

ANÁLISE DE VIGAS COM PEQUENA CURVATURA INICIAL, SUBMETIDA A  
CARREGAMENTO AXIAL E TRANSVERSAL, PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

João Batista de Paiva

Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São  
Carlos - Universidade de São Paulo  
São Carlos - SP - Brasil

Célia Vanda Alves de Godoy

Aluna da Escola de Engenharia de São Carlos - Universi-  
dade de São Paulo

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma formulação para a análise de vigas, com pequena curvatura inicial, pelo método dos elementos finitos e submetida a carregamentos axial e transversal. Nesta formulação, a elástica inicial, a nível de cada elemento finito, é aproximada por uma função linear ou quadrática.

ABSTRACT

The objective of this work consist of presenting a formulation for analysis of elastic beams with inicial curvature and submitted to axial and lateral loads, using the finite element method. In this formulation the inicial curvature is interpolated in the element domain by a linear or quadratic function.

## 1. INTRODUÇÃO

A presença de curvatura inicial em vigas submetidas a carregamento axial provoca o aparecimento de esforços que podem ser significativos, o que justifica que tais problemas sejam analisados. Entretanto, a resolução direta da equação diferencial pode, em função da lei de variação da elástica inicial, se tornar muito trabalhosa e, portanto, o emprego de métodos numéricos em tais análises torna-se imprescindível.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma formulação para a análise destes problemas pelo método dos elementos finitos e que consiste em se escrever a energia potencial total em função da elástica da viga, devido à flexão, e da elástica inicial. A nível de cada elemento finito adota-se uma função aproximadora para a elástica inicial. Com a imposição da condição de mínima energia potencial total obtém-se um sistema de equações lineares no qual o vetor dos termos independentes é função dos carregamentos transversal e axial, e da elástica inicial e as incógnitas são os deslocamentos e suas derivadas nos nós dos elementos.

A elástica inicial, a nível de cada elemento, é aproximada por uma função linear ou quadrática e os resultados obtidos, quando comparados com os da resolução da equação diferencial mostraram a eficácia da formulação proposta.

## 2. EXPRESSÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Considere-se uma viga com pequena curvatura inicial e submetida a carregamentos axial e transversal, conforme indica a figura 1,

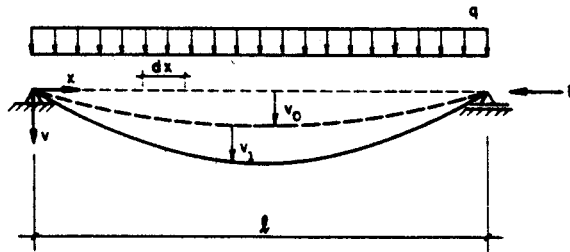


Fig. 1 - Viga com curvatura inicial.

onde  $v_0$  é a elástica inicial, antes de se aplicar o carregamento e  $v_1$  é a elástica devido à flexão da viga.

Chamando de  $v$  a elástica resultante, após a aplicação dos carregamentos, pode-se escrever:

$$v = v_0 + v_1 \quad (1)$$

A energia de deformação durante a flexão é dada por:

$$U = \int_{est} \frac{EI}{2} v_1'^2 dx \quad (2)$$

O trabalho axial realizado pela carga P é dado por:

$$T = P\Delta \quad (3)$$

onde  $\Delta$  é o encurtamento da viga durante a flexão.

O valor de  $\Delta$  pode ser calculado a partir da análise de um elemento  $dx$  genérico, indicado na figura 2.

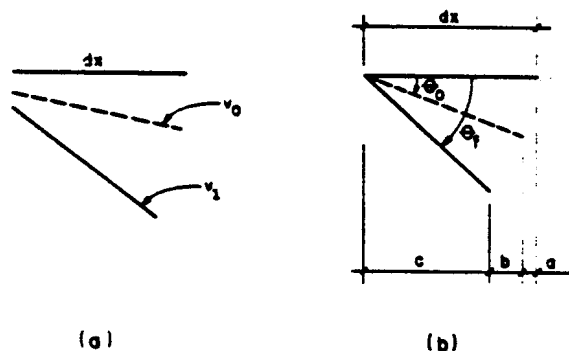


Fig. 2 - Elemento infinitesimal antes e depois da aplicação do carregamento.

Da figura 2.b obtém-se a seguinte relação:

$$b = dx (\cos \theta_0 - \cos \theta_f) \quad (4)$$

a qual pode ser reescrita como se segue:

$$b = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_f + \theta_0}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_f - \theta_0}{2} \right) dx \quad (5)$$

Como está sendo utilizada a teoria de pequenos deslocamentos, o seno do ângulo confunde-se com o próprio ângulo, o que permite reescrever (5) da seguinte forma:

$$b = \frac{dx}{2} (\theta_f^2 - \theta_0^2) \quad (6)$$

Considerando-se que  $\theta_f$  e  $\theta_0$  são os giros da elástica final  $v$  e da elástica inicial  $v_0$ , a expressão (6) pode ser reescrita:

$$b = \frac{dx}{2} (v_1'^2 - v_0'^2) \quad (7)$$

Substituindo-se  $v'$ , obtida a partir de (1), em (7) obtém-se:

$$b = \frac{dx}{2} (v_1'^2 + 2v_1'v_0') \quad (8)$$

O comprimento  $b$  é a contribuição do elemento  $dx$  ao deslocamento  $\Delta$  do ponto de aplicação da força  $P$ . O valor final de  $\Delta$  é dado por:

$$\Delta = \int_{\text{est}} \frac{1}{2} (v_1'^2 + 2v_1' v_0') dx \quad (9)$$

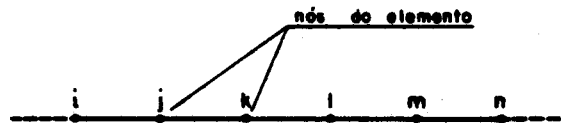
Considerando-se que a energia potencial das cargas externas é igual ao oposto do trabalho realizado por estas cargas, pode-se escrever a expressão da energia potencial total:

$$- = \int_{\text{est}} \frac{EI}{2} v_1''^2 dx - \int_{\text{est}} \frac{P}{2} v_1'^2 dx - \int_{\text{est}} P v_1' v_0' dx - \int_{\text{est}} g v_1 dx \quad (10)$$

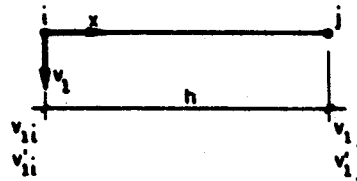
A última parcela de (10) é a energia potencial do carregamento transversal  $g$ .

### 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

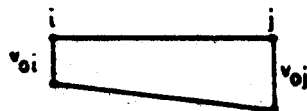
Para a aplicação do método dos elementos finitos a viga em análise é dividida em uma série de segmentos, denominados elementos finitos e cujas extremidades são denominadas nós destes elementos (ver figura 3.a.).



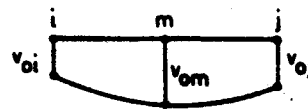
a) Viga dividida em elementos finitos



b) Elemento finito genérico



c) Aproximação linear



d) Aproximação quadrática

Fig. 3 - Viga dividida em elementos finitos.

Para um elemento finito genérico (figura 3.b) os deslocamentos são aproximados por uma função polinomial do terceiro grau, isto é:

$$v_1(x) = v_{1i} \phi_1(x) + v_{1i}' \phi_2(x) + v_{1j} \phi_3(x) + v_{1j}' \phi_4(x) \quad (11)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - 3 \left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ \phi_2(x) &= x - 2 \frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{h^2} \\ \phi_3(x) &= 3 \left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ \phi_4(x) &= -\frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{h^2} \end{aligned} \quad (12)$$

A elástica inicial,  $v_{0i}$ , pode ser aproximada por uma função linear ou quadrática. Na aproximação por função linear basta definir os valores da elástica inicial nos nós dos elementos (ver figura 3.c). Neste caso esta aproximação é dada por:

$$v_0(x) = v_{0i} \left(1 - \frac{x}{h}\right) + \frac{v_{0j}}{h} x \quad (13)$$

Na aproximação por uma função quadrática é necessário definir o valor da elástica inicial para um ponto do interior do elemento (ver figura 3.d). Se este ponto adicional for no meio do elemento, então a função aproximadora é dada por:

$$v_0(x) = v_{0i} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{h}\right) + 2 \left(\frac{x}{h}\right)^2\right] + v_{0m} \left[4 \left(\frac{x}{h}\right) - 4 \left(\frac{x}{h}\right)^2\right] + v_{0j} \left[-\left(\frac{x}{h}\right) + 2 \left(\frac{x}{h}\right)^2\right] \quad (14)$$

A partir de (13) e (14), obtêm-se as seguintes contribuições da elástica inicial ao vetor de cargas nodais de um elemento finito:

- Para aproximação linear (13)

$$\left\{ CN_0 \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{P}{h} (v_{0j} - v_{0i}) \\ 0 \\ -\frac{P}{h} (v_{0j} - v_{0i}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

- Para aproximação quadrática

$$\left\{ CN_0 \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{P}{h} (v_{0j} - v_{0i}) \\ \frac{P}{3} (v_{0i} - 2v_{0m} + v_{0j}) \\ -\frac{P}{h} (v_{0j} - v_{0i}) \\ -\frac{P}{3} (v_{0i} - 2v_{0m} + v_{0j}) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

A elástica inicial  $v_0$  não influi na matriz de rigidez do elemento finito.

#### 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Inicialmente, com o objetivo de testar a precisão das aproximações, linear e quadrática, para a elástica inicial, foi analisada uma viga bi-apoiada e com uma elástica inicial dada por uma função senoidal, conforme indica a figura 4, cuja solução pode ser obtida analiticamente [3]. Neste exemplo, como nos demais a serem apresentados, os valores adotados para o módulo de elasticidade, para o momento de inércia da seção transversal e para a elástica inicial, visam apenas facilitar a comparação numérica dos resultados.

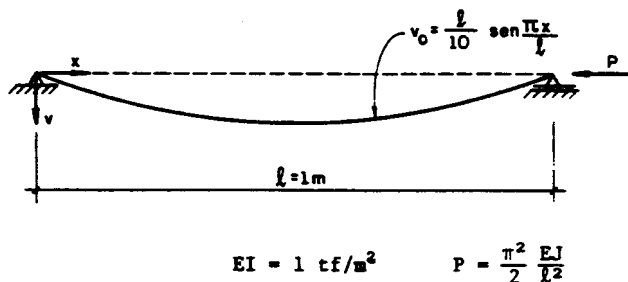


Fig. 4 - Viga bi-apoiada com elástica inicial senoidal.

A viga foi analisada com várias partições de elementos finitos de igual comprimento e com as aproximações linear e quadrática para a elástica inicial. Na Tabela 1 estão indicados os valores obtidos para o deslocamento do ponto médio da viga nestas análises e a diferença percentual em relação ao valor exato [3].

Tabela 1 - Valores do deslocamento transversal do ponto médio da viga da figura 4 para diversas partições da viga e com as aproximações linear e quadrática para  $v_0$ .

NÚMERO DE ELEMENTOS	APROXIMAÇÃO LINEAR	APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA	VALOR EXATO [3]
2	0,1816	0,1988	0,2000
4	0,1952	0,2000	
6	0,1980	0,2000	
8	0,1989	0,2000	

Como era de se esperar, a aproximação quadrática conduz a resultados melhores que a linear.

Com o objetivo de testar a formulação proposta para outros tipos de carregamento, foi analisada uma viga bi-apoiada submetida a uma carga axial e a uma carga transversal, aplicada no ponto médio da viga.

conforme indica a figura 5. Nas figuras 6 e 7 estão indicados os deslocamentos e momentos fletores, ao longo do eixo da viga, obtidos numericamente e os fornecidos pela solução exata da equação diferencial. Na análise numérica a viga foi dividida em oito elementos finitos de igual comprimento. Neste exemplo e nos seguintes foi utilizada a aproximação quadrática para a elástica inicial.

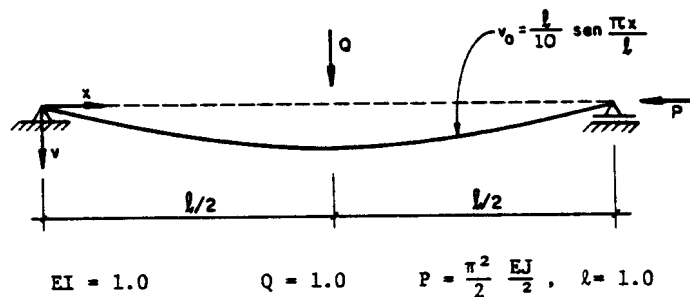


Fig. 5 - Viga bi-apoiada com elástica inicial e com carregamentos axial e transversal.

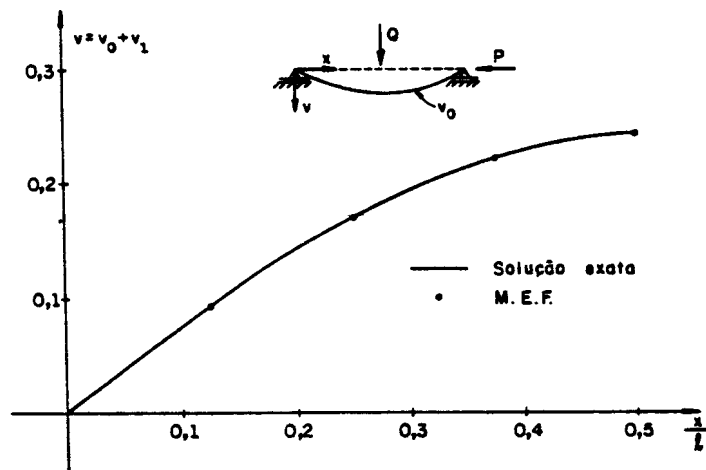


Fig. 6 - Deslocamento transversal ao longo do eixo da viga indicada na figura 5.

Com o mesmo objetivo do exemplo anterior, foi analisada a viga bi-apoiada submetida a carregamento axial e a carregamento transversal uniformemente distribuído, conforme indica a figura 8. Nas figuras 9 e 10 estão indicados os deslocamentos e momentos fletores, ao longo do eixo da viga, obtidos numericamente e os fornecidos pela solução exata da

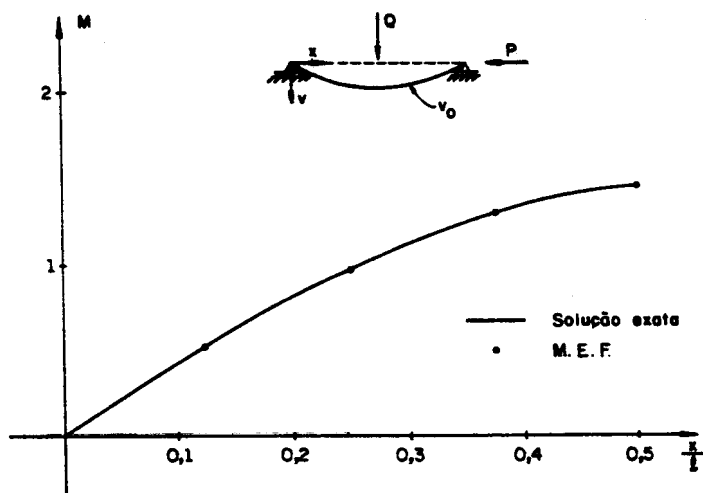


Fig. 7 - Momento fletor ao longo do eixo da viga da figura 5.

equação diferencial. Como no exemplo anterior, a análise numérica foi realizada com uma partição da viga em oito elementos finitos de igual comprimento.

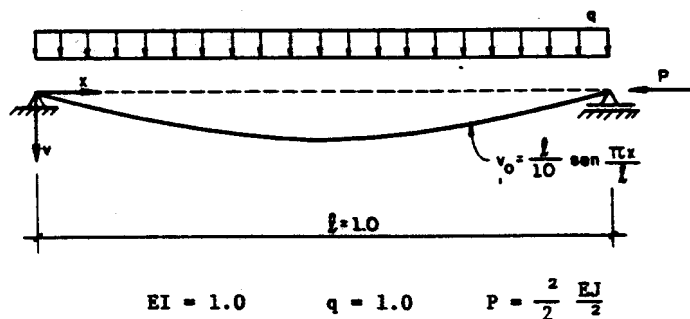


Fig. 8 - Viga bi-apoiada com elástica inicial, com carregamento transversal uniformemente distribuído e carga axial.

Para se testar a formulação proposta para vigas contínuas foi analisada a viga indicada na figura 11. O carregamento transversal é uniformemente distribuído em toda viga. Nas figuras 12 e 13 estão indicados os deslocamentos e momentos fletores, ao longo do eixo da viga, obtidos analiticamente e pela formulação proposta. Nesta análise, cada tramo da viga foi dividido em oito elementos finitos de igual comprimento.



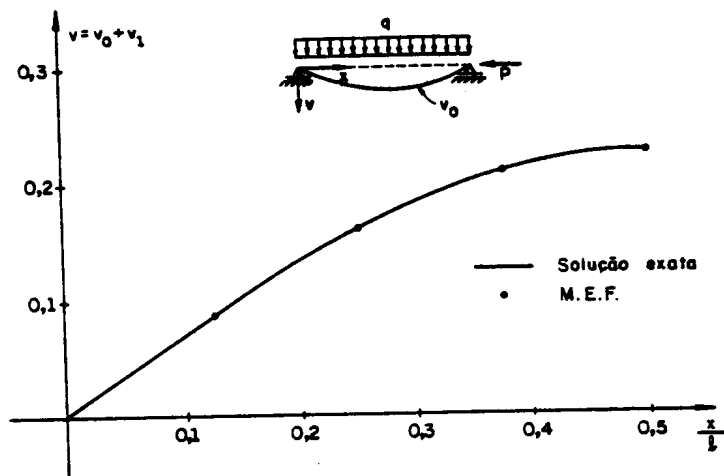


Fig. 9 - Deslocamento vertical ao longo do eixo da viga da figura 8.

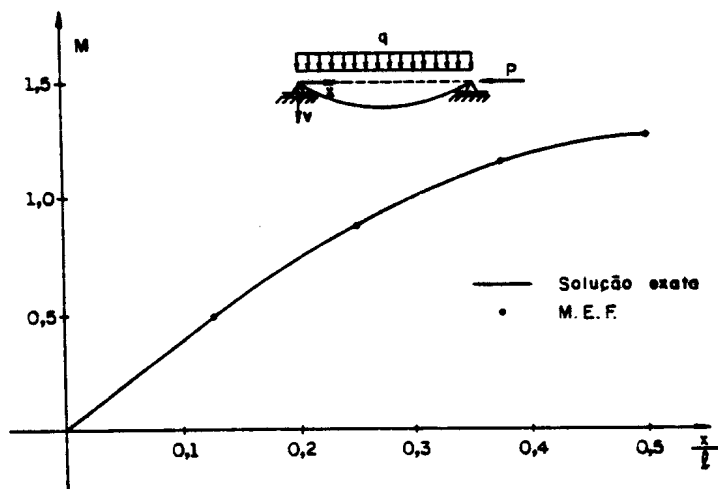


Fig. 10 - Momento fletor ao longo do eixo da viga da figura 8.

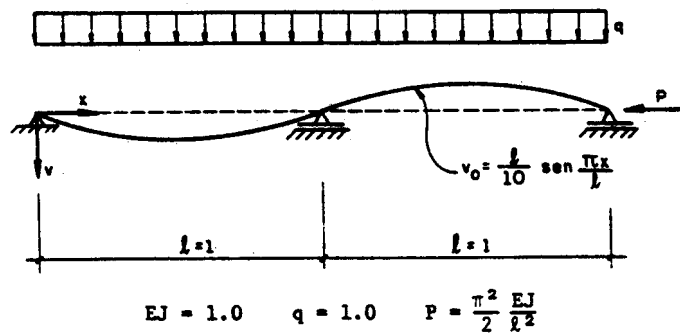


Fig. 11 - Viga contínua com elástica inicial e carregamentos axial e transversal.

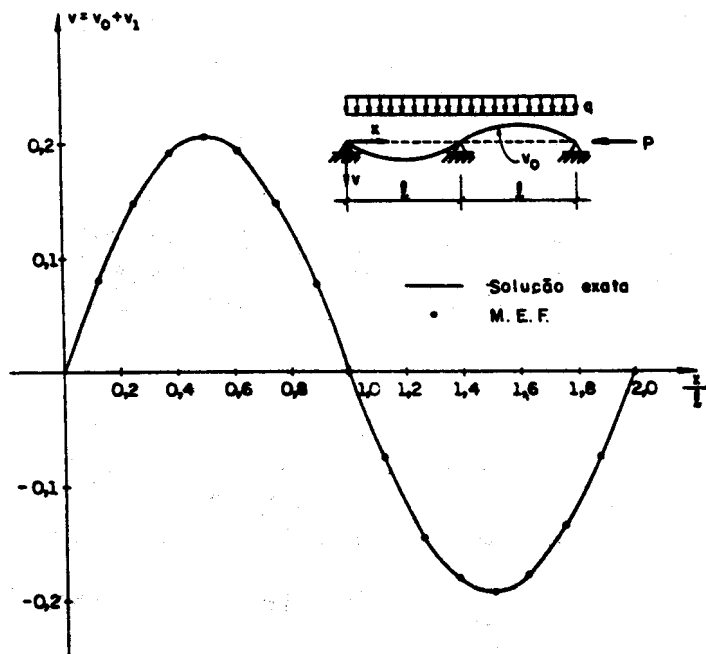


Fig. 12 - Deslocamento transversal ao longo do eixo da viga da figura 11.

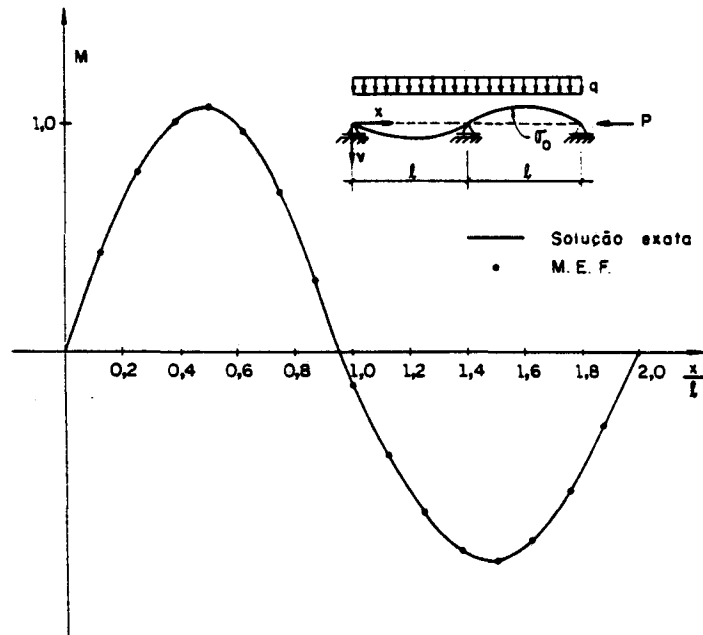


Fig. 13 - Momento fletor ao longo do eixo da viga da figura 11.

## 5. CONCLUSÕES

Da análise dos diversos exemplos apresentados pode-se concluir que a formulação proposta para a análise de vigas com pequena curvatura inicial consegue modelar adequadamente tais problemas. Ficou evidenciado, também, que para um número pequeno de elementos finitos a aproximação quadrática para a elástica inicial é superior à aproximação linear. Entretanto, à medida que o número de elementos finitos aumenta, a diferença entre as duas aproximações deixa de existir.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Rachid, M.; Paiva, J.B.; Palermo Junior, L. Problemas especiais de instabilidade de vigas. In: Colloquia'83 - Congresso Latino-americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 6., Santiago del Chile, 7-11 nov. 1983 - Anais. V.3, F-13.1.9.
- [2] Rachid, M. & Paiva, J.B. Aplicação do método dos elementos finitos ao cálculo da carga crítica de flambagem. In: Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais, 3., Rio de Janeiro, 11-15 dez. 1978 - Anais p. M7.1-11.
- [3] Timoshenko, S.P. & Gere, J.M. Theory of elastic stability. 2nd ed. New York, McGraw-Hill, 1961. 541 p.
- [4] Megson, T.H.G. Aircraft structures for engineering students. London, Edward Arnold, 1985. 485 p.