

OPTIMIZACION DEL METODO DE RAYLEIGH - RITZ EN EL CASO EN QUE  
LAS CONDICIONES DE BORDE CONTIENEN LOS AUTOVALORES DEL PROBLEMA

Eduardo Bambill  
Depto. de Ingeniería (UNS) y Fac. Regional  
Bahía Blanca (UTN)  
8000 - Bahía Blanca

Patricio A.A.Laura  
Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET)  
8111 - Base Naval Puerto Beltrano

RESUMEN

Cuando las condiciones de borde contienen los autovalores del problema es común, al elegir las funciones coordenadas que constituirán la solución, considerar las condiciones de borde en cuestión como condiciones homogéneas ya que esto simplifica considerablemente las determinaciones analíticas.

En este trabajo se presentan experimentos numéricos generando funciones coordenadas polinómicas y teniendo en cuenta la existencia del autovalor en las condiciones de contorno. Las funciones aproximantes contienen un parámetro de optimización exponencial que permite minimizar al autovalor buscado de acuerdo al criterio de optimización de Lord Rayleigh.

ABSTRACT

When using the Ritz method in the case where the boundary conditions contain the eigenvalues of the problem it is common practice to consider the boundary conditions as homogeneous situations and to construct the coordinate functions accordingly. This simplifies considerably the analytical determinations.

The present paper deals with numerical experiments where by the approximating functions satisfy exactly the boundary conditions containing the eigenvalue.

On the other hand the coordinate functions contain an exponential, optimization parameter which allows for the minimization of the eigenvalues under investigation, following Lord Rayleigh's suggestion.

## INTRODUCCION

Consideremos el problema general de autovalores gobernado por el sistema diferencial [1]

$$M_{2m} [y] = \lambda M_{1m} [y] \quad (1)$$

$$A_i [y] = \lambda C_i [y] \quad i=1,2,\dots,n \quad (2)$$

donde (1) es la ecuación diferencial gobernante en el dominio D cuya solución debe satisfacer las condiciones de borde (2) y  $\lambda$  es un autovalor del problema.

Cuando  $\lambda$  no aparece en las condiciones de contorno el problema definido por (1) y (2) es definido como "auto-adjunto".

Sea, por otra parte,  $J[y]$  la funcional gobernante del problema tal que de la condición de que sea estacionaria

$$\delta J[y] = 0 \quad (3)$$

resulta la ecuación diferencial (1).

Obviamente las condiciones (2) deberán ser satisfechas.

Sea  $y_2$  una función aproximante de la solución exacta  $y$  que satisface idénticamente las condiciones de borde (2) y que expresaremos en la forma

$$y_2 = \sum_{n=1}^N a_n f_n \quad (4)$$

donde cada función coordenada  $f_n$  satisface las condiciones esenciales y naturales del problema en estudio.

En consecuencia resultará

$$a_n = a_n(\lambda) \quad (5)$$

constituyendo la situación definida en (5) una dificultad algorítmica relativamente grande ya que los valores de  $\lambda$  son incógnitas del problema. Es por esta razón que es común, al aplicar el método de Ritz, elegir las funciones coordenadas de modo que las condiciones esenciales sean satisfechas exactamente mientras que aquellas condiciones naturales que contengan al autovalor  $\lambda$  serán reemplazadas por condiciones homogéneas de modo que no intervenga el autovalor del problema.

Si en cambio las funciones coordenadas  $f_n$  satisfacen idénticamente a todas las condiciones de borde será posible obtener una mayor precisión en la determinación de los autovalores a costa de una mayor inversión en el proceso algorítmico total.

En este trabajo se determina la frecuencia fundamental del elemento estructural mostrado en la Figura 1 demostrándose que al utilizar funciones coordenadas polinómicas que satisfacen idénticamente todas las condiciones de borde se obtienen autovalores fundamentales que poseen excelente precisión.

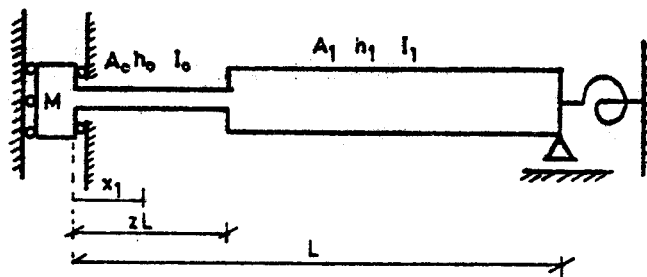


Figura 1 - ELEMENTO ESTRUCTURAL VIBRANTE ANALIZADO  
(Caso de una masa puntual M guiada en el extremo  $x=0$ ),

#### DETERMINACION APROXIMADA DEL VALOR FUNDAMENTAL

En el caso de modos normales de vibración y considerando la teoría clásica de vigas, el problema aquí planteado está regido por la funcional

$$J(W) = \frac{EI_0}{L^3} \left[ \int_0^1 \beta(x) (W'')^2 dx + \phi^* (W''(0))^2 \right] - \\ - \rho A_0 L \omega^2 \left[ \int_0^1 \eta(x) W^2 dx + m^* W(0)^2 \right] \quad (6)$$

donde

$$x = z_1/L$$

$$I_v = \beta(x) I_0$$

$$A_v = \eta(x) A_0$$

$$m^* = M / \rho A_0 L$$

$$\phi^* = \phi EI_0 / L$$

$W(x)$  = amplitud del corrimiento

Es conveniente aproximar a  $W(x)$  mediante la relación funcional

$$W \approx W_a = B_1 (x^4 + \alpha_4 x^3 + \alpha_3 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_1) \quad (7)$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$  son determinados substituyendo (7) en las condiciones de borde gobernantes, ver Figura 1, siendo  $\delta^*$  el parámetro exponencial de optimización [2].

Resultan entonces:

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{2P_3 + \delta^* P_1 + \frac{m^*}{\beta_0} (P_4 + P_3/6) \Omega_1^2}{P_3 \left( \frac{\beta'_0}{3\beta_0} - 1 \right) - 2P_2}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3\beta_0} \left( \frac{m^*}{2} \Omega_1^2 - \beta'_0 \alpha_2 \right)$$

$$\alpha_4 = \frac{\delta^* P_1 + 2\alpha_2 P_2 + m^* \Omega_1^2 P_4 / \beta_0}{P_3}$$

siendo  $\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho R_0}{EI_0}} \omega_1 L^2$

$$P_1 = \phi^* \beta(L) (\delta^* - 1) - 1$$

$$P_2 = 4 - 12 \phi^* \beta(L)$$

$$P_3 = \phi^* \beta(L) \left( 1 - \beta'_0 / \beta_0 \right) + \left( \frac{\beta'_0}{2\beta_0} - 1 \right)$$

$$P_4 = \beta(L) \phi^* - \frac{1}{2}$$

Reemplazando (7) en (6) y requiriendo que

$$\frac{\partial J}{\partial B_1} [W_0] = 0 \quad (8)$$

se obtiene finalmente

$$\Omega_1 = \left[ \frac{\int_0^L \beta(x) (W_2^{(x)})^2 dx + \phi^* (W_2^{(l)})^2}{\int_0^L \eta(x) W_2^2 dx + m^* (W_2^{(0)})^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Del análisis de las expresiones (7) y (9) se deduce que

$$\Omega_1 = \Omega_1(\Omega_1, \delta^*) \quad (10)$$

ya que  $\Omega$ , está contenida en las constantes  $\alpha_i$  de la función coordinada polinómica (7).

Se encontró conveniente partir de un valor arbitrario de  $\gamma$ , próximo y superior a la unidad y mediante un proceso iterativo hallar el  $\Omega$ , correspondiente. Hallado este se varía el valor de  $\gamma$  y se obtiene un nuevo valor de  $\Omega$ . El proceso es continuado hasta hallar los valores de  $\Omega$ , y  $\gamma$  que satisfacen la condición de mínimo

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \gamma} = 0 \quad (11)$$

#### RESULTADOS NUMERICOS

Se obtuvieron resultados de coeficientes de frecuencias fundamentales de vibración del elemento estructural mostrado en la Figura 1 para el caso de empotramiento rígido en el extremo  $x = 1$  (o sea  $\theta = 0$ ).

La Tabla 1 muestra una comparación de valores numéricos con a) resultados exactos en el caso de sección y momento de inercia constante y b) con valores obtenidos mediante el método de elementos finitos en el caso de sección variable en forma discontinua (Figura 1).

En el caso en que se compara con valores exactos se concluye que la precisión de la metodología propuesta es excelente. En aquellas situaciones en que la estructura posee sección y momento de inercia variable los autovalores determinados en este estudio difieren de los calculados mediante el método de elementos finitos en un 1% para valores muy pequeños del parámetro  $m^*$  y en menos del 1% cuando se incrementa  $m^*$ .

Es de interés destacar el hecho de que al no satisfacer exactamente la condición de borde que contiene al autovalor los valores obtenidos son considerablemente mayores que los determinados mediante elementos finitos [2].

#### AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido auspiciado por el CONICET (PID 3009400). Los autores expresan su reconocimiento al Ing. C.P. Filipich por su crítica constructiva.

Configuración	Método	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	5	10
Sección Uniforme	(A)	5.595	4.552	3.929	3.506	3.195	2.954	1.494	1.075
	(B)	5.595	4.552	3.929	3.506	3.195	2.954	1.494	1.075
Fig.1 ; z = 1/3	(A)	6.785	5.488	4.731	4.221	3.840	3.550	1.801	1.290
	(C)	6.70	5.45	4.71	4.20	3.83	3.54	1.79	1.28
Fig.1 ; z = 1/2	(A)	6.86	5.53	4.75	4.23	3.85	3.56	1.80	1.29
	(C)	6.81	5.51	4.74	4.22	3.84	3.55	1.79	1.28
Fig.1 ; z = 2/3	(A)	6.90	5.52	4.73	4.20	3.82	3.53	1.77	1.27
	(C)	6.79	5.46	4.69	4.17	3.79	3.50	1.76	1.26

TABLA 1 - Comparación de valores de  $\Omega$ , en el caso de la estructura mostrada en la Fig.1 ( $h_0/h_1 = 0.80$ ).

(A): metodología presente; (B): solución exacta; (C): elementos finitos (20 elementos prismáticos) [2].

REFERENCIAS

- [1] Crandall, S. "Engineering Analysis"  
Mc Graw Hill Book, Co., New York, 1956.
- [2] Laura, P.A.A., Paloto, J.C., Santos, R.D. y Carnicer, R  
"Vibrations of a non - uniform beam elastically restrained  
against rotation at one end and carrying a guided mass  
at the other" Instituto de Mecánica Aplicada Publicación  
Nº 88-34, 1988.