

ESCOLHA DO PONTO SINGULAR NA ANÁLISE DE PLACAS  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

João Batista de Paiva

Wilson Sérgio Venturini

Departamento de Estruturas - Escola de Engenharia de  
São Carlos - Universidade de São Paulo  
São Carlos - SP - Brasil

RESUMO

Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno para análise de placas elásticas consiste em se utilizar apenas a equação do deslocamento transversal e aplicá-la aos nós do contorno e a pontos definidos fora do domínio da placa. Neste trabalho apresenta-se um estudo numérico sobre a influência da posição dos pontos fora do domínio da placa delimitando a região onde podem ser escolhidos sem que ocorram singularidades na matriz do sistema final de equações algébricas.

ABSTRACT

An alternative formulation of the boundary element method for bending plate analysis is obtained by the use of only vertical displacement equations related with boundary nodes and other couple criteria singular points defined out of the domain. In this work, a numerical study on the singular point position is presented in order to establish the range in which can be chosen without introducing singularities in the system of algebraic equations.

## 1. INTRODUÇÃO

O método dos elementos de contorno se constitui, atualmente, em uma poderosa ferramenta para a análise dos mais diversos problemas de placas, podendo-se citar os trabalhos de MAITI [1], BEZINI [2], [3] e [4], STERN [5], JASWON [6], PARIS [7]. Nestes trabalhos as formulações adotadas foram a decomposição da equação bi-harmônica de placas em duas equações harmônicas, as quais são posteriormente resolvidas pelo método dos elementos de contorno [1], [6] e [7], e as que resolvem diretamente a equação bi-harmônica das placas [2], [3], [4] e [5], sendo necessário, neste caso, escrever, para cada ponto do contorno, duas equações integrais, correspondentes ao deslocamento transversal e sua derivada direcional. Embora forneça ótimos resultados, esta formulação apresenta o inconveniente de ter singularidades do tipo  $1/r^2$  na equação integral da derivada direcional, o que pode acarretar problemas numéricos.

Com o objetivo de evitar estes problemas numéricos, foi apresentada uma formulação alternativa, PAIVA [8], que consiste em se utilizar apenas a equação integral do deslocamento transversal para pontos do contorno e para pontos fora do domínio da placa. Entretanto, a posição destes pontos fora do domínio não pode ser estabelecida arbitrariamente, pois podem ocasionar singularidades na matriz do sistema final de equações algébricas. Neste trabalho apresenta-se um estudo numérico sobre a influência da posição destes pontos delimitando a região onde podem ser escolhidos sem que ocorram tais singularidades.

## 2. EQUAÇÕES INTEGRAIS

A representação do deslocamento transversal de um ponto genérico é dada por:

$$\begin{aligned}
 K(P)W(P) + \int_{\Gamma} [v_n^*(P,S)w(S) - m_n^*(P,S)\frac{\partial w}{\partial n}(P)] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(P,S)w_{c_i}(S) = \\
 = \int_{\Gamma} [w^*(P,S)v_n(S) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(P,S)m_n(S)] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} w_{c_i}^*(P,S)R_{c_i}(S) + \\
 + \int_{\Omega_g} g w^*(p,s) d\Omega(s) \quad (1)
 \end{aligned}$$

onde:

$K(P) = 1$  se  $P$  é um ponto do domínio da placa;

$K(P) = 1/2$  se  $P$  é um ponto não angular do contorno;

$K(P) = 0$  se  $P$  é um ponto fora do domínio da placa;

$R_{c_i}^*(P,S)$  e  $R_{c_i}(S)$  são as reações de canto da placa dos problemas fundamental e real.

Derivando-se a equação integral do deslocamento em relação a um sentido arbitrário, obtém-se a segunda equação integral de placas.

$$K(P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial v_n^*}{\partial n}(P,S)w(S) - \frac{\partial m_n^*}{\partial n}(P,S)\frac{\partial w}{\partial n}(S) \right] d\Gamma(S) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial m}(P, S) w_{c_i}(S) = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial m}(P, S) v_n(S) - \frac{\partial^2 w^*}{\partial m \partial n}(P, S) m_n(S) \right] d\Gamma(S) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial m}(P, S) R_{c_i}(S) + \int_{\Omega_g} g \frac{\partial w^*}{\partial m}(P, S) d\Omega(S) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Na formulação usual para a análise de placas as equações integrais (1) e (2) são utilizadas conjuntamente. Na solução alternativa [8] é utilizada apenas a equação (1).

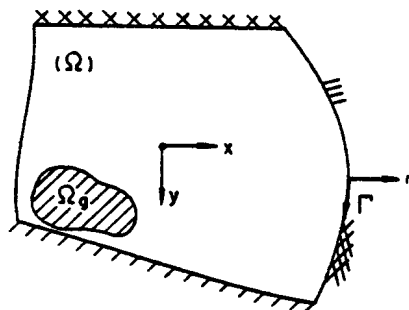


Fig. 1 - Placa em análise.

### 3. EQUAÇÕES MATRICIAIS

Na formulação do método dos elementos de contorno aproxima-se o contorno por uma série de segmentos denominados "elementos de contorno", aos quais se associam um ou mais pontos nodais. A cada ponto nodal são associadas as quatro variáveis das equações (1) e (2), ou seja,  $w$ ,  $\partial w / \partial n$ ,  $v_n$  e  $m_n$ . Destas, duas sempre são conhecidas em cada ponto do contorno, restando, portanto, duas incógnitas associadas a cada nó dos elementos. Portanto, deve-se obter um número de equações algébricas igual ao dobro do número de nós do contorno. Estas equações são obtidas na formulação usual, escrevendo-se as equações (1) e (2) para cada nó do contorno.

Na formulação alternativa é utilizada apenas a equação (1), porém aplicando-a aos nós do contorno e a um número igual de pontos definidos fora do domínio da placa (ver figura 2). Como o coeficiente  $K(P)$  destes pontos é zero, nenhuma incógnita adicional é introduzida no sistema final de equações. Os pontos fora do domínio da placa são escolhidos de tal forma que acompanhem seu contorno.

Um sistema de equações algébricas análogo ao do procedimento usual é obtido após a discretização do contorno:

$$[H] \{U\} = [G] \{P\} + \{Q\} \quad (3)$$

que, após a imposição das condições de contorno, pode ser escrito:

$$[A] \{X\} = \{B\} \quad (4)$$

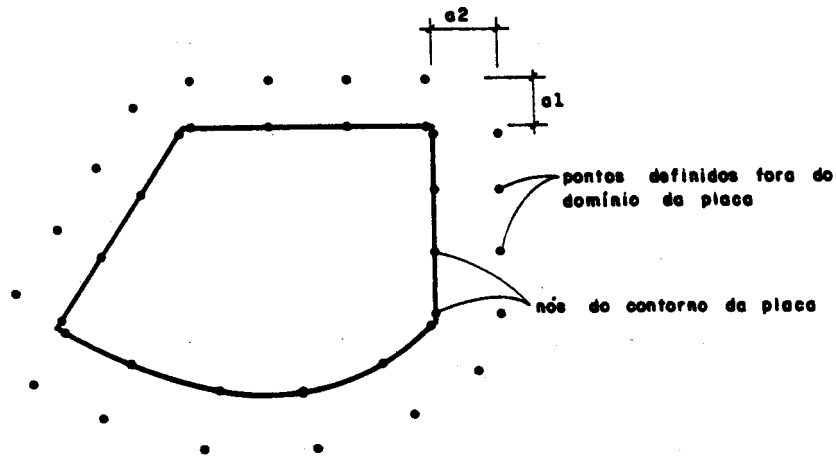


Fig. 2 - Pontos de carregamento definidos no contorno e fora do domínio da placa.

onde  $\{X\}$  é o vetor formado pelas incógnitas do contorno. Após a resolução deste sistema de equações, deslocamentos e esforços em pontos do domínio são obtidos a partir de (1).

#### 4. EXEMPLOS

Em diversos testes realizados, adotando-se a distância dos pontos fora do domínio ao contorno da placa igual ao comprimento do elemento de contorno, a formulação alternativa se mostrou superior à formulação usual. Nas figuras 3 e 4 estão representadas, em função do número de elementos de contorno, as diferenças percentuais entre os valores do deslocamento transversal e dos esforços no centro de uma placa quadrada, simplesmente apoiada no contorno e com carregamento uniformemente distribuído, e os valores exatos [9].

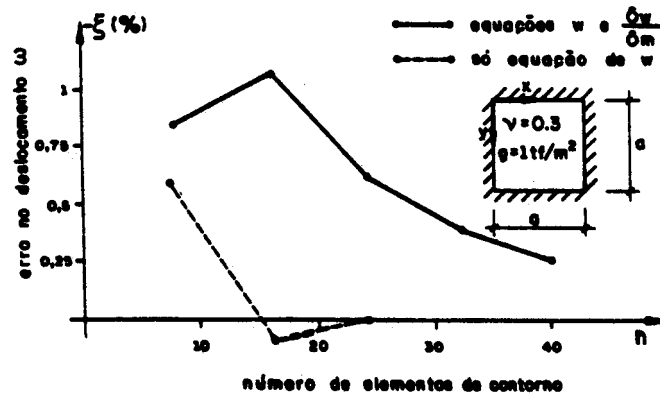


Fig. 3

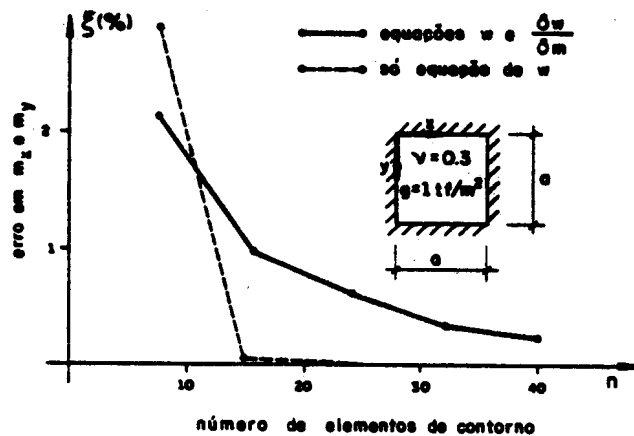


Fig. 4

Para se determinar a influência da distância dos pontos externos ao contorno, foi analisada esta mesma placa para várias posições dos pontos externos, admitindo-se inicialmente que a distância destes pontos ao contorno é constante (ver figura 5).

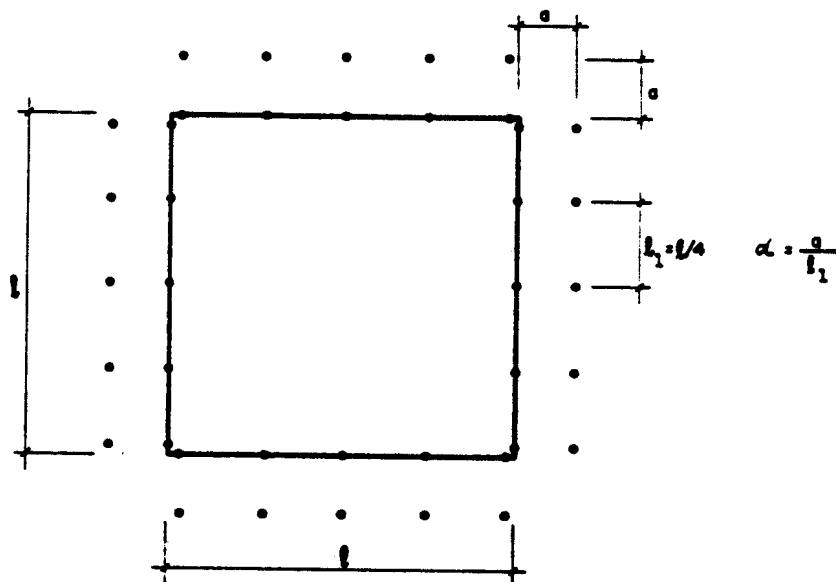


Fig. 5 - Placa com pontos de carregamento definidos no contorno e fora do domínio da placa.

O contorno da placa foi dividido, inicialmente, em 16 elementos de igual comprimento, e a relação entre a distância dos pontos externos ao contorno,  $a$ , e o comprimento dos elementos de contorno,  $l_1$ , é indicado por  $\alpha$ .

Na figura 6 estão indicadas as diferenças percentuais entre os valores do deslocamento e esforços no centro da placa, obtidos para vários valores de  $\alpha$ , e os exatos [9]. Pode-se observar que à medida que se aumenta o valor de  $\alpha$  o erro também aumenta. Para valores de  $\alpha$  superiores a 7, ocorrem singularidades na matriz do sistema de equações algébricas (4). Estas singularidades decorrem do fato de que, para valores grandes de  $\alpha$ , as equações algébricas referentes a dois pontos externos próximos um do outro, tendem a se tornarem iguais.

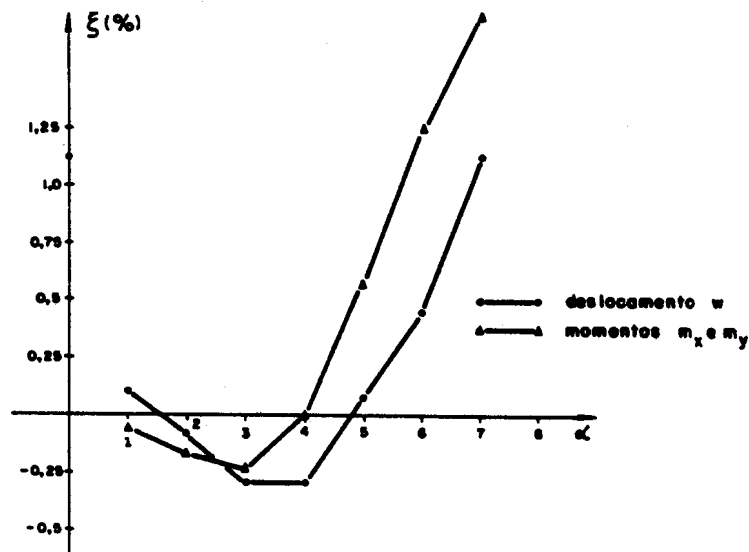


Fig. 6 - Erros nos deslocamentos e esforços em função de  $\alpha$ .

Esta placa também foi analisada com a divisão de contorno indicada na figura 5 e considerando-se uma variação na posição dos pontos externos. Inicialmente o valor de  $\alpha$  foi considerado constante para cada lado da placa (figura 7.a) e, posteriormente, o valor de  $\alpha$  foi considerado aleatório para cada ponto externo (figura 7.b). No primeiro caso, para valores de  $\alpha$  inferiores a 7, o erro observado, tanto nos deslocamentos como nos esforços, foram inferiores a 0,1%. Se, para algum dos lados da placa, o valor de  $\alpha$  for superior a 7, a matriz do sistema de equações (4) torna-se singular. No segundo caso foi considerado, inicialmente, que a posição dos pontos externos, embora aleatória, fossem inferior a 7. Neste caso o erro observado foi inferior a 1,0%. Em uma segunda etapa, os valores de  $\alpha$  foram inferiores e superiores a 7, alternadamente. Neste caso o erro observado foi inferior a 0,5% e, finalmente, todos os pontos externos tinham  $\alpha > 7$ , aleatoriamente e, neste caso a matriz do sistema de equações (4) tornou-se singular.

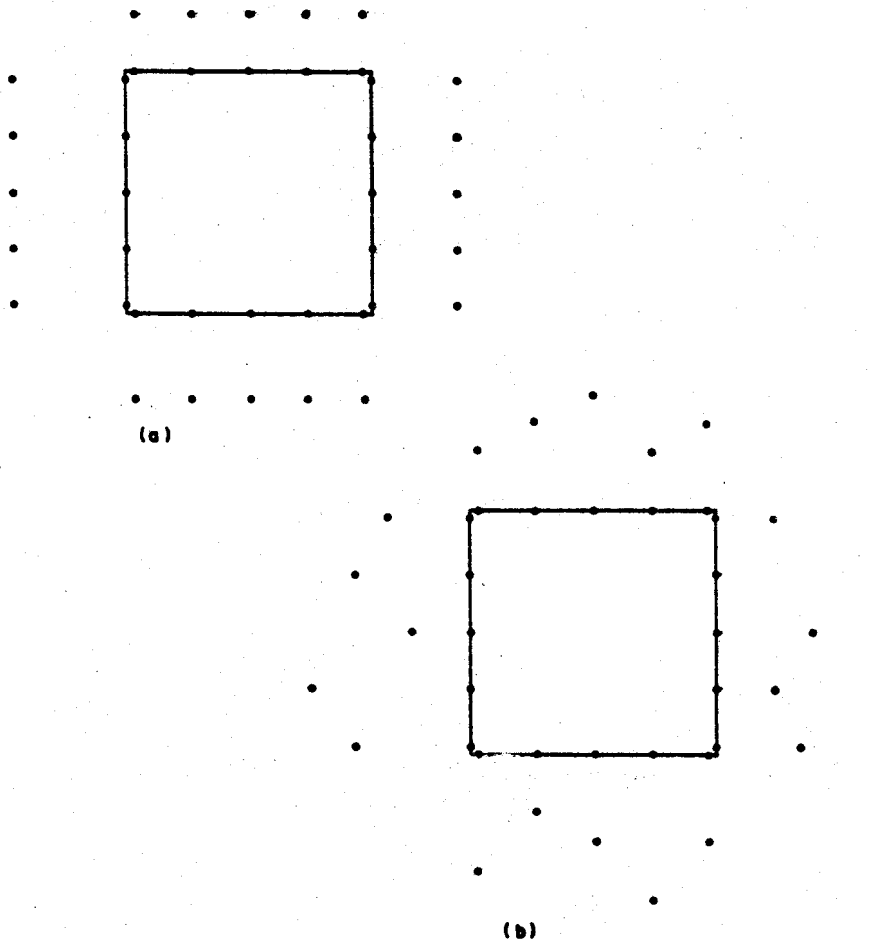


Fig. 7 - Pontos definidos fora do domínio da placa. a) distância  $\alpha$  constante para cada lado; b)  $\alpha$  variável para cada ponto.

Todas as análises realizadas para a divisão do contorno da placa em 16 elementos foram realizadas também para uma divisão do contorno em 40 elementos de igual tamanho, conforme indica a figura 8. Nas análises em que o valor de  $\alpha$  era constante para todos os pontos externos, os valores do deslocamento e momentos fletores no centro da placa coincidiam com os valores exatos quando  $1 \leq \alpha \leq 4$ . Para valores superiores, a matriz do sistema de equações tornou-se singular.

A mesma precisão (erro = 0%) foi observada para as posições variáveis dos pontos externos, valendo as mesmas observações feitas para as análises com o contorno da placa dividido em 16 elementos, salientando-se que o valor limite de  $\alpha$ , neste caso, é 4.

Todas as análises anteriormente mencionadas foram feitas considerando-se aproximação linear para os deslocamentos e esforços no contorno e as integrações numéricas foram feitas utilizando-se 6 pontos de Gauss.

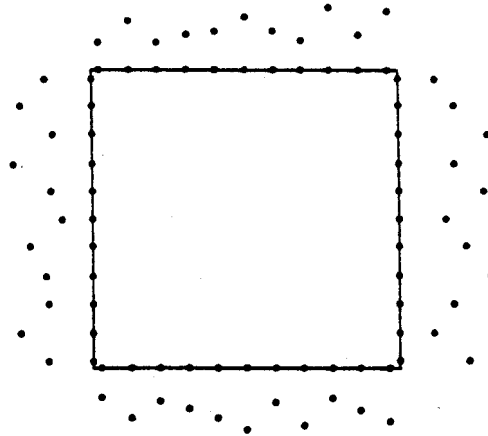


Fig. 8 - Contorno da placa dividido em 40 elementos e pontos definidos fora do seu domínio.

#### CONCLUSÕES

Em todos os exemplos apresentados, ficou demonstrado que a formulação que utiliza apenas a equação integral do deslocamento conduz a ótimos resultados, entretanto, os pontos fora do domínio não podem ser escolhidos arbitrariamente, pois podem provocar singularidades na matriz do sistema de equações algébricas (4). A região onde estes pontos podem ser definidos varia em função do tamanho dos elementos de contorno e do número de pontos usados na integração numérica.

Também ficou demonstrado que mesmo dentro desta região admissível, o erro aumenta para valores de  $\alpha$  próximos do limite superior. Portanto é recomendável que o valor de  $\alpha$  seja o menor possível, devendo-se levar em conta, entretanto, que para pontos muito próximos do contorno ( $\alpha < 1$ ), torna-se necessário a utilização de mais pontos de Gauss na integração numérica para se obter a mesma precisão. Assim, o valor mais indicado é  $\alpha = 1$ , pois além de apresentar ótimos resultados, as integrações podem ser feitas com seis pontos de Gauss. Caso o contorno tenha elementos de comprimento variável, recomenda-se que seja adotado um afastamento igual à média aritmética dos comprimentos dos elementos próximos a cada ponto externo.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Maiti, M. & Chackrabarty, S.K. Integral equation solution for simply supported polygonal plates. International Journal Engineering Science, 12:793-806, 1974.
- [2] Bézine, G. Boundary integral formulation for plate flexure arbitrary boundary conditions. Mechanics Research Communications, 5(4):197-206, 1978.
- [3] Bézine, G.P. & Gamby, D.A. A new integral equation formulation



- for plate bending problems. In: BREBBIA, C.A. ed. Recent advances in Boundary element methods. London, Pentch Press, 1978. p. 327-342.
- [4] Bézine, G.P. A mixed boundary integral: finite element approach to plate vibration problem. Mechanics Research Communications, 7(3):141-150, 1980.
- [5] Stern, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plates bending problems. Int. Journal of Solids Structures, 15:769-782, 1979.
- [6] Jaswon, M.A. & Maiti, M. An integral equation formulation of plate bending problems. Journal of Engineering Mathematics, 2: 83-93, 1968.
- [7] Paris, F. & León, S. Simply supported plates by the boundary integral equations method. International Journal of the Numerical Methods in Engineering, 23(2):173-191, Feb., 1986.
- [8] Paiva, J.B. & Venturini, W.S. Uma formulação alternativa para a resolução de placas via método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO E IBERICO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 8., Rio de Janeiro, 3-5 nov. 1987. Anais. v. B, p. 307-314.
- [9] Timoshenko, S. & Wrainowski-Krieger, S. Theory of plates and shells. New York, McGraw-Hill, 1959.