

ANÁLISE DE PLACAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
CONSIDERANDO REGIÕES DE DIFERENTES ESPESSURAS

João Batista de Paiva

Wilson Sergio Venturini

Departamento de Estruturas - Escola de Engenharia de  
São Carlos - Universidade de São Paulo  
São Carlos - SP - Brasil

RESUMO

O método dos elementos de contorno tem mostrado ser uma técnica numérica eficiente para o estudo de pisos de edifícios. Pisos formados por lajes de espessuras diferentes são usualmente analisados por sistemas de equações algébricas formados pelas relações individuais de cada laje isolada e implementado por relações de equilíbrio e compatibilidade. Este artigo apresenta uma formulação alternativa que evita a aproximação dos esforços ao longo das interfaces entre subregiões. O esquema idealizado leva a menores matrizes em comparação com a técnica usual de subregiões.

ABSTRACT

The boundary element method for plate bending has shown to be an efficient numerical technique to study building floor structures. Floor slabs defined by regions with different thickness are analysed considering the boundary equations for each subregion together with equilibrium and compatibility relations. This paper presents an alternative procedure to avoid effort approximations along interfaces between subregions. The scheme proposed also gives small matrices in comparison with the subregion technique.

## 1. INTRODUÇÃO

Nos últimos dez anos, a formulação do método dos elementos de contorno aplicado a placas tem tido uma evolução significativa. Embora os primeiros trabalhos sobre esse assunto tenham sido publicados ainda em 1968 [JASWON<sup>1</sup>], apenas no final dos anos setenta a formulação direta do método para esse tipo estrutural foi proposta [BEZINE<sup>2</sup>, STERN<sup>3</sup>, TOTTENHAM<sup>4</sup>]. A partir desses trabalhos, diversos aspectos da formulação têm sido estudados não só com relação às particularidades matemáticas, métodos, mas também sobre sua aplicação no contexto da engenharia. A análise de laje de piso de edifício aparece nesse contexto como uma das principais aplicações do método. Nesse caso, a natureza da formulação, baseada em soluções fundamentais, facilita a simulação de cargas pontuais ou lineares, permitindo uma adequada representação de apoios discretos ou contínuos e da interação com outras estruturas [PAIVA e VENTURINI<sup>5,6</sup>]. Em todos os trabalhos anteriores considerou-se placas formadas de uma região de espessura constante, indicando-se a técnica das subregiões para análise de placas ou lajes formadas por diversos trechos de espessura constante. A formulação a ser desenvolvida aqui elimina a divisão da placa nas linhas de descontinuidade de espessura, baseando-se na proporcionalidade entre soluções fundamentais relativas a subregiões de diferentes rigidezes, como já desenvolvido para problemas potencial e elástico [VENTURINI<sup>7</sup>]. Com o processo proposto as representações integrais ficam dadas em função de deslocamentos e esforços do contorno externo e de deslocamentos das interfaces.

### - EQUAÇÕES INTEGRAIS

Para um domínio qualquer, formado por duas subregiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  de contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  (figura 1), a equação diferencial, em termos dos deslocamentos transversais  $w(s)$ , correspondente ao problema de flexão de placas é dado por:

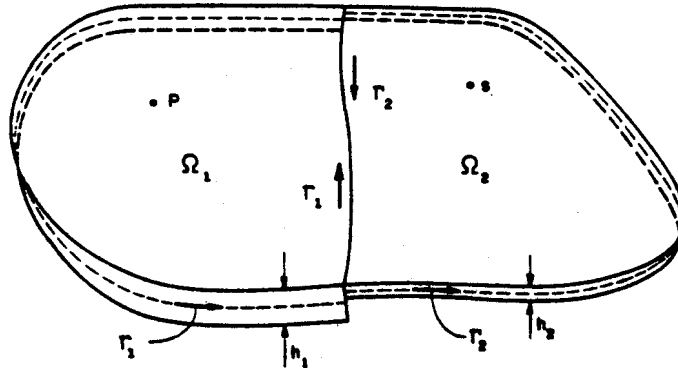


Fig. 1 - Placas com trechos de diferentes espessuras.

$$\nabla^4 w(s) = g(s)/D_m \quad (1)$$

onde  $g(s)$  é o carregamento uniformemente distribuído na superfície média da placa e  $D_m$  sua rigidez, que vale,

$$D_m = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

sendo E e  $\nu$  o módulo de deformação longitudinal e o coeficiente de Poisson do material, respectivamente.

Considerando-se as soluções fundamentais correspondentes a cada subregião, o teorema da reciprocidade pode ser aplicado individualmente, isto é,

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial^2 w(s)}{\partial x_i \partial x_j} m_{ij}^*(p,s) d\Omega(s) = \int_{\Omega_1} m_{ij}(s) \frac{\partial^2 w^*(p,s)}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega(s) \quad (3)$$

$$\int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 w(s)}{\partial x_i \partial x_j} m_{ij}^{**}(p,s) d\Omega(s) = \int_{\Omega_2} m_{ij}(s) \frac{\partial^2 w^{**}(p,s)}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega(s) \quad (4)$$

onde os valores caracterizados por "\*" e "\*\*" representam as respostas em momentos ou deslocamentos correspondentes à aplicação de cargas unitárias em domínios infinitos com características mecânicas dadas pelas subregiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  respectivamente.

Admitindo-se que o material da placa não varie de subregião para subregião, a relação de rigidezes  $D_1$  e  $D_2$  correspondentes a  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são apenas função das espessuras, levando, portanto, as soluções fundamentais em termos de deslocamentos a serem proporcionais, isto é:

$$w^{**}(p,s) = w^*(p,s) D_1/D_2 \quad (5)$$

Substituindo-se a equação (5) em (4) e associando-se esta à equação (3), obtém-se,

$$\int_{\Omega} m_{ij}^*(p,s) \frac{\partial^2 w(s)}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega(s) = \int_{\Omega} m_{ij}(s) \frac{\partial^2 w^*(p,s)}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega(s) - \frac{D_2 - D_1}{D_1} \int_{\Omega_2} m_{ij}^*(p,s) \frac{\partial^2 w(s)}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega(s) \quad (6)$$

Integrando-se a equação (6) por partes, duas vezes, e levando-se em conta a definição de solução fundamental, a representação integral para os deslocamentos transversais, considerando-se o caso generalizado com  $N_s$  subregiões, é obtida,

$$w(p) = \int_{\Gamma} \left[ V_n(S) w^*(p,S) - M_n(S) \frac{\partial w^*(p,S)}{\partial n} \right] d\Gamma(S) - \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{D} \int_{\Gamma_j} \left[ w(S) V_n^*(p,S) - \frac{\partial w(S)}{\partial n} M_n^*(p,S) \right] d\Gamma(S) + \sum_{C=1}^{N_c} R(C) w^*(p,C) - \sum_{C=1}^N \frac{D_C}{D} \sum_{C=1}^{N_c} w(C) R^*(p,C) + \int_{\Omega} g(s) w^*(p,s) d\Omega(s) \quad (7)$$

A partir de (7) obtêm-se a representação das rotações,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(p)}{\partial x_1} &= \int_{\Gamma} \left[ V_n(S) \frac{\partial w^*(p,S)}{\partial x_1} - M_n(S) \frac{\partial^2 w^*(p,S)}{\partial x_1 \partial n} \right] d\Gamma(S) \\ - \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{D} \int_{\Gamma_j} &\left[ w(S) \frac{\partial V_n^*(p,S)}{\partial x_1} - \frac{\partial w(S)}{\partial n} \frac{\partial M_n^*(p,S)}{\partial x_1} \right] d\Gamma(S) + \sum_{C=1}^{N_c} R(C) \frac{\partial w^*(p,C)}{\partial x_1} \\ - \sum_{j=1}^N \frac{D_j}{D} \sum_{C=1}^{N_c} &w(C) \frac{\partial R^*(p,C)}{\partial x_1} + \int_{\Omega} g(s) \frac{\partial w^*(p,S)}{\partial x_1} d\Omega(s) \end{aligned} \quad (8)$$

Nas equações (8) e (9),  $V_n$ ,  $M_n$ ,  $w$ ,  $\partial w/\partial n$  são esforços e deslocamentos relativos aos pontos do contorno das placas ou das interfaces incluídas nas somatórias em  $j$  indicadas.  $R(C)$  são as reações de canto que aparecem no problema devido as simplificações introduzidas. Como se pode perceber, as integrais sobre interfaces, que aparecem nos termos das somatórias em  $j$ , envolvem somente deslocamentos  $w(S)$  e  $\partial w(S)/\partial n$ . Assim, as incógnitas relativas a esforços não vão aparecer para os pontos da interface, ficando associadas apenas a pontos do contorno externo.

Como nos problemas usuais de placas, as equações (7) e (8) podem ser estendidas a pontos do contorno e das interfaces substituindo os termos independentes do lado esquerdo das equações respectivamente por  $C(P)w(P)$  e  $K_1(P)\partial w(P)/\partial x_1 + K_2(P)\partial w(P)/\partial x_2$ . Essas constantes podem ser obtidas de uma maneira similar ao caso da elasticidade linear [HARTMANN<sup>8</sup>]. Para os nós da interface tais constantes são dadas pelas somas dos valores calculados separadamente para cada subregião, como no caso dos problemas potencial e elástico [VENTURINI<sup>7</sup>].

#### - EQUAÇÕES MATRICIAIS

Aproximando-se o contorno e as interfaces por elementos, e assumindo-se uma função polinomial qualquer para representar deslocamentos e esforços em cada elemento, as equações (7) e (8), correspondentes às representações integrais de deslocamentos e rotações, se transformam em representações algébricas. Escrevendo-se tais equações na forma discretizada para pontos do contorno e das interfaces, de uma maneira a se ter tantas representações algébricas quantos forem os valores incógnitos, o sistema obtido pode ser representado, analogamente aos casos usuais do método, pela seguinte expressão:

$$\underline{HV} = \underline{GP} + \underline{B} \quad (9)$$

onde  $\underline{V}$  contém os deslocamentos dos nós do contorno e da interface;  $\underline{P}$  é o vetor das reações do contorno; e  $\underline{B}$  dá as influências das cargas de domínio.

Após a solução do sistema de equações (10), são determinados todos os valores incógnitos relacionados ao contorno e interfaces. Qualquer outro parâmetro que se pretenda determinar pode ser obtido a partir desses valores calculados, usando-se adequadamente as equações (7) e (8). No cálculo dos momentos, por exemplo, é necessário a obtenção

da representação correspondente, o que é feito a partir da diferenciação da equação (8).

- EXEMPLO NUMÉRICO

Analisa-se uma placa quadrada cujo domínio é formado por duas regiões retangulares iguais que apresentam uma relação de rigidezes  $D_2/D_1$  igual a 3,375. Os lados da placa e a interface foram divididos em 10 elementos lineares com descontinuidade de reação e deslocamento nos cantos da placa. A figura 2 mostra os resultados obtidos em termos de deslocamento ao longo da linha central para uma carga distribuída igual a  $g$  e considerando-se a placa simplesmente apoiada nos quatro lados. Para comparação, os deslocamentos também foram calculados pelo método dos elementos finitos com elemento T-18. Como se pode perceber, os valores obtidos apresentam uma boa concordância.

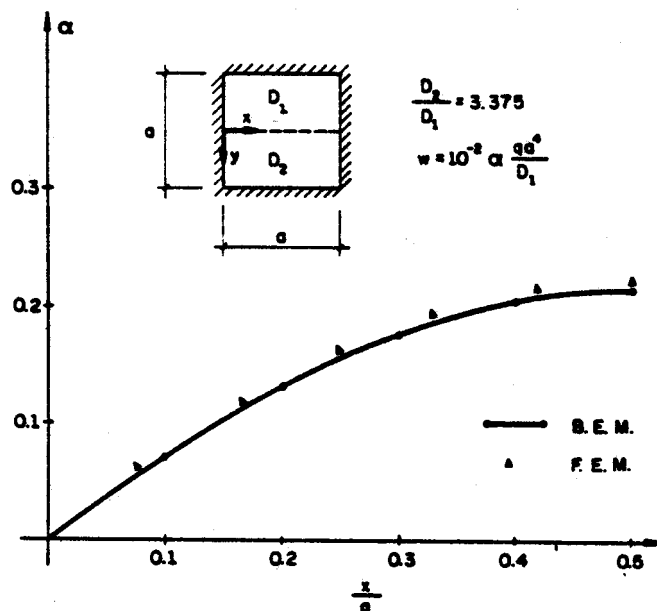


Fig. 2 - Placa simplesmente apoiada. Geometria e deslocamentos na interface.

A mesma placa foi ainda analisada para outros tipos de vinculação. Nas figuras 3 e 4 são apresentadas as respostas para a placa engastada nos quatro lados e para o caso em que dois lados paralelos são apoiados e os outros dois livres. Também nesses casos a resposta obtida se aproxima bem dos valores obtidos com o método dos elementos finitos.

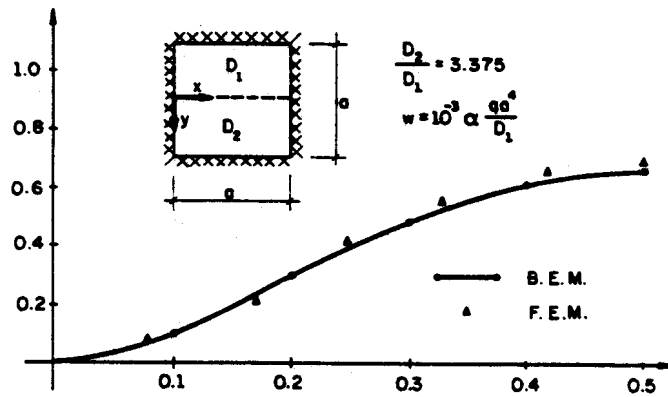


Fig. 3 - Placa engastada. Deslocamento ao longo da interface.

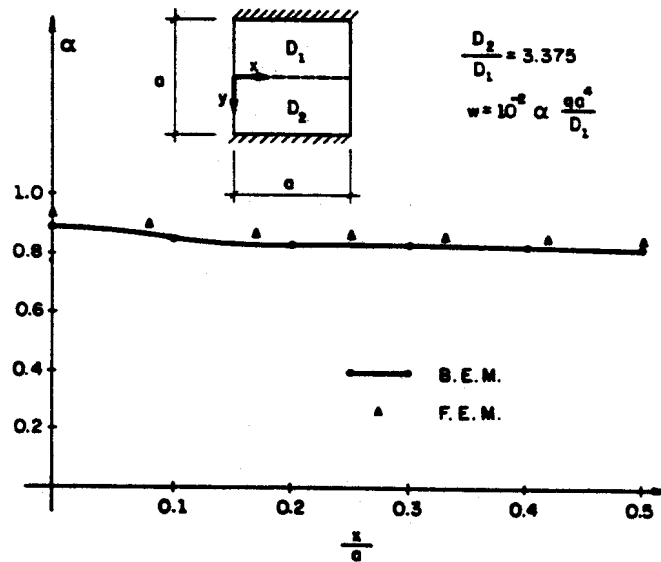


Fig. 4 - Placas com duas bordas paralelas livres. Deslocamento na interface.

- CONCLUSÕES

A formulação proposta permite a análise de placas com trechos de diversas espessuras sem a necessidade de se idealizar a divisão da mesma em subregiões. Esse esquema vai evitar as aproximações usuais das reações de canto nas extremidades internas, eliminando-se os erros decorrentes. São eliminadas também as aproximações dos esforços ao longo da interface, o que deve resultar em respostas mais precisas. O sistema gerado, embora cheio, fica bastante reduzido em comparação com os obtidos no caso da incorporação das condições de equilíbrio e compatibilidade.

- REFERÊNCIAS

- [1] Jawson, M.A. and Maiti, M. An Integral Formulation of Plate Bending Problem, Journal Engng. Math., Vol. 2, 1986, pp. 83-93.
- [2] Bezine, G.P. Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions, Mech. Res. Commun., Vol. 5, 1978, pp. 197-206.
- [3] Stern, M. A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problem, Int. J. Solids and Structures, Vol. 15, 1979, pp. 769-782.
- [4] Tottenham, H. The Boundary Element Method for Plates and Shells. Chapter 8, Development in Boundary Element Methods I, (Eds. Barerjee P.K. and Butterfield R), Elsevier Appl. Sci. Publ., 1979.
- [5] Paiva, J.B. and Venturini W.S. Boundary Element Algorithm for Building Floor Slab Analysis, in BETECH/85 (Eds. Brebbia C.A. and Noye B.J.), pp. 201-209, Proceedings of the 1<sup>st</sup> Boundary Element Technology Conference, Adelaide, Austrália, 1985. Springer-Verlag, Berlin and New York.
- [6] Paiva, J.B. and Venturini, W.S. Analysis of Building Structures Considering Plate-Beam-Column Interactions in Boundary Element Techniques: Application in Stress Analysis and Heat Transfer (Eds. Brebbia C.A. and Venturini, W.S.), C.M.L. Publ., Southampton, 1987.
- [7] Venturini, W.S. Alternative Formulations of the Boundary Element Method for Potential and Elastic Zoned Problems (to be published) 1988.
- [8] Hartmann, F. Computing the C-Matrix in Non-Smooth Boundary Points, in Proceeding of the Second Int. Sem. on Recent Advances in Boundary Element Methods (Ed. Brebbia C.A.), C.M.L. Publ., Southampton, 1980.