

UMA FORMULAÇÃO UNIFICADA PARA A MODELAGEM GEOMETRICA  
UNI, BI E TRIDIMENSIONAL EM CAD/CAM

Roberto P. Petry

Departamento de Engenharia de Edificações  
Fundação de Ciência e Tecnologia - CIENTEC  
Porto Alegre - RS - Brasil.

Ademar G. Groehs

Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Porto Alegre - RS - Brasil.

RESUMO

Este trabalho propõe uma formulação para modelar quais quer formas uni, bi ou tridimensionais de forma integrada, possuindo certas propriedades importantes em geometria computacional, tais como independência do sistema de coordenadas, flexibilidade, eficiência e compacidade. As formas são totalmente descritas matematicamente, de modo que é possível obter as coordenadas de quaisquer pontos através de coordenadas locais. É possível, também, um controle das tangentes de maneira a assegurar a continuidade de linhas, superfícies e volumes. A formulação proposta foi implementada em microcomputador, constituindo um modelador geométrico eficiente capaz de gerar malhas de elementos finitos ou outra aplicação que necessite dados de formas geométricas.

ABSTRACT

This work proposes a formulation to model any uni, bi or tridimensional shapes in an integrated way, possessing certain important properties in computational geometry such as independency from the coordinates system, flexibility, efficiency and compacity. Shapes are mathematically fully described such as to obtain the coordinates of any point using local coordinates. It is also possible to control tangents to assure the continuity of lines, surfaces and volumes. The proposed formulation is implemented in micro-computer and constitutes an efficient geometric modeller able to generate finite element meshes or any other application which makes use of data from geometric shapes.

## 1. INTRODUÇÃO

A representação de problemas físicos através de modelos surge da constante necessidade de manipular para fins de análise, projeto, descrição, etc., a realidade física que nos cerca, nas diversas áreas do conhecimento.

As técnicas de modelagem geométrica visam criar modelos que representem, tão fielmente quanto se deseje, geometrias existentes ou idealizadas.

Muitas vezes os objetos são representados através de um conjunto de linhas e apresentados em perspectivas ou vistas ortogonais. Tal conjunto de linhas oferece uma representação tão acurada quanto o nível de detalhe empregado na descrição do objeto, sendo que, em geral, quanto mais detalhada a representação, maior a quantidade e diversidade de linhas empregadas.

Ocorre, porém, que tais representações, embora apresentando um bom resultado visual, não possuem muitas informações acerca da geometria do objeto, sendo apenas possível a obtenção das coordenadas de alguns pontos notáveis, como vértices e pontos de inflexão.

É conveniente, pois, que se busque uma representação de formas que apresente certas propriedades importantes em geometria computacional [1][2] visando o seu emprego em computação gráfica. Este trabalho propõe uma formulação para modelar quaisquer formas uni, bi ou tridimensionais de forma integrada, possuindo as propriedades supramencionadas.

## 2. MODELAGEM

A forma, nos problemas físicos, é independente do sistema de coordenadas, portanto a sua representação matemática também o deve ser. Ocorrem frequentemente, também, curvas e superfícies fechadas. Não é possível, pois, representar formas quaisquer através de funções das coordenadas (por exemplo  $z=f(x,y)$ ). Isto nos conduz à representação por funções vetoriais cujas componentes são funções definidas em forma paramétrica, com parâmetros  $u, v$  e  $t$  segundo a dimensão da forma. Assim, uma curva seria representada por

$$\vec{P}(u) = [x(u) \ y(u) \ z(u)], \quad (1)$$

uma superfície por

$$\vec{P}(u,v) = [x(u,v) \ y(u,v) \ z(u,v)] \quad (2)$$

e um volume por

$$\vec{P}(u,v,t) = [x(u,v,t) \ y(u,v,t) \ z(u,v,t)]. \quad (3)$$

É desejável, também, que a representação matemática das formas seja computacionalmente tratável, eficiente, controlada por um número limitado de parâmetros e versátil.

de modo a poder representar várias formas conhecidas.

Este trabalho propõe uma formulação para modelar formas uni, bi ou tridimensionais situadas no espaço e possibilita acesso às coordenadas de todos os pontos através de coordenadas locais.

A modelagem propriamente dita é executada em duas etapas. Na primeira, são definidos os contornos do objeto (não necessariamente todos). Na segunda etapa, estes contornos constituem regiões unidimensionais, ou são utilizados para definir regiões bidimensionais, as quais podem ainda servir para definir regiões tridimensionais.

## 2.1. Contornos

Para a representação fiel dos contornos de um objeto qualquer seria necessário um conjunto infinito de curvas. Torna-se necessário, portanto, definir um conjunto finito de curvas que possuam as características já citadas e, notadamente, versatilidade. Isto minimizaria o número de curvas necessário para descrever com razoável precisão os contornos desejados. Normalmente são empregados polinômios, por sua representação ser mais tratável.

O conjunto de polinômios escolhido consiste de Retas, Parábolas e curvas de Bézier modificadas, referidas neste trabalho como Bézier M. As curvas serão apresentadas a seguir utilizando notação matricial, conveniente em computação gráfica [2] para individualizar os diferentes elementos que definem as curvas. Assim, um ponto  $\vec{P}$  qualquer é dado por

$$\vec{P}(u) = [U] [M] [\vec{P}] = [x(u) \ y(u) \ z(u)] \quad (4)$$

$$[\vec{P}] = \begin{bmatrix} P1x & P1y & P1z \\ P2x & P2y & P2z \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde

- [U] - base de polinômios
- [M] - matriz da função de interpolação da curva
- [\vec{P}] - pontos que definem a geometria da curva.

### 2.1.1. Reta

A reta (fig. 1) é definida através de dois pontos no espaço (seis coordenadas reais) e desenvolve-se de  $\vec{P}_1$  para  $\vec{P}_2$  conforme a variação do parâmetro  $u$  de 0 a 1. Utilizando-se os polinômios interpoladores de Lagrange temos:

$$\vec{P}(u) = [u \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \end{bmatrix} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (6)$$

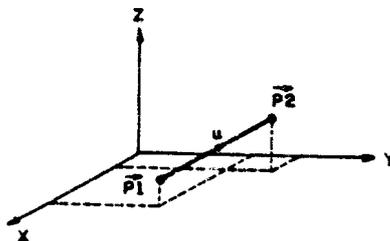


Fig. 1 - Reto

### 2.1.2. Parábola

A parábola (fig. 2) é definida através de três pontos no espaço (nove coordenadas reais) e desenvolve-se de  $P_1$  para  $P_2$  passando por  $P_3$  conforme a variação do parâmetro  $u$  de 0 a 1. Utilizando-se os polinômios interpoladores de Lagrange temos:

$$\vec{P}(u) = [u^2 \ u \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \end{bmatrix} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (7)$$

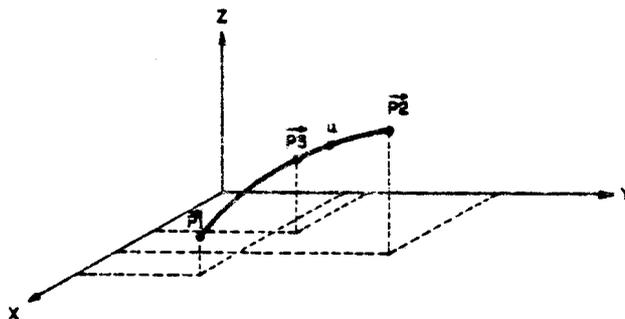


Fig. 2 - Parábola

### 2.1.3. Bézier M

A curva Bézier M foi desenvolvida visando obter eficiência e versatilidade para a descrição de contornos. Partindo da curva de Ferguson (2) (fig. 3)

$$\vec{P}(u) = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{Q}_1 \\ \vec{Q}_2 \end{bmatrix} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (8)$$

e substituindo

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= 3(\vec{P}_3 - \vec{P}_1) \\ \vec{V}_2 &= 3(\vec{P}_2 - \vec{P}_4) \end{aligned}$$

em (8), obtemos matricialmente

$$\vec{P}(u) = [u^3 u^2 u 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \end{bmatrix}$$

ou

$$\vec{P}(u) = [u^3 u^2 u 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -6 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \end{bmatrix} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (9)$$

que é a curva de Bézier para quatro pontos. Como se pode observar na fig. 3, trata-se da curva de Ferguson descrita de maneira diferente. Nesta forma, podemos definir a geometria da curva através de quatro pontos, ao invés de dois pontos e dois vetores. Isto é geralmente mais prático. O controle da tangente no início e fim da curva também é mantido (direções  $\vec{P}_1\vec{P}_3$  e  $\vec{P}_2\vec{P}_4$ ).

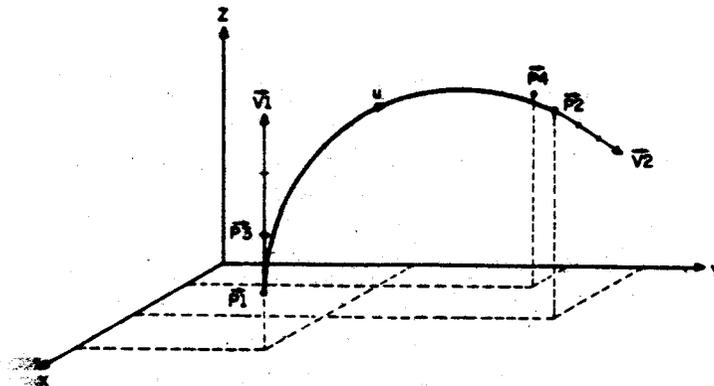


Fig. 3 - Curva de Ferguson / Bézier. A curva inicia tangente a  $\vec{V}_1$  e termina tangente a  $\vec{V}_2$ .

Para o desenvolvimento da curva Bézier M (fig. 4), também partimos da curva de Ferguson, porém fazemos

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= K(\vec{P}_3 - \vec{P}_1) \\ \vec{V}_2 &= K(\vec{P}_2 - \vec{P}_3) \end{aligned}$$

e substituindo em (8) obtemos matricialmente

$$\vec{P}(u) = [u^3 u^2 u 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -K & 0 & K \\ 0 & K & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\vec{P}(u) = [u^3 u^2 u 1] \begin{bmatrix} 2-K & K-2 & 0 \\ 2K-3 & 3-K & -K \\ -K & 0 & K \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \end{bmatrix} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (10)$$

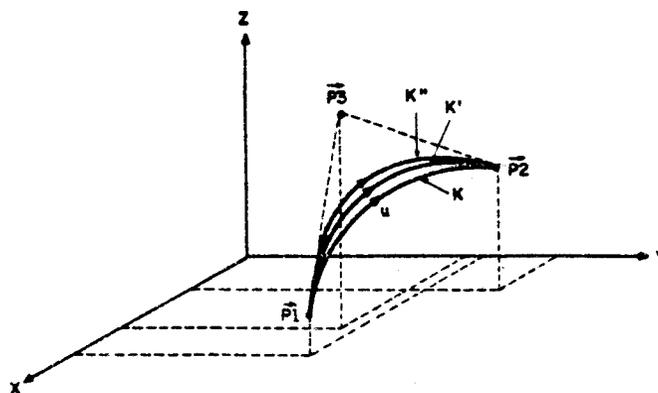


Fig. 4 - Curva Bézier M. A curva inicia tangente à  $\vec{P}_1 \vec{P}_3$  e termina tangente à  $\vec{P}_2 \vec{P}_3$ .

Esta modificação nos permite definir a geometria da curva através de três pontos no espaço e uma constante real (nove coordenadas e uma constante real). O controle das tangentes no início e fim da curva é mantido (direções  $\vec{P}_1 \vec{P}_3$  e  $\vec{P}_2 \vec{P}_3$ ). Temos, ainda, uma constante K cuja utilização prática se dá para valores positivos no intervalo (0,3), e que controla o desenvolvimento da curva. Na fig. 4, por exemplo,  $K < K' < K''$ . A curva assim obtida é capaz, inclusive, de modelar arcos de circunferência para ângulos  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ .

Para a modelagem de arcos de circunferência, basta fornecer os pontos inicial e final do arco ( $\vec{P}_1$  e  $\vec{P}_2$ ), o ponto de encontro das tangentes nas extremidades ( $\vec{P}_3$ ) e a constante K ideal para aquele comprimento de arco. Esta constante pode ser determinada minimizando a integral do erro médio em relação a um arco de circunferência correspondente, ou simplesmente substituindo o ângulo  $\theta$  do arco em graus na equação

$$K = \frac{1 + \cos \theta - 2 \cos (\theta/2)}{\cos \theta - 1} (3,9988 + 1,1020 \cdot 10^{-4} \theta + -1,4575 \cdot 10^{-6} \theta^2), \quad (11)$$

o que é feito automaticamente na implementação computacional. Esta equação foi obtida através de ajuste pelo método dos mínimos quadrados do K ideal fornecido pela minimização do erro médio em relação a um arco de circunferência correspondente, para diversos comprimentos de arco.

A tabela a seguir apresenta os erros médio e máximo cometidos ao usar a curva Bézier M para aproximar arcos de circunferência de diferentes comprimentos, empregando o K fornecido pela equação (11). Os erros percentuais E fornecidos abaixo podem ser encarados como as distâncias em centímetros entre um ponto fornecido pela curva Bézier M e o ponto correspondente em um arco de circunferência de um metro de raio e comprimento  $\theta$ . Normalmente necessitamos modelar arcos de circunferência até 90°, para os quais a representação através da curva Bézier M é muito satisfatória, com a vantagem da forma paramétrica no espaço tridimensional.

Tab. I - Erros na representação de arcos de circunferência com Bézier M.

$\theta$ (°)	Emed (%)	Emax (%)
0,1	0,000	0,000
30	0,000	0,001
60	0,002	0,003
90	0,012	0,023
120	0,067	0,112
150	0,255	0,469
179,9	0,788	1,536

A implementação computacional oferece, também, a possibilidade de definir o arco de circunferência através dos pontos inicial e final do arco ( $P_1$  e  $P_2$ ) e do centro da circunferência ( $C$ ). O programa, então, utilizando as condições de ortogonalidade  $\vec{CP}_1 \perp \vec{P}_1P_3$  e  $\vec{CP}_2 \perp \vec{P}_2P_3$ , e coplanaridade de  $\vec{C}$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , e  $P_3$  e empregando

$$\begin{array}{lll} X_1 = P_{1x} - C_x & X_2 = P_{2x} - C_x & A = Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2 \\ Y_1 = P_{1y} - C_y & Y_2 = P_{2y} - C_y & B = Z_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot Z_2 \\ Z_1 = P_{1z} - C_z & Z_2 = P_{2z} - C_z & C = X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1 \end{array}$$

monta e resolve o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ A & B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ P_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{2x} \cdot X_2 + P_{2y} \cdot Y_2 + P_{2z} \cdot Z_2 \\ P_{1x} \cdot X_1 + P_{1y} \cdot Y_1 + P_{1z} \cdot Z_1 \\ A \cdot P_{1x} + B \cdot P_{1y} + C \cdot P_{1z} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

para obter  $P_3$ . Com o ângulo do arco obtido através da equação

$$\theta = \arccos \frac{X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2}{\sqrt{(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)(X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2)}} \quad (13)$$

calcula, finalmente, o K ideal empregando a equação (11).

## 2.2. Regiões

Todos os objetos ou formas, para os efeitos da modelagem aqui apresentada, são compostos por uma ou mais regiões. Cada região pode ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional, de acordo com o número de coordenadas locais necessário para identificar cada ponto univocamente, conforme as equações (1), (2) e (3).

O uso de coordenadas locais (parâmetros) para identificar pontos de regiões, conduz ao mapeamento unívoco de coordenadas curvilíneas para coordenadas cartesianas, de sorte que podemos trabalhar de maneira cômoda com figuras regulares em coordenadas curvilíneas, as quais se apresentam distorcidas em coordenadas cartesianas.

As regiões unidimensionais são do tipo Contorno, as bidimensionais podem ser dos tipos Triangular ou Quadrilátera e as tridimensionais dos tipos Linear, Quadrática ou Bézier M.

### 2.2.1. Unidimensionais

#### 2.2.1.1. Contorno

As regiões unidimensionais são do tipo Contorno e compõem-se simplesmente de um contorno de um dos tipos descritos na seção 2.1. A fig. 5 apresenta o mapeamento correspondente à equação 1.

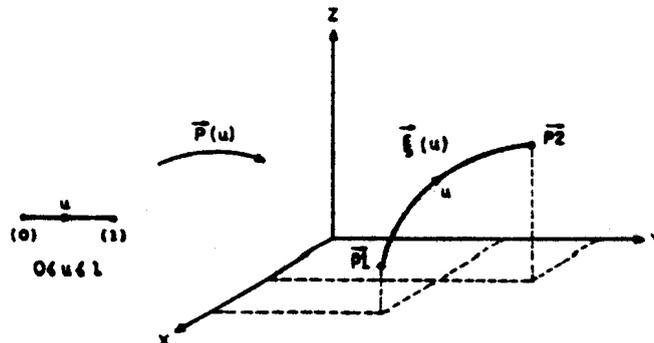


Fig. 5 - Mapeamento de regiões tipo Contorno.

## 2.2.2. Bidimensionais

As regiões bidimensionais são superfícies delimitadas por contornos. Para o mapeamento de regiões bidimensionais foram desenvolvidas diversas técnicas, dentre as quais destacamos mapeamentos isoparamétrico, transfinito e "lofting", amplamente descritos em [1] e [2]. Destes, o mapeamento transfinito [3][4] é o que apresenta melhores características para este trabalho, pois modela precisamente os contornos, fornecidos em forma paramétrica, e reflete de maneira suave e previsível a influência dos mesmos ao longo da região. É bastante adequado, também, à implementação computacional e à geração de malhas de elementos finitos.

As técnicas de mapeamento transfinito são uma classe de métodos para estabelecer sistemas de coordenadas curvilíneas em domínios arbitrários. O nome se deve ao fato de que o mapeamento ajusta uma superfície perfeitamente, não em um número finito de pontos como o isoparamétrico, mas ao longo de regiões contínuas, que são os contornos. Estes devem ser descritos por funções vetoriais, na forma da equação (1). Os contornos utilizados neste trabalho foram descritos na seção 2.1.

A partir de dois contornos, podemos utilizar projetores [3][4] unidirecionais ("lofting projectors") para interpolar linearmente uma superfície, gerando o mapeamento "lofting". Este mapeamento ajusta perfeitamente uma superfície em dois contornos opostos. Finalmente, através de uma combinação de projetores unidirecionais, são gerados os mapeamentos transfinitos. Neste trabalho, são utilizadas as formulações referentes à geração de mapeamentos transfinitos de regiões delimitadas por três contornos (triangular) e quatro contornos (quadrilátera). Estas regiões são superfícies no espaço tridimensional, representados por funções vetoriais na forma da equação (2).

A seguir, são apresentadas as regiões bidimensionais.

### 2.2.2.1. Triangular

A região triangular é delimitada por três contornos, fechados entre si, fornecidos em forma paramétrica. Cada ponto da região é obtido atribuindo-se valores às três coordenadas locais  $u$ ,  $v$  e  $w$ , que podem variar de 0 a 1 obedecendo à dependência linear  $u+v+w = 1$ . Temos, portanto, duas coordenadas locais, já que  $w = 1-u-v$ , o que é coerente com a bidimensionalidade da região. A equação que define o mapeamento transfinito correspondente à equação (2) é

$$\begin{aligned} \hat{P}(u, v) = & \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{u}{1-v} \right) \hat{P}(v) + \left( \frac{w}{1-v} \right) \hat{P}(1-v) + \left( \frac{v}{1-w} \right) \hat{P}(w) + \left( \frac{u}{1-w} \right) \hat{P}(1-w) \right. \\ & \left. + \left( \frac{w}{1-u} \right) \hat{P}(w) + \left( \frac{v}{1-u} \right) \hat{P}(1-u) - w^2 - u^2 - v^2 \right] \\ & 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u+v \leq 1 \quad (14) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} w &= 1-u-v \\ \bar{P}_1 &= \bar{\eta}(0) \\ \bar{P}_2 &= \bar{\eta}(1) \\ \bar{P}_3 &= \bar{\xi}(0). \end{aligned}$$

A fig. 6 apresenta o mapeamento das regiões triangulares.

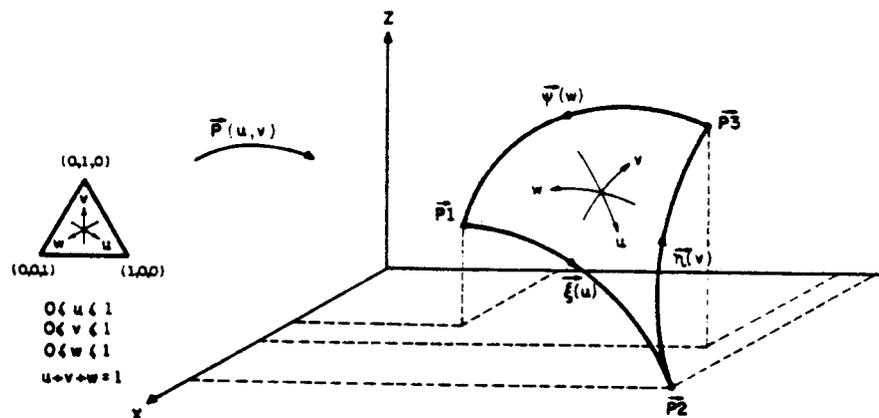


Fig. 6 - Mapeamento de regiões tipo Triangular.

#### 2.2.2.2. Quadrilátera

A região Quadrilátera é delimitada por quatro Contornos, fechados entre si, fornecidos em forma paramétrica. Cada ponto da região é obtido atribuindo-se valores às duas coordenadas locais  $u$  e  $v$ , que podem variar de 0 a 1. A equação que define o mapeamento transfinito correspondente à equação (2) é

$$\begin{aligned} \bar{P}(u,v) &= (1-u)\bar{\eta}_1(v) + u\bar{\eta}_2(v) + (1-v)\bar{\xi}_1(u) + v\bar{\xi}_2(u) + \\ &\quad - (1-u)(1-v)\bar{P}_1 - u(1-v)\bar{P}_2 - v(1-u)\bar{P}_4 - uv\bar{P}_3 \\ 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1 \end{aligned} \quad (15)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= \bar{\eta}_1(0) \\ \bar{P}_2 &= \bar{\eta}_2(0) \\ \bar{P}_3 &= \bar{\xi}_2(1) \\ \bar{P}_4 &= \bar{\xi}_1(1). \end{aligned}$$

A fig. 7 apresenta o mapeamento das regiões quadriláteras.

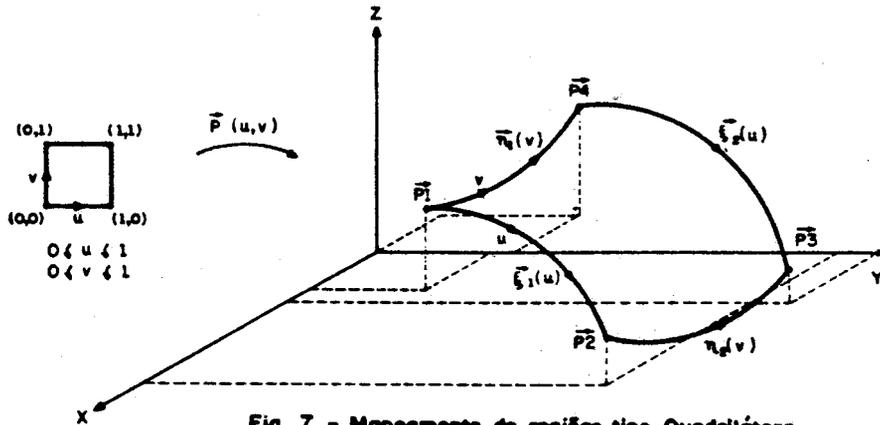


Fig. 7 - Mapeamento de regiões tipo Quadrilátera.

### 2.2.3. Tridimensionais

Para a modelagem tridimensional, se buscou uma formulação que fosse coerente e compatível com a forma parametrizada dos contornos e mapeamentos transfinitos já apresentados. Para tanto, optou-se por uma utilização modificada de projetores unidirecionais, de forma a interpolar volumes a partir de superfícies. Assim um ponto  $\vec{P}$  qualquer do volume é dado por

$$\begin{aligned} \vec{P}(u,v,t) &= [T] [M] [\vec{P}(u,v)] = \\ &= [x(u,v,t) \ y(u,v,t) \ z(u,v,t)] \end{aligned} \quad (16)$$

$$[\vec{P}(u,v)] = \begin{bmatrix} P1x(u,v) & P1y(u,v) & P1z(u,v) \\ P2x(u,v) & P2y(u,v) & P2z(u,v) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde

[T] - base de polinômios  
 [M] - matriz da função de interpolação do volume  
 [ $\vec{P}(u,v)$ ] - superfícies que definem a geometria do volume.

Como se pode observar, as equações 4 e 5 são análogas às equações 16 e 17. Naquelas, interpola-se um elemento unidimensional (curva) a partir de elementos de dimensão zero (pontos), e nestas, interpola-se um elemento tridimensional (volume) a partir de elementos bidimensionais (superfícies). As funções de interpolação utilizadas são as mesmas descritas na seção 2.1., possibilitando modularidade, eficiência e versatilidade, conforme o discutido anteriormente.

As superfícies  $\tilde{P}(u,v)$ , empregadas na geração das regiões tridimensionais, são as descritas na seção 2.2.2., observando-se a restrição de utilizar regiões bidimensionais do mesmo tipo (triangular ou quadrilátera) em uma mesma região tridimensional.

A partir do tipo de função de interpolação, temos as regiões tridimensionais dos tipos Linear, Quadrática ou Bézier M, vistas a seguir.

### 2.2.3.1. Linear

A região linear (fig. 8) é definida através de duas regiões bidimensionais e desenvolve-se de  $\tilde{P}_1(u,v)$  para  $\tilde{P}_2(u,v)$  conforme a variação do parâmetro  $t$  de 0 a 1. Utilizando-se os polinômios interpoladores de Lagrange temos:

$$\tilde{P}(u,v,t) = [t \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_1(u,v) \\ \tilde{P}_2(u,v) \end{bmatrix}$$

$0 \leq t \leq 1$  (18)

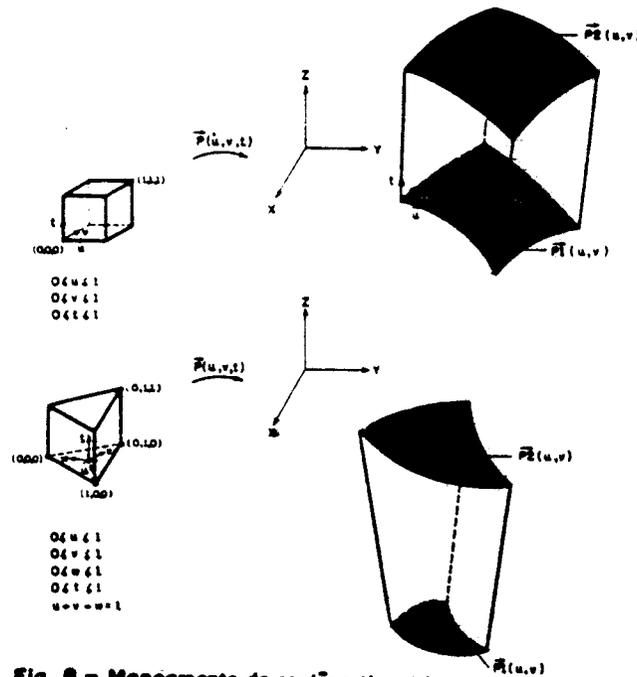


Fig. 8 - Mapeamento de regiões tipo Linear.

### 2.2.3.2. Quadrática

A região quadrática (fig. 9) é definida através de três regiões bidimensionais e desenvolve-se de  $\bar{P}_1(u,v)$  para  $\bar{P}_2(u,v)$  passando por  $\bar{P}_3(u,v)$  conforme a variação do parâmetro  $t$  de 0 a 1. Utilizando-se os polinômios interpoladores de Lagrange temos:

$$\bar{P}(u,v,t) = [t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1(u,v) \\ \bar{P}_2(u,v) \\ \bar{P}_3(u,v) \end{bmatrix}$$

$$0 \leq t \leq 1$$

(19)

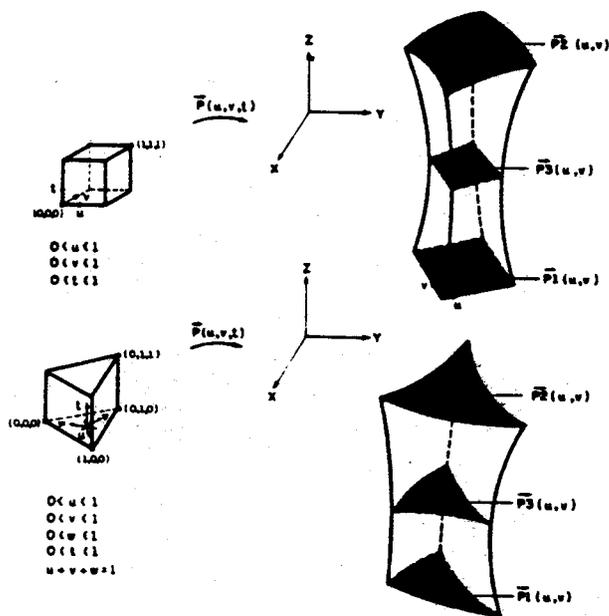


Fig. 9 - Mapeamento de regiões tipo Quadrática.

### 2.2.3.3. Bézier M

A região Bézier M (fig. 10) é definida através de três regiões bidimensionais e desenvolve-se de  $\bar{P}_1(u,v)$  para  $\bar{P}_2(u,v)$  conforme a variação do parâmetro  $t$  de 0 a 1. A região  $\bar{P}_3(u,v)$  orienta as tangentes de maneira análoga ao caso unidimensional e a constante  $K$  controla o desenvolvimen-

to do volume (vide seção 2.1.3.). Utilizando-se a função Bézier M desenvolvida anteriormente temos:

$$\vec{P}(u,v,t) = [t^3 t^2 t 1] \begin{bmatrix} 2-K & K-2 & 0 \\ 2K-3 & 3-K & -K \\ -K & 0 & K \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}_1(u,v) \\ \vec{P}_2(u,v) \\ \vec{P}_3(u,v) \end{bmatrix}$$

$0 \leq t \leq 1$  (20)

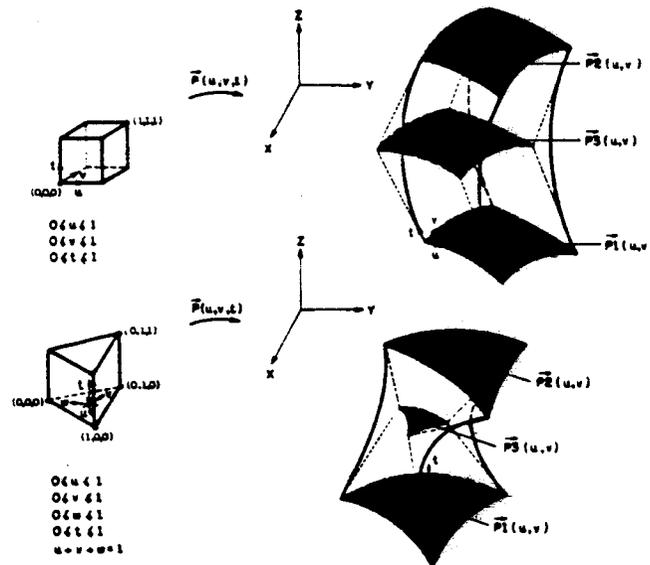


Fig. 10 - Mapeamento de regiões tipo Bézier M.

### 3. CONCLUSões

A formulação apresentada neste trabalho permite a descrição matemática de linhas, superfícies e volumes de forma unificada, com a possibilidade de obter as coordenadas de qualquer ponto substituindo-se as coordenadas locais apropriadas em funções vetoriais. Esta descrição pode ser implementada computacionalmente de modo compacto e eficiente, pois toda a forma pode ser criada e recriada a partir de poucas informações fornecidas por alguns pontos e contornos, os quais referenciam-se uns aos outros de maneira modular, necessitando de pequena base de dados. A formulação unificada tem a vantagem de abordar da mesma maneira os mais diferentes problemas físicos sejam uni, bi ou tridi-

mensionais, manipulando formas da maneira como as vemos no espaço. É possível, também, contrair regiões para gerar objetos conhecidos como pirâmides, cones, hemisférios, etc.

A curva Bézier M é uma boa solução para a modelagem de curvas quaisquer e arcos de circunferência no espaço, problema não trivial em sistemas gráficos, e que permite a obtenção das coordenadas dos pontos e tangentes nas extremidades com boa precisão. Também possibilita um controle das tangentes das formas, de maneira a garantir a continuidade das regiões que a compõem.

Foi desenvolvido [5] um modelador geométrico gráfico interativo, usando as idéias aqui expostas, em microcomputador compatível com o IBM PC, capaz de modelar quaisquer formas uni, bi ou tridimensionais. O sistema compilado é inferior a 130 kbytes e necessita aproximadamente 5 kbytes para cada 100 Contornos e 50 Regiões. Com o acréscimo de algumas subrotinas para a geração de malhas de 10 tipos de elementos finitos (uni, bi e tridimensionais, lineares e quadráticos) o sistema compilado fica inferior a 180 kbytes e é capaz de gerar 1000 nós com as respectivas conectividades em 30 segundos. Inúmeras adaptações podem ser feitas ao modelador geométrico básico para o aproveitamento das geometrias criadas para outras aplicações.

Desta forma, cremos que a formulação proposta possibilita o desenvolvimento de sistemas modeladores geométricos gráficos rápidos e eficientes, adaptáveis à solução de problemas que necessitem a manipulação e geração de grandes quantidades de informação geométrica.

#### 4. REFERENCIAS

- [1] Forrest, A. R., "Mathematical Principles for Curve and Surface Representation", Curved Surface in Engineering I. J. Brown (ed.), IPC Science and Technology Press Ltd., Guilford, Surrey, England, pp. 5-72, 1972.
- [2] Faux, I. D. and Pratt, M. J., "Computational Geometry for Design and Manufacture", Ellis Horwood Ltd., 1979.
- [3] Haber, R., Shephard, M. S., Abel J. F., Gallagher, R. H. and Greenberg, D. P., "A General Two-dimensional Graphical Finite Element Preprocessor Utilizing Discrete Transfinite Mappings", International Journal of Numerical Methods in Engineering, v.17, pp.1015-1044 1981.
- [4] Haber, R. and Abel, J. F., "Discrete Transfinite Mappings for the Description and Meshing of Three-dimensional Surfaces Using Computer Graphics", International Journal of Numerical Methods in Engineering, v. 18 pp. 41-66, 1982.
- [5] Petry, R. P. e Groehs, A. G., "Um Modelador Geométrico Gráfico Interativo", Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, v. II, pp. 661-663, 1987.