modelo utilizado es termodinámicamente consistente y está basado en la hipótesis de elasticidad desacoplada. De acuerdo a esta hipótesis, la energía libre puede suponerse formada por dos partes independientes: una parte elástica  $\Psi^e$  y una parte plástica  $\Psi^p$ .

$$\Psi = \Psi^e + \Psi^p \quad \Psi^e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2)$$

Donde  $\mathbf{C}$  es el tensor de rigidez y  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  el tensor de deformaciones elásticas

La ecuación constitutiva secante puede escribirse en términos de la energía libre como

sigue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3)$$

El umbral de comienzo de comportamiento plástico se define mediante una función de fluencia:

$$F(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\alpha}) = \bar{F}(\boldsymbol{\tau}; \bar{\boldsymbol{\alpha}}) = 0 \quad (4)$$

Donde:  $F$  y  $\bar{F}$  designan las funciones de fluencia en los espacios anisótropo real e isótropo ficticio, y  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  son variables internas correspondientes a dichos espacios.

La transformación de espacios definida por la ecuación (1) permite utilizar funciones de fluencia  $\bar{F}$  definidas para materiales isótropos en el espacio isótropo ficticio. Debe notarse, que dicho espacio es isótropo en cuanto a umbrales de comportamiento plástico, pero no necesariamente respecto a otras propiedades, como la rigidez elástica, por ejemplo.

La deformación plástica en el espacio real, se calcula mediante la regla del flujo:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5)$$

Donde  $G$  es la función de potencial definida en el espacio de tensiones reales. En lugar de trabajar con esta función, que debe ser anisótropa, se puede trabajar con una función de potencial  $\bar{G}$ , definida en el espacio isótropo ficticio tal que:

$$G(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \bar{G}(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) \quad (6)$$

La ecuación (5) se escribe entonces:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{H} = \dot{\lambda} \mathbf{H} \quad \text{con} \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (7)$$

### 2.3 Hipótesis cinemáticas y de equilibrio

Si se analiza un compuesto sencillo se puede identificar en el mismo algunas direcciones en que las distintas componentes tienen la misma deformación (comportamiento en paralelo) y otras en las que las componentes tienen la misma tensión (comportamiento en serie).

En base a este análisis, se reordenan las componentes de tensión y deformación de las componentes de manera de tener un tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  en el que están aquellas componentes de tensión y deformación que luego serán comunes en el compuesto y en otro tensor  $\boldsymbol{\sigma}^*$  aquellas componentes de tensión o deformación que serán el resultado de la superposición de las de todas las componentes multiplicadas por sus respectivas participaciones de volumen.

Para acomodar de esta manera las componentes se definen los siguientes tensores:

$$\begin{aligned}\alpha_{ijkl}^{\sigma} &= \delta_{ir} \delta_{js} \delta_{kr} \delta_{ls} H(p_{rs}) \\ \alpha_{ijkl}^{\varepsilon} &= \delta_{ik} \delta_{jl} - \alpha_{ijkl}^{\sigma}\end{aligned}\quad (8)$$

$H$ : función escalón

$$p_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si la componente rs trabaja en paralelo} \\ 0 & \text{si la componente rs trabaja en serie} \end{cases}$$

Las componentes de tensión y de deformación se reordenan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^* &= \boldsymbol{\alpha}^{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}^{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} & \text{y también vale que} & \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\alpha}^{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\alpha}^{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* &= \boldsymbol{\alpha}^{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha}^{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} & & \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\alpha}^{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\alpha}^{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^*\end{aligned}\quad (9)$$

El tensor  $\boldsymbol{\sigma}^*$  es tal que, referido direcciones locales del material (fibra, lámina, etc.) tiene componentes de tensión en correspondencia con aquellas direcciones en las que trabaja en paralelo y deformaciones totales en aquellas direcciones en las que trabaja en serie.

De manera análoga el tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  es tal que, referido direcciones locales del material (fibra, lámina, etc.), tiene componentes de deformaciones totales en correspondencia con aquellas direcciones en las que trabaja en paralelo y tensión en aquellas direcciones en las que trabaja en serie.

#### 2.4 Forma alternativa de escribir las ecuaciones constitutivas de las componentes

Se propone una forma alternativa de expresar las ecuaciones constitutivas elastoplásticas de las componentes, que luego permite encontrar el comportamiento del compuesto en forma sencilla, haciendo hipótesis similares a la de teoría de mezclas clásica<sup>24</sup>.

Combinando las ecuaciones (3) y (9) se puede llegar a la siguiente relación constitutiva secante:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\sigma}^{p*} \quad (10)$$

Donde:

$$\mathbf{C}^* = (\boldsymbol{\alpha}^{\sigma} : \mathbf{C} + \boldsymbol{\alpha}^{\varepsilon}) : (\boldsymbol{\alpha}^{\varepsilon} : \mathbf{C} + \boldsymbol{\alpha}^{\sigma})^{-1} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{p*} = (\mathbf{C}^* : \boldsymbol{\alpha}^{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}^{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (12)$$

#### 2.5 Ecuación constitutiva del compuesto

En primer lugar, se analiza un compuesto simple formado por n componentes en las que las direcciones principales del material y los tensores  $\boldsymbol{\alpha}^{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\alpha}^{\varepsilon}$  son idénticos. En ese compuesto se verifica que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^* = \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (13)$$

Donde c indica una componente cualquiera.

Si se designa con  $k_c$  la proporción de volumen de una componente genérica y se admite, además, que, en aquellas componentes que trabajan en serie, la deformación plástica del compuesto es la suma de las deformaciones plásticas de las componentes multiplicadas por sus respectivas participaciones de volumen, resulta:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\sigma}^{p*} \quad (14)$$

Con:

$$\mathbf{C}^* = \sum k_c \mathbf{C}_c^* \quad \boldsymbol{\sigma}^{p*} = \sum k_c (\mathbf{C}_c^* : \boldsymbol{\alpha}^\sigma - \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : \boldsymbol{\varepsilon}_c^p \quad (15)$$

Utilizando las ecuaciones (9) se puede calcular la tensión como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^p \quad (16)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= (\boldsymbol{\alpha}^\sigma : \mathbf{C}^* + \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : (\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \mathbf{C}^* + \boldsymbol{\alpha}^\sigma)^{-1} \\ \boldsymbol{\sigma}^p &= -\mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}^{p*} + \boldsymbol{\alpha}^\sigma : \boldsymbol{\sigma}^{p*} = (\boldsymbol{\alpha}^\sigma - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : \boldsymbol{\sigma}^{p*} \end{aligned} \quad (17)$$

A los efectos de la implementación numérica en un programa de elementos finitos, resulta conveniente encontrar una relación entre la deformación de cada una de las componentes y la deformación del compuesto. De esta manera, una vez obtenida la deformación de cada componente, se puede integrar independientemente las ecuaciones constitutivas correspondientes y llevar cuenta de los estados tensionales a nivel micro-mecánico.

Partiendo de la condición (13) y las ecuaciones (9) y (16) se puede escribir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \boldsymbol{\phi}_c : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p \quad (18)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_c &= (\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \mathbf{C}_c^* + \boldsymbol{\alpha}^\sigma) : (\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \mathbf{C}^* + \boldsymbol{\alpha}^\sigma)^{-1} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^p &= \boldsymbol{\phi}_c : \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}^{*p} - \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon : \boldsymbol{\sigma}_c^{*p} \end{aligned} \quad (19)$$

El tensor elastoplástico tangente se obtiene derivando la ecuación (16)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^p = \mathbf{C}^T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (20)$$

Donde

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C} - (\boldsymbol{\alpha}^\sigma - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : \sum k_c (\mathbf{C}_c^* : \boldsymbol{\alpha}^\sigma - \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon) : (\mathbf{I} - \mathbf{C}_c^{-1} : \mathbf{C}_c^T) : \boldsymbol{\phi}_c \quad (21)$$

y  $\mathbf{C}_c^T$  es el tensor elastoplástico tangente de la componente c.

Todas las ecuaciones anteriores valen en el sistema de referencia local del compuesto.

Para un sistema de referencia cualquiera se deben rotar los tensores correspondientes.

La ecuación constitutiva de un compuesto laminado o de un material compuesto con estructura compleja, donde los tensores  $\alpha^\sigma$  y  $\alpha^\varepsilon$  no son iguales en todas las componentes, puede obtenerse en etapas. Se descompone el compuesto en sub-compuestos más simples, para los cuales se puede encontrar la ecuación constitutiva de la manera descrita, y luego se halla la ecuación del compuesto, componiendo los sub-compuestos de manera similar.

Para obtener las deformaciones de las componentes, se encuentra en primer lugar la de las sub-compuestos y luego, a partir de ellas, las de las componentes mismas.

### 3 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

El modelo de compuestos presentado puede ser implementado en un programa de elementos finitos no lineal mediante un algoritmo iterativo como el que se describe en la Figura 1<sup>19</sup>. La figura corresponde a un compuesto simple. En el caso de un compuesto con estructura compleja, dentro de cada componente se debe seguir, a su vez, un procedimiento similar al descripto para el compuesto.

En cualquier caso, para obtener las deformaciones de cada una de las componentes se requieren conocer las deformaciones plásticas de todas ellas. Esto lleva a que el problema deba ser resuelto en forma iterativa.

## 4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

### 4.1 Introducción

En este punto se presenta la aplicación del modelo descripto a la simulación del comportamiento mecánico de compuestos laminados formados por láminas de matriz polimérica reforzadas con fibras unidireccionales. Los datos de los materiales y distintos tipos de análisis corresponden al ejercicio de falla antes descripto<sup>3,5</sup>.

La Figura 2 muestra un esquema de una lámina y del compuesto laminado en el que se indican las direcciones principales utilizadas como referencia en ambos casos.

En el caso de las láminas con fibras unidireccionales las componentes trabajan en paralelo en la dirección longitudinal de las fibras 1 (igual deformación de todas las componentes), en serie en la dirección transversal 2 (igual tensión de todas las componentes) y en paralelo en la dirección transversal 3. La forma de resistir el corte no es tan clara a simple vista, depende, entre otros factores, de la forma de la sección transversal de las fibras y, en general, debe expresarse como una combinación más compleja<sup>19</sup>.

En el caso del laminado las direcciones principales X e Y se encuentran contenidas en el plano del laminado y la dirección Z es normal a dicho plano. Cada una de las láminas puede tener orientaciones distintas de sus fibras. Como convención, se define dicha orientación a través del ángulo  $\theta$  que forma la dirección principal 1 de la lámina con la dirección principal X del laminado. Ver Figura 2. Se puede considerar que en el plano del laminado las láminas trabajan en paralelo.

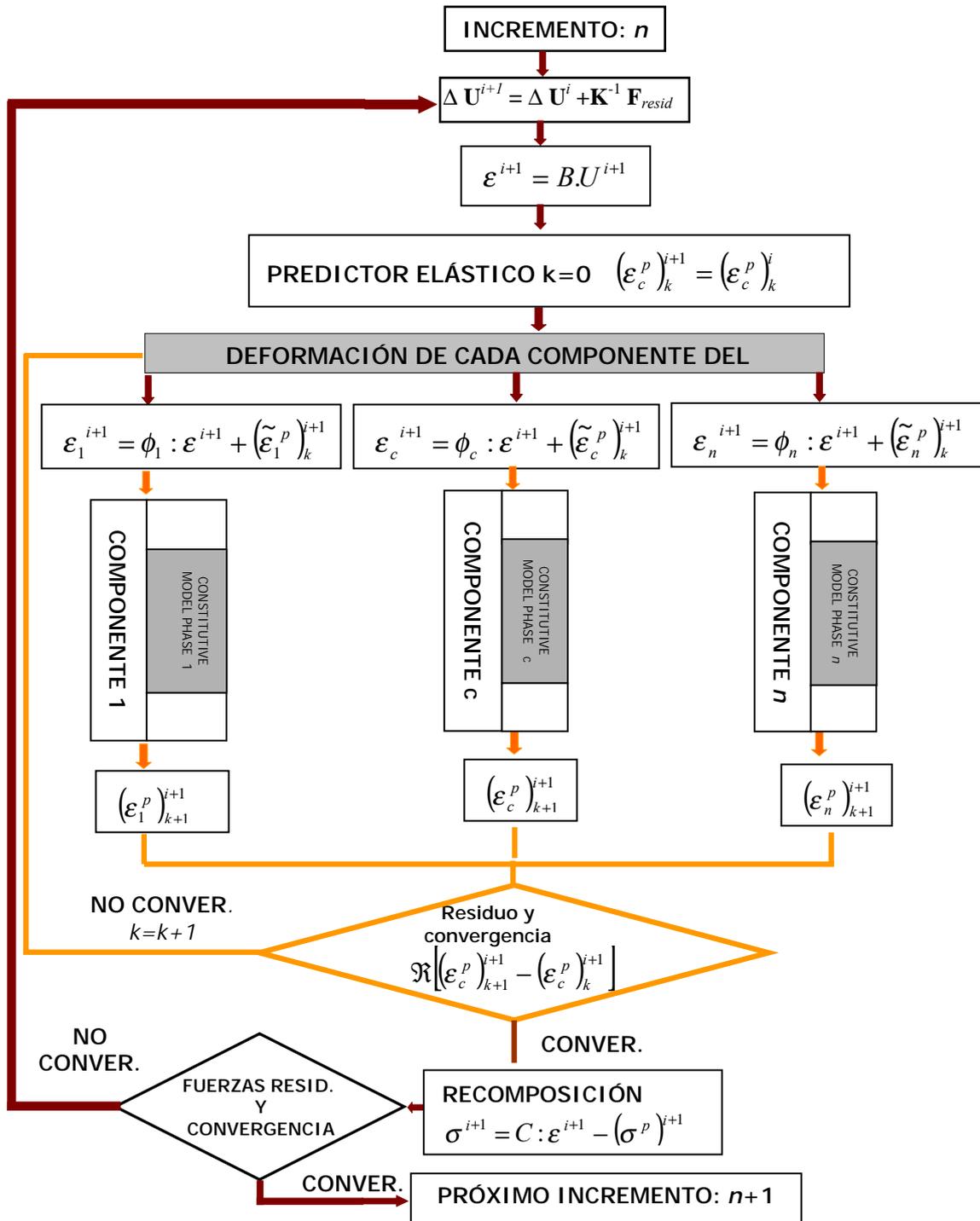


Figura 1 : Esquema de solución de un problema no lineal en el compuesto

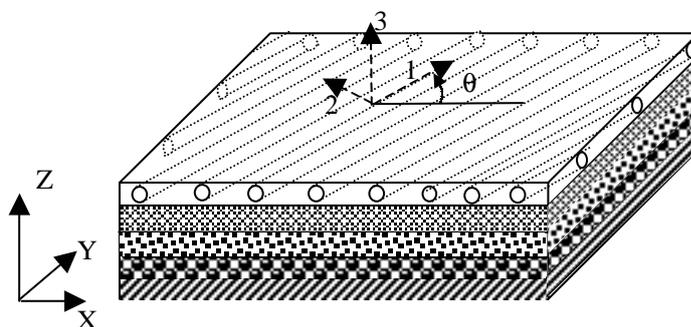


Figura 2 : Esquema de un compuesto laminado formado por láminas con fibras unidireccionales

## 4.2 Propiedades mecánicas de fibras, matrices y láminas<sup>3</sup>

Todos los laminados estudiados están compuestos por láminas formadas por una matriz blanda con fibras unidireccionales continuas. Las propiedades del laminado dependen fuertemente de las propiedades de las láminas. Por su parte, las propiedades de las láminas están gobernadas por las propiedades de sus constituyentes, esto es: fibras, matriz e interfaz y la orientación y proporción de fibras en el volumen de la lámina.

Las Tablas 1 y 2 presentan datos correspondientes a las propiedades mecánicas básicas de cuatro matrices de resina epoxy y cuatro tipos de fibras de carbono y de .

Las matrices, en sí, son isótropas y presentan mayor resistencia a compresión que a tracción.

Las fibras, tanto de vidrio como de carbono, se caracterizan por una mayor resistencia y rigidez en la dirección longitudinal y mayor resistencia a tracción que a compresión. Las fibras de carbono presentan una marcada ortotropía y pueden considerarse transversalmente isótropas.

En general, las estructuras no son diseñadas con todas las fibras alineadas en una única dirección si la estructura puede llegar a estar sometida a tensiones perpendiculares a las fibras. Sin embargo, las láminas con fibras unidireccionales constituyen los elementos básicos del laminado y, dentro del mismo, pueden resultar expuestas a tensiones normales a las fibras y a tensiones de corte. Es importante, entonces, conocer si los modelos son capaces de reproducir el comportamiento de las láminas ya que si no logran hacerlo, difícilmente podrán reproducir el comportamiento del laminado.

Las láminas presentan un comportamiento ortótropo caracterizado por una mayor rigidez en la dirección de las fibras. La resistencia a tracción en la dirección de las fibras es marcadamente mayor que la resistencia a tracción en la dirección perpendicular a las fibras y levemente superior a la resistencia a compresión longitudinal.

Tabla 1. Propiedades mecánicas de la matriz<sup>3</sup>

Tipo de Matriz	3501-6 epoxy	BSL914C epoxy	LY556/HT 907/DY06 3 epoxy	MY750/H Y917/DY0 63 epoxy
Módulo de Young, $E_m$ (GPa)	4.2	4.0	3.35	3.35
Mód. elást. transv., $G_m$ (GPa)	1.567	1.481	1.24	1.24
Coef. de Poisson, $\nu_m$	0.34	0.35	0.35	0.35
Resist. a tracción, $Y_{mt}$ (MPa)	69	75	80	80
Resist. a compres., $Y_{mc}$ (MPa)	250	150	120	120
Resistencia al corte, $S_m$ (MPa)	50	70	----	---
Deform. últ. en trac., $\varepsilon_{mt}$ (%)	1.7	4	5	5

Tabla 2. Propiedades de las fibras<sup>3</sup>

Tipo de fibra	AS4	T300	E-Glass 21x43 Gevetex	Silenka E-Glass 1200 tex
Módulo de Young long., $E_{f1}$ (GPa)	225	230	80	74
Mód. de Young transv., $E_{f2}$ (GPa)	15	15	80	74
Mód. elástico transv., $G_{f12}$ (GPa)	15	15	33.33	30.8
Coeficiente de Poisson, $\nu_{f12}$	0.2	0.2	0.2	0.2
Mód. elástico transv., $G_{f23}$ (GPa)	7	7	33.33	30.8
Resist. a trac. long., $X_{ft}$ (MPa)	3350	2500	2150	2150
Resist. a comp. long., $X_{fc}$ (MPa)	2500	2000	1450	1450
Deform. últ. trac. long., $\varepsilon_{f1T}$ (%)	1.488	1.086	2.687	2.905
Deform. últ. comp. long., $\varepsilon_{f1c}$ (%)	1.111	0.869	1.813	1.959

La determinación de las propiedades mecánicas de las fibras no siempre es directa ya que las fibras tienen diámetros muy pequeños y son difíciles de manejar. Generalmente se realizan ensayos de láminas unidireccionales y se emplean relaciones micro-mecánicas para extraer las propiedades de las fibras a partir de los resultados de las láminas. Como consecuencia de ello, es esperable encontrar variabilidad e inexactitud en los resultados.

### 4.3 Propiedades elásticas de las láminas con fibras unidireccionales

En la Tabla 3 se resumen las propiedades elásticas encontradas para las cuatro láminas estudiadas y su comparación con los valores experimentales<sup>3</sup>. En todos los casos se utilizaron las hipótesis antes descritas para las componentes de tensión normal y una combinación en paralelo de un modelo serie con un modelo paralelo para las componentes de corte.

Tabla 3. Propiedades de los laminados

Tipo de fibra	AS4		T300		E-Glass 21x43 Gevetex		Silenka E- Glass 1200 tex	
Tipo de matriz	3501-6 epoxy		BSL914C epoxy		LY556/HT90 7/DY063 epoxy		MY750/HY9 17/DY063 epoxy	
Fracción volum. de fibras $V_f$	0.6		0.6		0.62		0.60	
Propiedades elásticas	Exp. <sup>3</sup>	Num.	Exp. <sup>3</sup>	Num.	Exp. <sup>3</sup>	Num.	Exp. <sup>3</sup>	Num.
Módulo de Young long., $E_1$ (GPa)	126	136.7	138	139.6	53.5	51.0	45.6	45.8
Mód. de Young transv., $E_2$ (GPa)	11	10.1	11	11.1	17.7	17.3	16.2	15.9
Módulo elástico transv., $G_{12}$ (GPa)	6.6	6.5	5.5	5.4	5.83	6.3	5.83	5.81
Coefficiente de Poisson, $\nu_{12}$	0.28	0.25	0.28	0.26	0.278	0.23	0.278	0.24
Coefficiente de Poisson, $\nu_{23}$	0.4	0.23	0.4	0.20	0.4	0.36	0.4	0.37

Se observa que el modelo reproduce razonablemente los resultados experimentales, salvo en el caso de los coeficientes de Poisson, en donde aparecen diferencias importantes que pueden atribuirse a la forma en que se obtuvieron las propiedades elásticas de las fibras utilizadas como datos.

### 4.4 Envoltentes de falla para láminas con fibras unidireccionales

Muchas teorías de falla se formulan en base al comportamiento de una lámina elemental y se aplican luego, usando la teoría de laminados que supone que la lámina sometida a estados combinados de tensiones se comporta de la misma forma, independientemente de si está aislada o dentro de un laminado multi-direccional.

Antes de analizar el comportamiento de laminados, es interesante analizar el comportamiento de láminas unidireccionales bajo estados biaxiales de tensión y obtener las

envolventes de falla correspondientes. El objetivo de este punto es probar las hipótesis de partida y demostrar la capacidad del modelo para predecir este comportamiento básico que representa una condición necesaria para poder simular adecuadamente el comportamiento de laminados.

A continuación, se presentan las envolventes de falla obtenidas para tres láminas con fibras unidireccionales distintas, bajo distintos estados planos de tensiones. En todos los casos se utilizaron, como criterios de falla, el criterio de Mohr Coulomb para la matriz y el criterio de Drucker Prager para las fibras, teniendo en cuenta la ortotropía, como se describió en el punto 2.2. En el criterio de falla de la matriz se consideró la reducida resistencia a tracción que presenta la interfaz fibra/matriz en la dirección perpendicular a las fibras.

La Figura 3 muestra la comparación de las tensiones de falla obtenidas usando el modelo con las registradas experimentalmente<sup>5</sup> para una lámina reforzada con fibras de vidrio unidireccionales (E-Glass/LY556/HT907/DY063), bajo tensiones de corte y tensiones normales perpendiculares a las fibras. Los resultados experimentales<sup>5</sup> fueron obtenidos a partir de ensayos de tubos con las fibras dispuestas circunferencialmente sometidos tracción o compresión axial combinadas con torsión. Puede observarse que el modelo reproduce acertadamente la envolvente de falla de la lámina. En este caso la falla se produce siempre por la falla de la matriz.

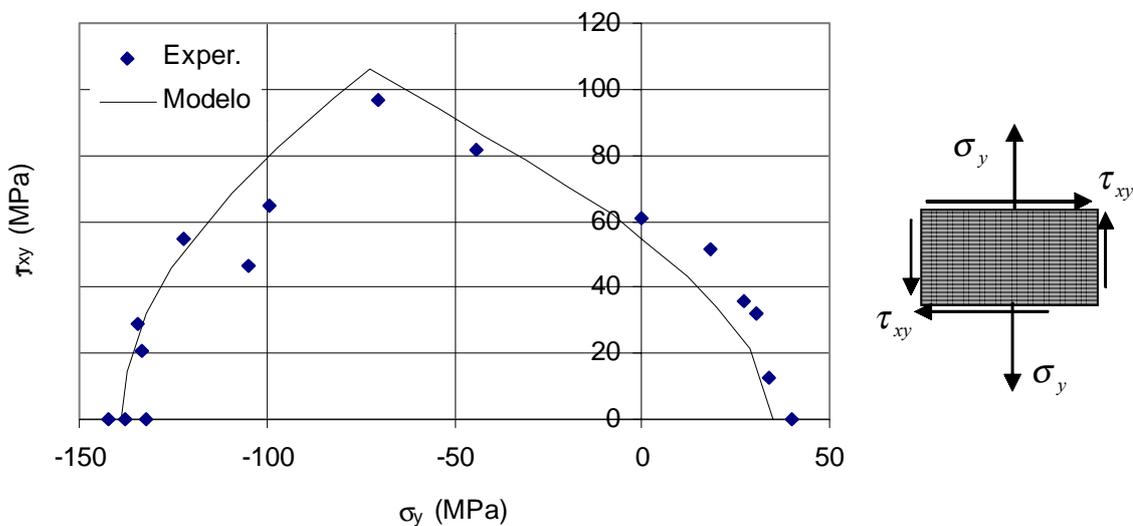


Figura 3. Envolvente de falla de una lámina unidireccional (E-Glass/LY556/HT907/DY)

La Figura 4 muestra la comparación de las tensiones de falla obtenidas con el modelo con las registradas experimentalmente<sup>5</sup> para una lámina reforzada con fibras de carbono unidireccionales (T300/BSL914C epoxy), bajo tensiones de corte y tensiones normales en la dirección de las fibras. En este caso, la falla se produce por la falla de las fibras para tensiones de corte moderadas o de la matriz para tensiones de corte más elevadas. Puede observarse que

el modelo reproduce aproximadamente la envolvente de falla de la lámina, pero resulta poco conservador en la zona correspondiente a la compresión de las fibras debido a que el mismo no tiene en cuenta la falla por pandeo de las fibras.

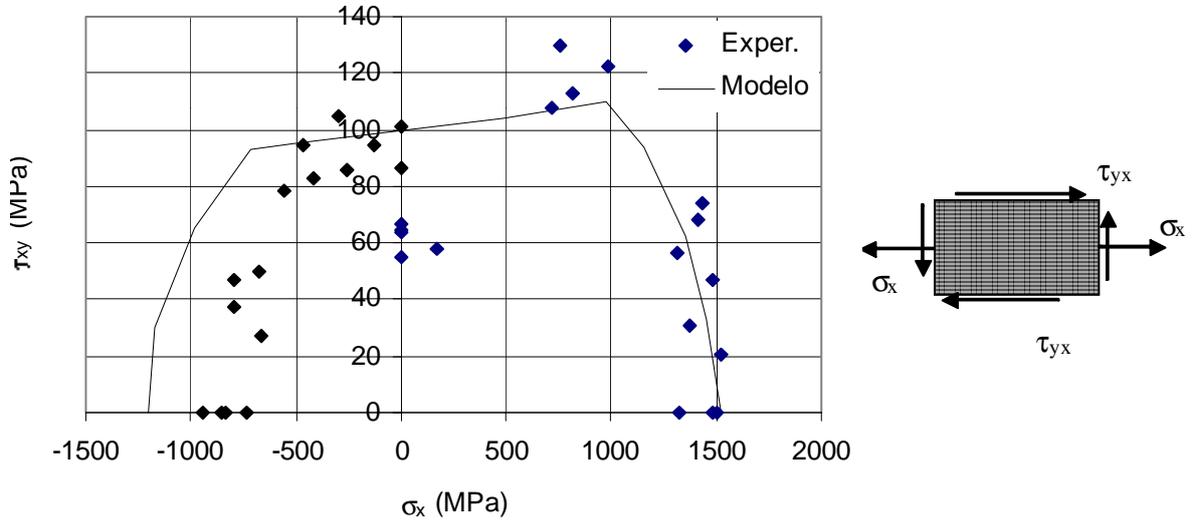


Figura 4. Envolvente de falla de una lámina unidireccional (T300/BSL914C epoxy )

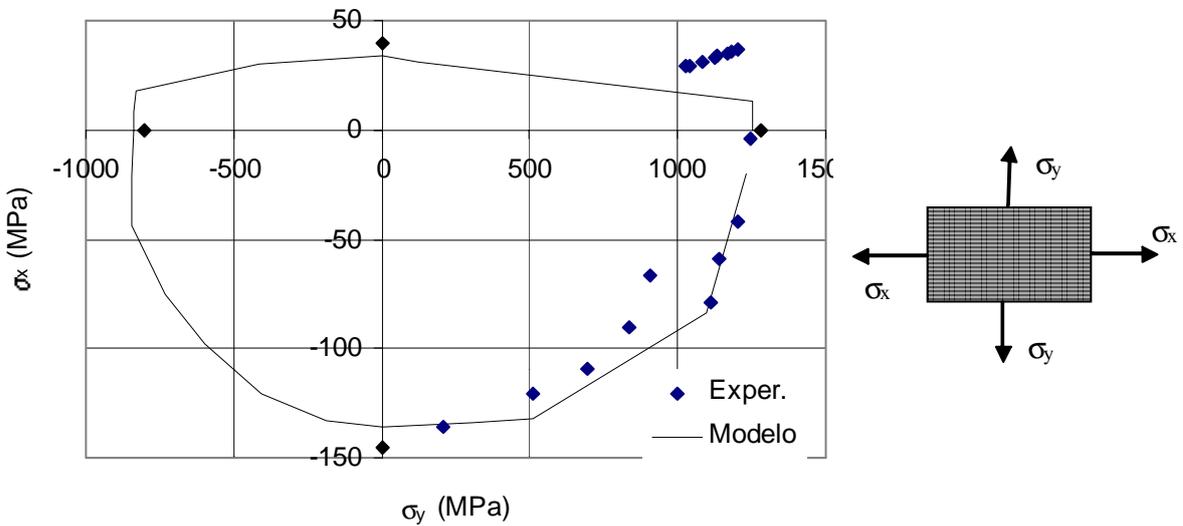


Figura 5. Envolvente de falla de una lámina unidireccional (Silenka E-Glass 1200 tex MY750/HY917/DY063 epoxy )

La Figura 5 muestra la comparación de las tensiones de falla obtenidas con el modelo con las registradas experimentalmente<sup>5</sup> para una lámina reforzada con fibras de vidrio unidireccionales (Silenka E-Glass 1200 tex MY750/HY917/DY063 epoxy), bajo tensiones

tensiones normales en la dirección de las fibras y en la dirección perpendicular a las mismas. Los resultados experimentales fueron obtenidos a partir de ensayos de tubos con fibras formando un ángulo de  $\pm 85^\circ$  con el eje del tubo, sometidos a carga axial y presión interna. En este caso la falla se produce por la falla de las fibras cuando prevalece la tensión en la dirección de las fibras o de la matriz en el sentido perpendicular a las fibras. Puede observarse que el modelo reproduce acertadamente la envolvente de falla de la lámina.

#### 4.5 Envoltentes de falla de laminados

La capacidad de una teoría de falla para predecir distintas formas de falla inducidas por la presencia de varias componentes de tensión puede ser evaluada mediante la aplicación de la misma a laminados formados por láminas con distintas orientaciones de fibras. En general, las componentes de tensión predominantes en cada lámina son dos componentes de tensión normal y una componente de tensión tangencial. La magnitud relativa de estas componentes depende de la orientación de las fibras y las condiciones de carga.

En este punto se obtienen las envolventes de falla de tres laminados y se comparan con resultados experimentales<sup>5</sup>.

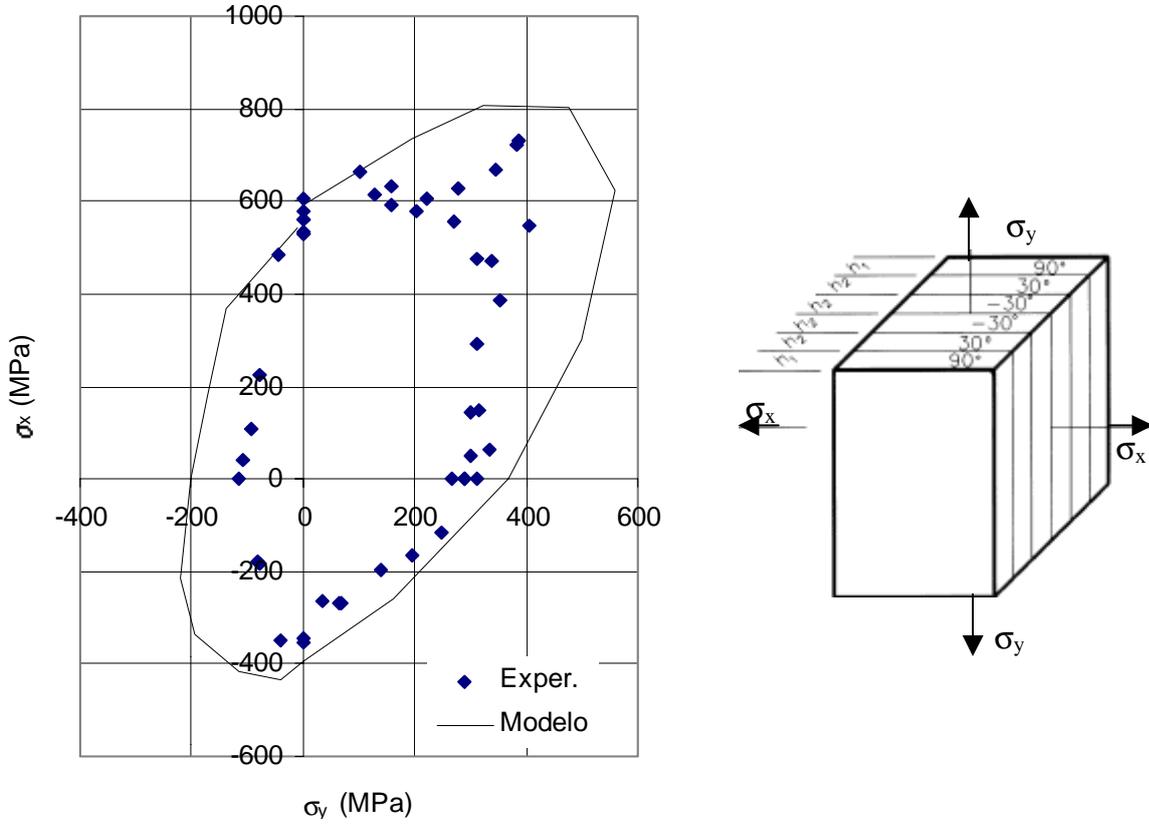
##### a) Laminado ( $90^\circ/\pm 30^\circ/90^\circ$ )s (E-Glass/LY556/HT907/DY063)

La construcción de este laminado se indica en la Figura 6. El ángulo indicado corresponde al ángulo que forman las fibras con el eje x que coincide con el eje de los tubos utilizados para realizar los ensayos. La altura total del laminado es 2mm, mientras que  $h_1=0.172$ mm y  $h_2=0.414$  mm, de modo que las láminas a  $\pm 30^\circ$  representan el 82.8% del espesor total y las láminas a  $90^\circ$  representan el 17.2% restante. El laminado no resulta isótropo y se pueden producir distintos modos de falla bajo tensiones biaxiales, no únicamente debidos a la falla de las fibras.

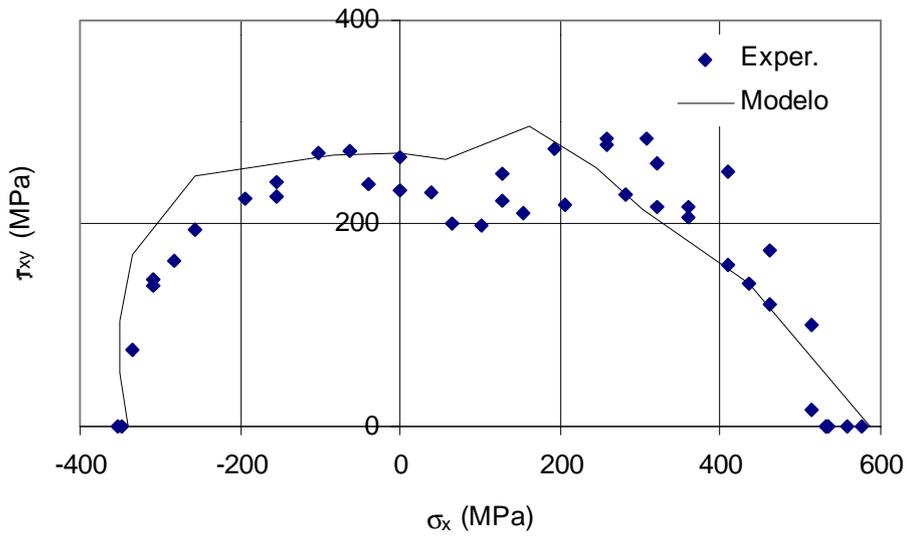
En las Figura 6a y 6b se muestran las envolventes de falla de este laminado bajo estados biaxiales de tensión obtenidas con el modelo y su comparación con resultados experimentales<sup>5</sup>. La Figura 6a corresponde a distintas combinaciones de tensiones normales en el plano y la Figura 6b a tensión normal en la dirección x combinada con corte. En general, el modelo reproduce la tendencia de los resultados experimentales pero conduce a resultados poco conservadores bajo estados biaxiales de tracción.

##### b) Laminado ( $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$ )s AS4/3501-6

La constitución de este laminado cuasi-isótropo se muestra en la Figura 7. El espesor total del laminado es 1.1mm y todas las láminas tienen el mismo espesor. Este tipo de laminado tiene especial utilización en la industria aeroespacial. A diferencia de las láminas anteriores, se espera que estas láminas tengan las mismas resistencias cuando son cargadas a  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .



a)



b)

Figura 6. Envolvente de falla del laminado ( $90^\circ/\pm 30^\circ/90^\circ$ )s (E-Glass/LY556/HT907/DY063)

a)  $\sigma_x$  vs.  $\sigma_y$ ; b)  $\tau_{xy}$  vs.  $\sigma_x$

La Figura 7 muestra las tensiones de falla obtenidas con el modelo y su comparación con los resultados experimentales<sup>5</sup> para estados biaxiales de tensión. En general, los ensayos evidenciaron fallas por fractura de fibras por lo que la falla estaba controlada por la resistencia de las fibras. Los resultados experimentales en el cuadrante de compresión-compresión representan la falla estructural por pandeo más que por aplastamiento del material. En general, los resultados del modelo se aproximan a los experimentales salvo en este cuadrante, donde no pueden reproducir la falla por pandeo.

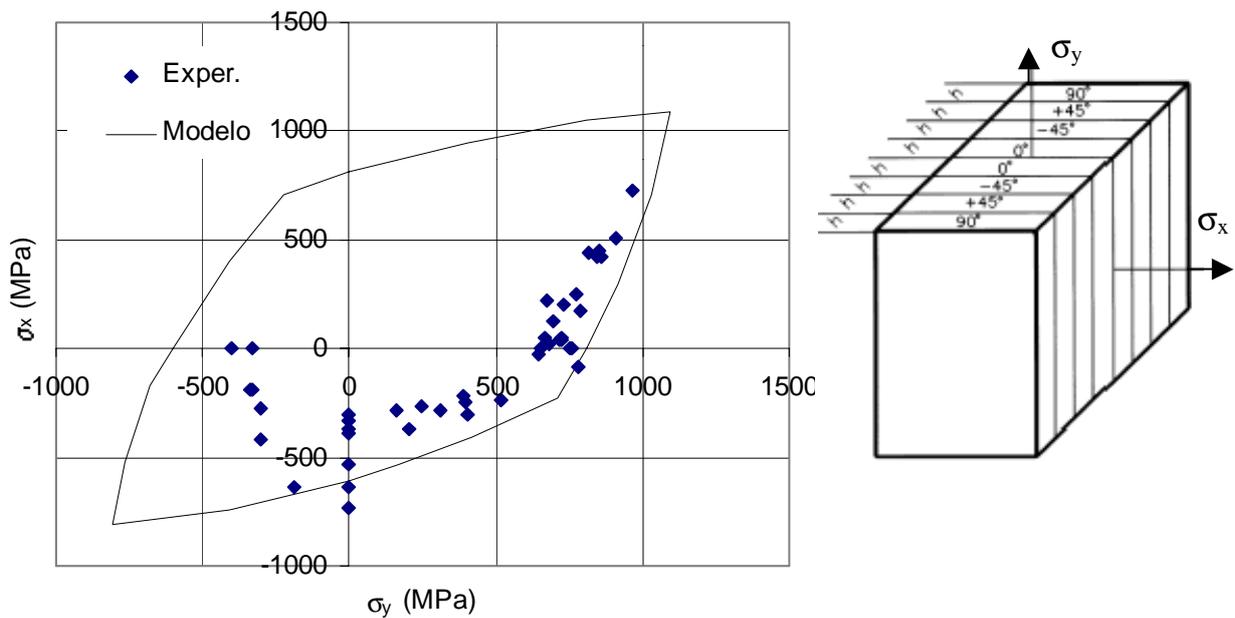


Figura 7. Envoltura de falla del laminado (0°/±45°/90°)s AS4/3501-6

c) Laminado ( $\pm 55^\circ$ ) Silenka E-Glass 1200 tex MY750/HY917/DY063 epoxy

La disposición de este laminado se muestra en la Figura 8. El espesor total del laminado es de 1mm y todas las láminas tienen el mismo espesor. En la figura 8 se muestra, además, la envoltura de falla biaxial obtenida con el modelo y su comparación con resultados experimentales<sup>5</sup>, observándose un buen comportamiento del modelo en este caso.

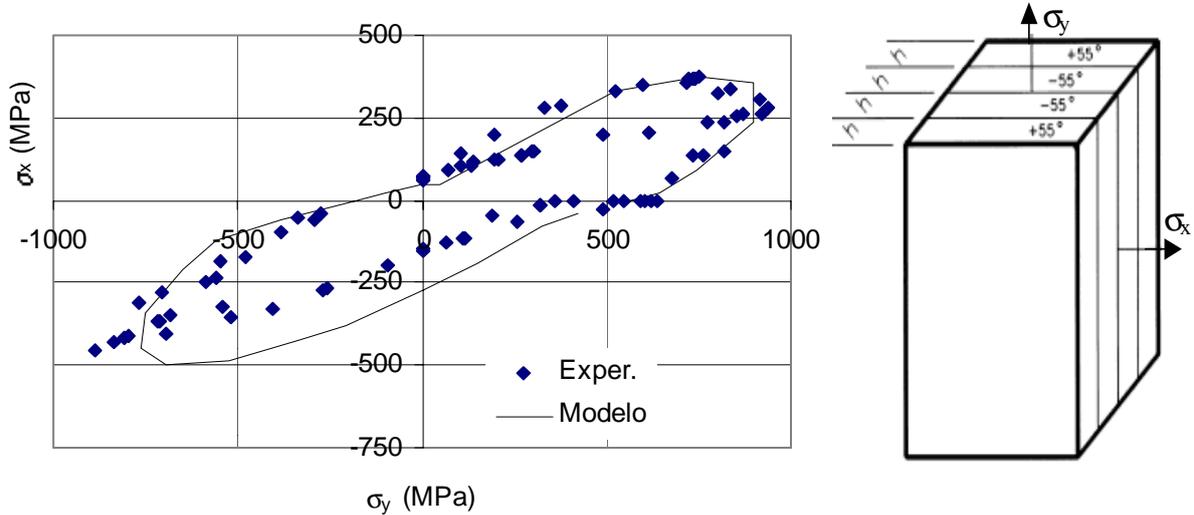


Figura 8. Envoltura de falla del laminado ( $\pm 55^\circ$ ) Silenka E-Glass 1200 tex MY750/HY917/DY063 epoxy

## 5 CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo para materiales compuestos que parte de una idealización simple del comportamiento micro-mecánico. El mismo permite obtener el comportamiento de un material compuesto a partir de los modelos constitutivos de las componentes, su disposición y proporción en el compuesto. Gracias a sus hipótesis de partida, el modelo es especialmente adecuado para el tratamiento de materiales compuestos laminados formados por láminas con fibras unidireccionales. Permite considerar la anisotropía y no linealidad de cada una de las componentes

El modelo resultante describe el comportamiento y la falla del compuesto, teniendo en cuenta lo que ocurre en cada componente, por lo que permite identificar el modo de falla del compuesto producido por la falla de una o más de sus componentes. Logra reproducir modos de falla complejos que cambian de la matriz a las fibras dependiendo del tipo de estado tensional.

A diferencia de la mayoría de los modelos para materiales laminados existentes, el modelo desarrollado es de fácil implementación en un programa de elementos finitos no lineal y permite obtener en forma relativamente sencilla la respuesta no lineal del compuesto.

Si bien los resultados son prácticamente coincidentes con algunos modelos analíticos desarrollados por otros autores para el comportamiento elástico<sup>19</sup>, los ejemplos presentados muestran que los valores de constantes elásticas obtenidas para láminas unidireccionales no son totalmente coincidentes con los registrados experimentalmente<sup>3</sup>. Las mayores diferencias se encuentran en los coeficientes de Poisson. Esto puede deberse básicamente a la imprecisión de las propiedades mecánicas de las componentes, fundamentalmente de las fibras, utilizadas

como datos de partida y a que el análisis micro-mecánico que define los tensores  $\alpha$  utilizados en el modelo debe ser refinado. Si se toman como datos de partida las constantes elásticas de las láminas unidireccionales registradas experimentalmente, se obtienen, con mucha mejor precisión, las constantes elásticas de los laminados, lo cual confirma los comentarios anteriores.

El modelo reproduce razonablemente la falla de láminas con fibras unidireccionales y compuestos laminados, con limitaciones menores o a lo sumo iguales que las de los otros modelos presentados en el ejercicio de falla<sup>7-10</sup>.

## 6 AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo económico del CONICET.

## 7 REFERENCIAS

- [1] Z. Huang, "Micromechanical prediction of ultimate strength of transversely isotropic fibrous composites", *Int. J. of Solids and Structures*, **38**, 4147-4172 (2001).
- [2] M. J. Hinton and P. D. Soden, "Predicting failure in composite laminates: The background to the exercise", *Compos. Sci. Technol.*, **58**, 1001-1010 (1998).
- [3] P. D. Soden, M. J. Hinton and A. S. Kaddour, "Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates", *Compos. Sci. Technol.*, **58**, 1011-1022 (1998).
- [4] M.J.Hinton, A.S. Kaddour and P.D.Soden, "Evaluation of failure prediction in composite laminates: background to 'part B' of the exercise", *Compos. Sci. Technol.*, **62**, 1481 – 1488 (2002).
- [5] P. D. Soden, M. J. Hinton and A. S. Kaddour, "Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data", *Compos. Sci. Technol.*, **62**, 1489 – 1514 (2002).
- [6] M.J. Hinton, A.S. Kaddour and P.D. Soden, "Evaluation of failure prediction in composite laminates: Background to 'part C' of the exercise", *Compos. Sci. Technol.*, **64**, 321 – 327 (2004).
- [7] P. D. Soden, M. J. Hinton and A. S. Kaddour, "A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates", *Compos. Sci. Technol.*, **58**, 1225-1254 (1998).
- [8] A.S.Kaddour, M.J. Hinton and P.D. Soden, "A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: Additional contributions", *Compos. Sci. Technol.*, **64**, 449 – 476 (2004).
- [9] M.J. Hinton, A.S. Kaddour and P.D. Soden, "A further assessment of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: comparison with experimental evidence", *Compos. Sci. Technol.*, **64**, 549 – 588 (2004).

- [10] P.D.Soden, A.S.Kaddour and M.J.Hinton, "Recommendations for designers and researchers resulting from the world-wide failure exercise", *Compos. Sci. Technol.*, **64**, 589 –604 (2004).
- [11] P. Zinoviev, S.V. Grigoriev, O.V. Labedeva and L.R. Tairova, "Strength of multilayered composites under plane stress state", *Compos. Sci. Technol.* , **58**, 1209 –1224 (1998).
- [12] P. Zinoviev, O.V. Labedeva and L.R. Tairova, "Coupled analysis of experimental and theoretical results on the deformation and failure of laminated composites under a plane state of stress", *Compos. Sci. Technol.*; **62**, 11711 –11724 (2002).
- [13] T.A. Bogetti, C.P.R. Hoppel, V.M. Harik, J.F. Newill and B.P. Burns, "Predicting the nonlinear response and progressive failure of composite laminates", *Compos. Sci. Technol.*, **64**, 477-485 (2004).
- [14] K.S. Liu, S.W. Tsai, "A progressive quadratic failure criterion of alaminated", *Compos. Sci. Technol.*, **58**, 1023 –3102 (1998).
- [15] A. Kuraishi, S.W. Tsai and K.A. Liu K., "A progressive quadratic failure criterion, Part B. *Compos. Sci. Technol.*, **62**, 1682 –1696 (2002).
- [16] A. Puck, H. Schurmann, "Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models", *Compos. Sci. Technol.*, **58**, 1045 –68 (1998).
- [17] A. Puck, H. Schurmann, "A.Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models —Part B, *Compos. Sci. Technol.*, **62**, 11633 –11672 (2002).
- [18] R.G. Cuntze and A.Freund A, "The Predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates", *Compos. Sci. Technol.*, **64**, 343-377 (2004).
- [19] B. Luccioni and S. Oller, "Modelo para compuestos reforzados con fibras", *Mecánica Computacional*, **XXII**, 2049-2063 (2003).
- [20] J. Betten, "Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials", *International Journal of Plasticity*, **4**, 29-46 (1988).
- [21] S. Oller, S. Botello, J.Miquel and E. Oñate, "An anisotropic elasto-plastic model based on an isotropic formulation", *Int. J. Eng. Comp.*, **12**, 245-262 (1993).
- [22] B. Luccioni, S. Oller and R. Danesi, "Plastic Damaged Model for Anisotropic Materials", *Applied Mechanics in the Americas*, **I**, 124-129 (1995).
- [23] B. Luccioni, S. Oller and R. Danesi, "Coupled Plastic-Damaged Model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **129**, 81-89 (1996).
- [24] S. Oller, E. Oñate, J. Miquel and S. Botello, "A plastic damage constitutive model for composite materials", *Int. J. Solids and Structures*, **33 (17)**, 2501-2518 (1996).