

UN ELEMENTO PLANO BASADO EN EL METODO DE
LA INTERPOLACION MIXTA DE COMPONENTES TENSORIALES

* **
Sara I. Vassolo - Eduardo N. Dvorkin

Instituto de Materiales y Estructuras
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

RESUMEN

Se presenta un elemento cuadrilátero plano para análisis lineal y no-lineal de tensiones. El elemento se basa en la técnica de interpolación mixta de componentes tensoriales. El elemento cumple con los requerimientos necesarios como para ser usado con confiabilidad en la práctica ingenieril.

ABSTRACT

A 2D quadrilateral element for linear and nonlinear analysis is presented. The new element is based on the technique of mixed interpolation of tensorial components. The new element satisfies our reliability requirements and therefore can be used as an engineering tool.

*
Investigadora del Instituto Nacional de Tecnología Industrial.

**
Profesor de Mecánica del Sólido.

INTRODUCCION

En los últimos años se han efectuado numerosas investigaciones, en el campo de la mecánica del sólido, sobre formulaciones variacionales y las correspondientes técnicas de elementos finitos asociadas. Washizu y Pian y Tong, pioneros en estos desarrollos, presentaron en las Refs.[1] y [2], respectivamente, una clasificación de los distintos métodos de elementos finitos para mecánica del sólido. De todos ellos, el método basado en la interpolación de desplazamientos es el más usado para análisis lineal y no-lineal de sólidos y estructuras. Prácticamente la totalidad de los programas comerciales de elementos finitos utilizan elementos basados en este método.

Sin embargo, el método basado en la interpolación de desplazamientos da resultados pobres en determinados problemas. Como ejemplo podemos citar el estudio de sólidos incompresibles y el estudio de estructuras cáscara.

Se han desarrollado numerosas investigaciones a fin de lograr elemento finitos que superen las deficiencias del método de interpolación de desplazamientos, y que puedan usarse en los programas generales de elementos finitos, con resultados aceptables. Como ejemplos podemos citar los elementos híbridos desarrollados por Pian y colaboradores [2-4]; los elementos mixtos desarrollados para casos de incompresibilidad por Bercovier y colaboradores [5] y por Sussman y Bathe [6]; y los elementos basados en la interpolación mixta de componentes tensoriales desarrollados para el análisis de cáscaras por Bathe y Dvorkin [7-9].

En el análisis de sólidos bidimensionales, el elemento cuadrilátero basado en la intepolación de desplazamientos, también da resultados pobres. Siendo un elemento de cuatro nodos, muy útil en la práctica ingenieril, resulta atractivo mejorar su funcionamiento a través de una formulación alternativa [10]. En un trabajo presentado por Bathe y Dvorkin [9] se fijaron los requerimientos a cumplir para el desarrollo de nuevos elementos de cáscara. En el caso de elementos bidimensionales continuos, éstos requerimientos pueden sintetizarse de la siguiente forma:

1. La formulación teórica del elemento debe basarse en la mecánica del continuo, con suposiciones en la discretización por elementos finitos que resulten claras tanto para el análisis lineal como para el no-lineal.
2. El elemento no debe tener modos rígidos espurios.
3. El elemento debe satisfacer el Patch Test de Irons [11] (ver Apéndice I de la Ref.[13]).
4. La capacidad de predicción del elemento debe ser buena y relativamente insensible a las distorsiones de los elementos y a los cambios de propiedades de los materiales (por ejemplo, en el caso de un material elástico con un coeficiente de Poisson próximo a 0.5, no debe deteriorarse excesivamente el comportamiento del elemento).

En la presente publicación presentamos un elemento de 4 nodos, basado en la interpolación mixta de componentes tensoriales [7-9], que intenta satisfacer los criterios arriba expuestos.

Es importante destacar que en una reciente publicación [12] MacNeal demostró que en elementos con sólo ocho grados de libertad externos no es posible satisfacer el Patch Test conservando una alta insensibilidad a las distorsiones de los elementos. Hemos optado, obviamente por el estricto cumplimiento del Patch Test.

Detalles adicionales sobre la presente formulación pueden encontrarse en nuestra Ref.[13].

EL NUEVO ELEMENTO

En las investigaciones que realizamos para obtener el nuevo elemento buscamos siempre satisfacer los 4 requerimientos ya fijados, tanto como fuese posible. Como herramienta básica usamos el Patch Test. Una vez cumplido se media el orden de convergencia del elemento en cuestión resolviendo algunas problemas existentes en la bibliografía.

Análisis con geometría lineal

Al formular nuestro elemento con el método de interpolación mixta de componentes tensoriales, se adoptaron una interpolación para los desplazamientos y otra para las deformaciones, uniéndolas luego convenientemente.

Para interpolar el campo de desplazamientos dentro del elemento se usaron las funciones de un elemento isoparamétrico de 5 nodos (ver Fig.1-a).

En el sistema de coordenadas naturales de un elemento se puede escribir el tensor de deformaciones usando las componentes covariantes ($\hat{\epsilon}_{ij}$) y los vectores base contravariantes (\hat{g}^i) [14].

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \hat{\epsilon}_{rr} \hat{g}^r \hat{g}^r + \hat{\epsilon}_{\theta\theta} \hat{g}^\theta \hat{g}^\theta + \hat{\epsilon}_{r\theta} (\hat{g}^r \hat{g}^\theta + \hat{g}^\theta \hat{g}^r) + \hat{\epsilon}_{\theta r} \hat{g}^\theta \hat{g}^r \quad (1)$$

$\hat{\epsilon}_{\theta r} = 0$ para problemas de estado plano de deformaciones.

Si se define $\hat{g}^i = \hat{g}^i |_{r=\lambda=0}$ (centro del elemento) y $\hat{g}^i = \hat{g}^i |_{r=\lambda=0}$ para cualquier punto del elemento se puede escribir:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \hat{\epsilon}_{rr} \hat{g}^r \hat{g}^r + \hat{\epsilon}_{\theta\theta} \hat{g}^\theta \hat{g}^\theta + \hat{\epsilon}_{r\theta} (\hat{g}^r \hat{g}^\theta + \hat{g}^\theta \hat{g}^r) + \hat{\epsilon}_{\theta r} \hat{g}^\theta \hat{g}^r \quad (2)$$

donde $\hat{\epsilon}_{ij} = \hat{\epsilon}_{lm} (\hat{g}_i \cdot \hat{g}^l) (\hat{g}^m \cdot \hat{g}_j)$

Para interpolar el campo de deformaciones dentro de un elemento se usan las siguientes fórmulas de interpolación:

$$\hat{\epsilon}_{rr} = \hat{\epsilon}_{rr}|_0^{PI} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{|J_0|}{|J|} \left[(\hat{\epsilon}_{rr}|_B^{PI} - \hat{\epsilon}_{rr}|_O^{PI}) T + (\hat{\epsilon}_{rr}|_A^{PI} - \hat{\epsilon}_{rr}|_C^{PI}) A \right] \quad (3.a)$$

$$\hat{\epsilon}_{\theta\theta} = \hat{\epsilon}_{\theta\theta}|_0^{PI} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{|J_0|}{|J|} \left[(\hat{\epsilon}_{\theta\theta}|_B^{PI} - \hat{\epsilon}_{\theta\theta}|_O^{PI}) T + (\hat{\epsilon}_{\theta\theta}|_A^{PI} - \hat{\epsilon}_{\theta\theta}|_C^{PI}) A \right] \quad (3.b)$$

$$\hat{\epsilon}_{r\theta} = \hat{\epsilon}_{r\theta}|_0^{PI} \quad (3.c)$$

En el caso axil simétrico $\hat{\epsilon}_{\theta\theta} = \hat{\epsilon}_{\theta\theta}|_0^{PI}$

En las fórmulas anteriores se tiene:

$\hat{\epsilon}|_{A,B,C,D,O}^{PI}$: componentes del tensor de deformación en los puntos A, B, C, D y O (ver Fig.1.b) evaluadas con la interpolación de desplazamientos.

$|J_0|$: Jacobiano en el punto O ($r=0, s=0$).

$|J|$: Jacobiano en el punto de integración (r, s)

Las interpolaciones adoptadas cumplen con los siguientes requisitos:

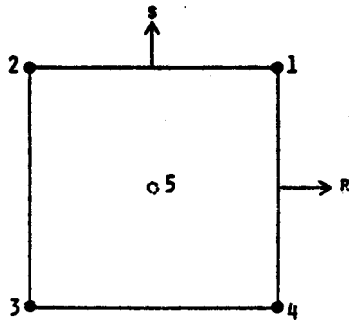
1. No presentan modos rígidos espurios.
2. Satisfacen el Patch Test de Irons (ver Ref.[13])
3. Pueden representar exactamente, en elementos rectangulares, un estado de flexión pura (ver los ejemplos numéricos). Esto implica una mejora importante frente a los elementos cuadriláteros basados en la interpolación de desplazamientos.

Los dos desplazamientos del nodo 5 de la Fig.1.a son condensados según se muestra en el Apéndice II de la Ref.[13], de esta forma el elemento resulta con sólo ocho grados de libertad.

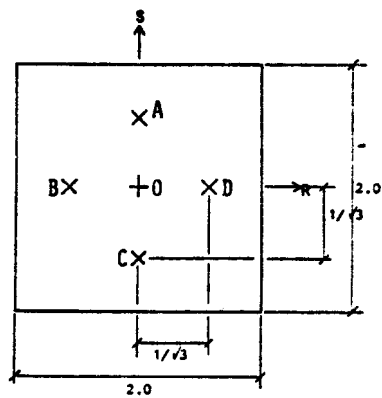
Análisis de la no-linealidad geométrica

En nuestra Ref. [13] hemos desarrollado la Formulación Total de Lagrange del nuevo elemento. Las funciones de interpolación propuestas se emplearon sobre las componentes del tensor de deformaciones de Green-Lagrange [14,15].

Los dos desplazamientos correspondientes al nodo 5 de la Fig.1.a son condensados, como se muestra en el Apéndice II de la Ref.[13]; así el elemento resulta con sólo ocho grados de libertad.



(A) MODOS USADOS EN LA INTERPOLACION DE DESPLAZAMIENTOS



(B) PUNTOS USADOS EN LA INTERPOLACION DE DEFORMACIONES

FIGURA 1. INTERPOLACIONES USADAS

VERIFICACIONES NUMERICAS

En esta sección estudiamos el comportamiento numérico del nuevo elemento. en forma organizada, logrando los siguientes objetivos:

1. Mostramos que el elemento converge, es decir que resulta estable y consistente [16].
2. Examinamos los resultados que se obtienen con algunos problemas lineales y los comparamos con los obtenidos con otros elementos.
3. Analizamos la respuesta no-lineal del elemento.

Las soluciones numéricas aquí presentadas fueron obtenidas, en su totalidad, usando una integración de Gauss de 2×2 .

En lo que sigue el nuevo elemento será referenciado como QMITC y el elemento de cuatro nodos, basado en la interpolación de desplazamientos como STD-4N.

Convergencia

A fin de chequear la estabilidad de nuestro elemento corrimos algunos casos unielementales usando, en ellos, elementos distorsionados y no distorsionados. Las condiciones de borde fueron las mínimas necesarias para impedir los tres movimiento rígidos del elemento. No se presentaron modos rígidos espurios.

Lo anterior equivale a verificar los autovalores de la matriz rigidez correspondiente a un elemento libre [17].

Con el fin de verificar la consistencia de la formulación, corrimos el Patch Test. Usamos la malla representada en la Fig.2, con el menor número de restricciones externas necesario para suprimir los tres movimientos rígidos del modelo. Para todos los casos de carga representados en la Fig.2, los desplazamientos y tensiones obtenidos con el modelo son idénticos a los valores analíticos.

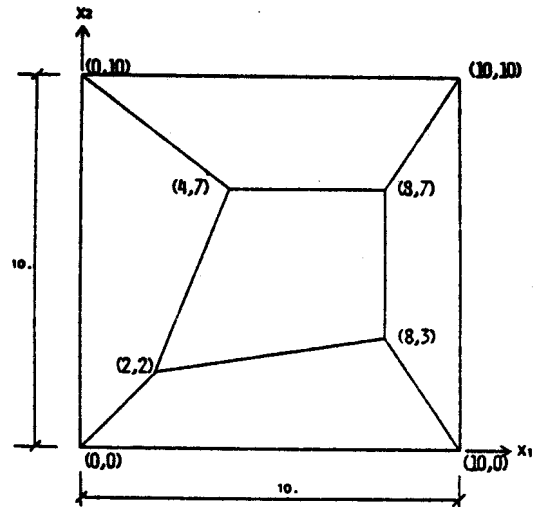
Estos resultados numéricos confirman las predicciones expresadas en el Apéndice I de la Ref.[13].

Problemas lineales

1. Elementos rectangulares en estado plano de tensiones bajo flexión constante

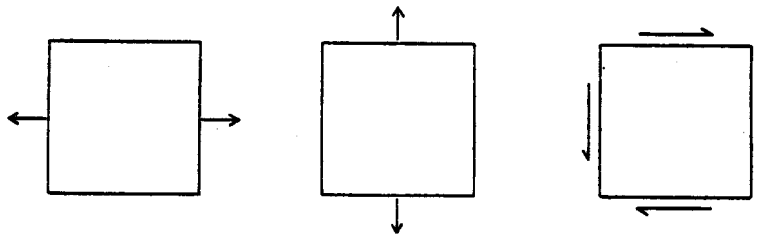
En la Fig.3.a mostramos un elemento rectangular QMITC bajo flexión constante. Los desplazamientos y tensiones que obtenemos coinciden con los valores analíticos.

En la Fig.3.b se comparan los resultados que obtenemos con el elemento QMITC contra los que obtenemos con el STD-4N para una malla de elementos rectangulares bajo flexión constante. Mientras que al aumentar la relación l/h el STD-4N da resultados cada vez más pobres, el QMITC no resulta afectado.



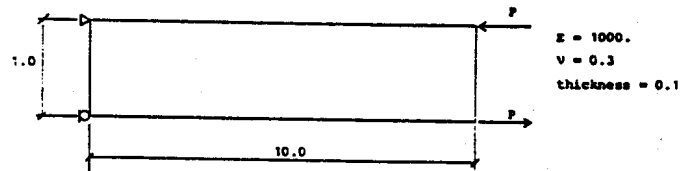
$E = 2.1 \times 10^6$
 $\nu = 0.3$
thickness = 0.1

(A) PATCH DE ELEMENTOS CONSIDERADOS

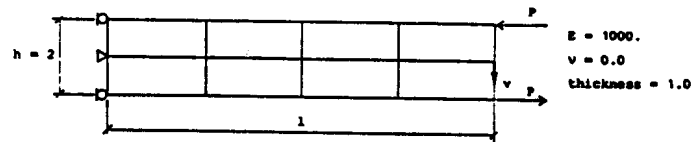


(B) CASOS DE CARGA

FIGURA 2. PATCH TESTS



(A) CASO DE UN ELEMENTO



l/h	$\sqrt{\frac{FEM}{ANALYT.}}$	
	QMTC	STD-4N
5.	1.00	0.56
10.	1.00	0.24
50.	1.00	0.013
100.	1.00	0.0032

(B) MALLA DE ELEMENTOS RECTANGULARES

FIGURA 3. ELEMENTOS RECTANGULARES EN PLANE STRESS BAJO CARGA CONSTANTE

2. Elementos rectangulares en estado plano de tensiones bajo flexión variable

En la Fig.4 comparamos los resultados del QMITC con los del STD-4N para una malla de elementos rectangulares sometida a flexión variable linealmente. La convergencia del nuevo elemento es mucho más rápida que la del standard.

3. Elementos distorsionados en estado plano de tensiones bajo flexión constante

Aunque para la malla de la Fig.5.a, también utilizada por Pian y Sumihara [4], hay una buena correlación entre los resultados obtenidos con el QMITC y los analíticos; los resultados obtenidos con la malla de la Fig.5.b no son tan próximos a los analíticos, pero son siempre mejores que los obtenidos con el STD-4N.

McNeal [12] demostró que los resultados de los elementos cuadriláteros se deterioran cuando se utilizan elementos trapezoidales.

Es importante señalar que Pian y Sumihara [4] presentaron un elemento híbrido con 4 modos incompatibles e interpolación de tensiones en el sistema de coordenadas naturales, que aparenta ser más insensible a la distorsión de los elementos que el QMITC.

4. Elementos rectangulares en estado plano de deformación bajo flexión constante

En la Fig.6 comparamos los resultados obtenidos con el QMITC con los obtenidos con el STD-4N, para dos mallas distintas, ambas con elementos en estado plano de deformación y bajo flexión constante.

El elemento QMITC predice mejores resultados que el elemento standard, siendo también más insensible al aumento del coeficiente de Poisson.

Taylor et al. [17] usaron un test similar para analizar el efecto del aumento del coeficiente de Poisson combinado con la distorsión en el comportamiento de elementos.

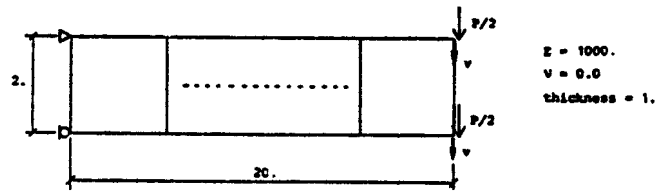
5. Placa circular simplemente apoyada bajo carga central concentrada

En la Fig.7 mostramos una placa circular simplemente apoyada ($R/h = 100$), bajo una carga concentrada lineal, modelada con elementos axilsimétricos.

El QMITC muestra una convergencia mucho más rápida que el elemento standard.

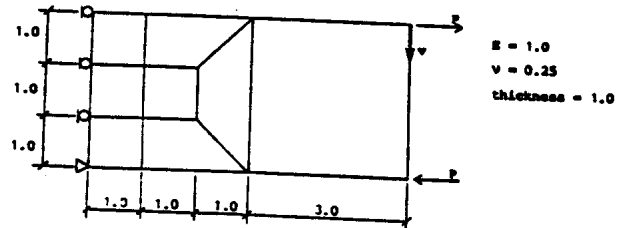
6. Cargas térmicas

Normalmente es más difícil obtener buenos resultados con elementos finitos, cuando se analizan cargas térmicas que bajo cargas mecánicas [18].



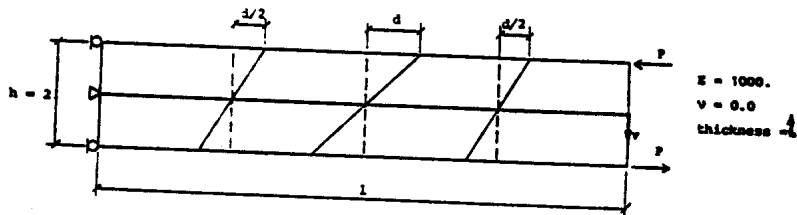
N	$\sqrt{\frac{FEH}{V}} \frac{\text{ANALYT.}}{V}$	
	QNTC	STD-EN
1	0.76	0.02
2	0.94	0.07
3	0.98	0.16
4	0.99	0.24
5	1.00	0.34

FIGURA 4. ELEMENTOS RECTANGULARES EN PLANE STRESS BAJO FLEXION LINEAL.



$\sqrt{FEM} / \sqrt{ANALYT.}$	
QMTC	0.948
STD-4N	0.829

(A) MALLA DISTORSIONADA I



L/h	$\sqrt{FEM} / \sqrt{ANALYT.}$			
	d = 1.0		d = 2.0	
	QMTC	STD-4N	QMTC	STD-4N
5	0.852	0.403	0.631	0.250
10	0.824	0.161	0.615	0.097

(B) MALLA DISTORSIONADA II

FIGURA 5. ELEMENTOS DISTORSIONADOS EN PLANE STRESS BAJO FLEXION CONSTANTE

Si usamos el elemento STD-4N en problemas termoelásticos, la temperatura se interpola con las mismas funciones de interpolación que los desplazamientos. Si usamos el QMITC, las deformaciones térmicas se interpolan con las Ecs.(3).

En la Fig.8 mostramos un elemento rectangular libre de dilatarse. Cuando el elemento está bajo temperatura constante, ambos elementos, el QMITC y el STD-4N, predicen los desplazamientos exactos y las tensiones exactas ($\sigma_{ij} = 0$) porque ambos elementos satisfacen el Patch Test.

Pero cuando se les impone una distribución lineal de la temperatura de la forma $\theta = a + by + cz$, aún cuando la solución analítica es $\sigma_{ij} = 0$, el STD-4N predice grandes tensiones parásitas, mientras que el QMITC da la solución exacta.

Problema no-lineal

En la Fig.9 mostramos una viga en voladizo bajo flexión constante y comparamos los resultados analíticos con los proporcionados por el QMITC y el STD-4N, usando una Formulación Total de Lagrange.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo presentamos un elemento cuadrilátero bidimensional, basado en la técnica de interpolación mixta de componentes tensoriales.

El elemento no presenta modos rígidos espurios y pasa el Patch Test.

El nuevo elemento satisface los requerimientos presentados en la Introducción, y aunque los resultados numéricos demuestran que no es tan insensible a las distorsiones de los elementos como es de desear, McNeal [12] demostró que existe un límite en lo que puede lograrse con elementos que tienen sólo ocho "grados de libertad externos".

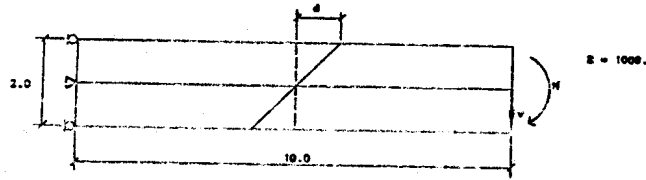
Creemos que este elemento también constituye una base para el diseño futuro de interpolación de deformaciones en elementos de cáscara [7].

Agradecimientos: El trabajo de investigación que se expone se desarrolló en el marco de un convenio de investigación entre el Instituto de Materiales de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires y el Instituto Nacional de Tecnología Industrial.

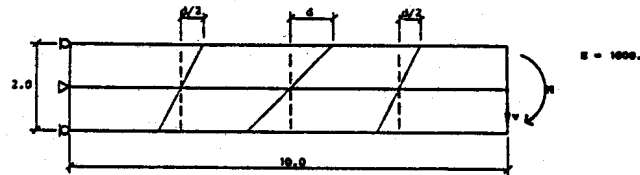
REFERENCIAS

1. K.Washizu. Variational Methods in Elasticity and Plasticity, (3ra.Edición); Pergamonn Press, 1982.
2. T.H.H.Pian y P.Tong. "Basis of Finite Element Methods for Solid Continua", Int.J.Numerical Methods in Engg., 1, pp.3-28,1969.
3. T.H.H.Pian. "Variational and Finite Element Methods in Structural Analysis", RCA Review, 39, 1987.
4. T.H.H.Pian y K.Sumihara, "Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements", Int.J.Numerical Methods in Engg., 20, pp.1685-1695, 1984.
5. M.Bercovier, J.Hasbani, J.Gilou y K.J.Bathe, "On a Finite Element Procedure for Nonlinear Incompressible Elasticity", publicado en Hybrid and Mixed Finite Element Methods, (Ed.Atluri et al.), John Wiley & Sons, 1983.
6. T.Sussman y K.J.Bathe, "A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis", Computers & Structures, 26, pp.357-409,1987.
7. E.N.Dvorkin y K.J.Bathe, "A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis". Engg.Computations, 1, pp.77-88, 1984.
8. K.J.Bathe y E.N.Dvorkin, "A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation", Int.J. Numerical Methods in Engg., 21,pp.367-385, 1985.
9. K.J.Bathe y E.N.Dvorkin, "A Formulation of General Shell Elements - The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components". Int.J. Numerical Methods in Engg., 22, pp.697-722. 1986.
10. R.D.Cook. "Improved Two-Dimensional Finite Element". A.S.C.E., J. Structural Div.. ST9, pp.1851-1863. 1974.
11. B.M.Irons y A.Razzaque, "Experience with the Patch Test for Convergence of Finite Elements", publicado en The Mathematical Foundation of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, (Ed. A.K. Aziz), Academic Press, 1972.
12. R.H.MacNeal. "A Theorem Regarding the Locking of Tapered Four-Noded Membrane Elements", Int.J.Numerical Methods in Engg., 24, pp.1793-1799, 1987.

13. E.N.Dvorkin y S.I.Vassolo. "A quadrilateral 2D finite element based on mixed interpolation of tensorial components", Engg. Computations (en prensa)
14. A.E.Green y W.Zerna, Theoretical Elasticity. (2da.Edicion). Oxford University Press, 1968.
15. K.J.Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice Hall, 1982.
16. G.Strang. y G.J.Fix. An Analysis of the Finite Element Method. Prentice Hall, 1973.
17. R.L.Taylor, J.C.Simo, D.C.Zienkiewickz y A.C.Chan, "The Patch-Test. A Condition for Assessing FEM Convergence", Int.J.Numerical Methods in Engg., 22, pp.39-62, 1986.
18. J.Pittr y H.Hartl, "Improved Stress Evaluation Under Thermal Load for Simple Finite Elements". Int.J.Numerical Methods in Engg., 15. pp.1507-1515, 1980.

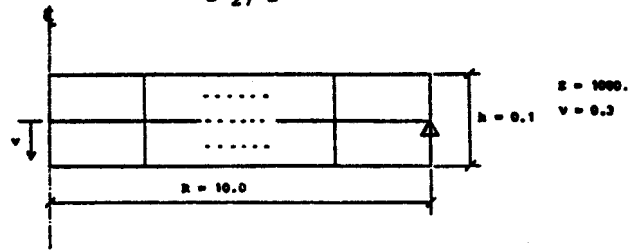


v	$\sqrt{\epsilon_{\text{EN}}/\epsilon_{\text{ANALIT.}}}$					
	d = 0.0		d = 0.5		d = 1.0	
	QMTC	STD-4M	QMTC	STD-4M	QMTC	STD-4M
0.000	1.00	0.24	0.77	0.19	0.54	0.13
0.100	0.99	0.26	0.77	0.20	0.54	0.14
0.200	0.96	0.27	0.75	0.21	0.54	0.14
0.300	0.91	0.28	0.72	0.21	0.52	0.14
0.400	0.84	0.27	0.67	0.19	0.49	0.13
0.450	0.80	0.25	0.63	0.16	0.47	0.12
0.490	0.76	0.16	0.61	0.06	0.46	0.08
0.499	0.75	0.02	0.60	0.02	0.45	0.02



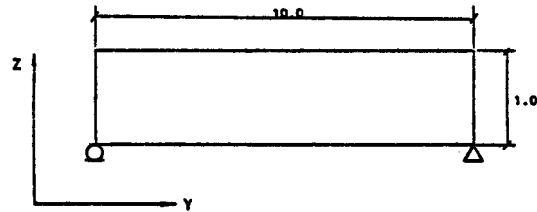
v	$\sqrt{\epsilon_{\text{EN}}/\epsilon_{\text{ANALIT.}}}$			
	d = 0.0		d = 1.0	
	QMTC	STD-4M	QMTC	STD-4M
0.000	1.00	0.56	0.86	0.41
0.200	0.86	0.50	0.85	0.41
0.400	0.85	0.50	0.76	0.32
0.450	0.80	0.41	0.73	0.25
0.480	0.78	0.27	0.70	0.16
0.490	0.77	0.17	0.70	0.12
0.499	0.76	0.02	0.69	0.02

FIGURA 6. ELEMENTOS EN PLANE STRAIN BAJO FLEXION CONSTANTE



N	$\sqrt{\frac{P}{E h}} \sqrt{\frac{M A L Y T}{h}}$	
	QMTC	STD-4H
1	0.616	0.0013
2	0.698	0.0078
3	0.954	0.0206
4	0.974	0.0400
5	0.984	0.0652

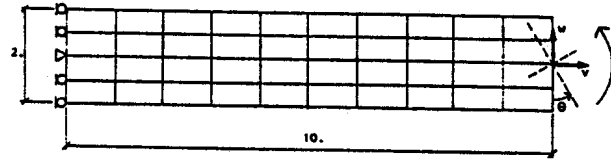
FIGURA 7. PLACA CIRCULAR SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA CONCENTRADA



$E = 3 \text{ E}+05$
 $\alpha = 0.1 \text{ E}-04$
 $\nu = 0.3$
 Plane stress
 $\theta_{ref} = \text{const.}$
 $\theta = a + b y + c z$

	$\text{MAX} \left[\frac{C_{REF}}{E \alpha (1 - \nu_{REF}^2)} \right]$
QMTC	0.0
STD-4H	6.65

FIGURA 8. CARGA TERMICA



$E = 1000$
 $\nu = 0.0$
 Plane Stress

θ^{TH}	$\frac{\sigma_{FEH}}{\sigma^{TH}}$		$\frac{\nu_{FEH}}{\nu^{TH}}$		$\frac{\nu_{FEH}}{\nu^{TH}}$	
	QMTC	STD-4M	QMTC	STD-4M	QMTC	STD-4M
10°	0.94	0.63	0.98	0.45	0.97	0.69
20°	0.90	0.62	0.90	0.43	0.96	0.68
30°	0.85	0.60	0.81	0.41	0.94	0.67
40°	0.80	0.58	0.72	0.38	0.89	0.65
45°	0.77	0.57	0.67	0.37	- 0.86	0.65

FIGURA 9. VIGA EN VOLADIZO CON GRANDES ROTACIONES