OPTIMIZACION DEL METODO DE KANTOROVICH

Patricio A.A.Laura
Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET)
Base Naval Puerto Belgrano
8111 - Argentina

Victor H. Cortinez
Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos
Facultad Regional Bahía Blanca (UTN)
8000 - Bahía Blanca

RESUMEN

Se muestra en este trabajo que, en general, la precisión del método de Kantorovich es mejorada si se incluye un parámetro exponencial de optimización "γ" en la parte de la solución que es escogida"a priori".

Se presentan aplicaciones a problemas clásicos de autovalores y de determinación de un campo térmico estacionario.

ABSTRACT

It is shown in the present study that, in general, the accuracy of the Kantorovich method can be improved by including an exponential, optimization parameter "γ" in the part of the expression giving the solution which is chosen "a priori".

The proposed methodology is applied to classical eigenvalue problems and to a steady state two - dimensional heat conduction problem.

INTRODUCCION

Es sabido que el "método de reducción a ecuaciones diferenciales" (método de Kantorovich) ocupa una posición intermedia, desde el punto de vista de la precisión obtenida, entre la solución exacta de un problema dado y la solución aproximada generada mediante la aplicación del método de Ritz o de Galerkin.

Tal como explican Kantorovich y Krylov en su clásico tratado..." la ventaja del método consiste en que solo parte de la solución es escogida "a priori" mientras que el resto de la solución es determinada de acuerdo con el caracter del problema" [1].

Se ha mostrado recientemente [2] que la precisión del método de Kantorovich puede ser mejorada si se incluye un parámetro exponencial de optimización "γ" en la parte de la expresión que es escogida "a priori". Dado que el método de Kantorovich permite obtener cotas superiores en el caso de problemas de autovalores, minimizando a estos con respecto a "γ" es posible optimizar los valores de los autovalores en cuestión. Este enfoque fué sugerido por Lord Rayleigh en conexión con su clásico método [3] .

Por otra parte ha sido demostrado en [4] que una etapa posterior de optimización es posible si se incluye un parámetro multiplicador "ξ" en la parte de la solución construída por el analista (la parte restante es determinada al resolver una ecuación diferencial generada por el requerimiento de ortogonalidad).

Una consecuencia lógica de los procesos de optimización de autovalores desarrollados en [2] y [4] lo constituye la extensión y aplicación de la metodología en cuestión a problemas de campo minimizando la funcional gobernante.

Esto ha sido llevado a cabo en un problema estacionario de la teoría de difusión [5].

En el presente trabajo se reseñan los desarrollos y aplicaciones logrados recientemente por los autores.

METODOLOGIA BASICA DE OPTIMIZACION

Resulta conveniente mostrar la metodología propuesta mediante un problema concreto y clásico cual es la determinación de la frecuencia fundamental de vibración de una membrana rectangular.

En el caso en que la membrana vibra en uno de sus modos normales de vibración el problema esta gobernado por el sistema diferencial

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0 \qquad (1a)$$

$$u\left[L(x,y)=0\right]=0 \qquad (1b)$$

donde L(x,y) = 0 es la relación funcional que define el contorno del dominio, ver Figura 1

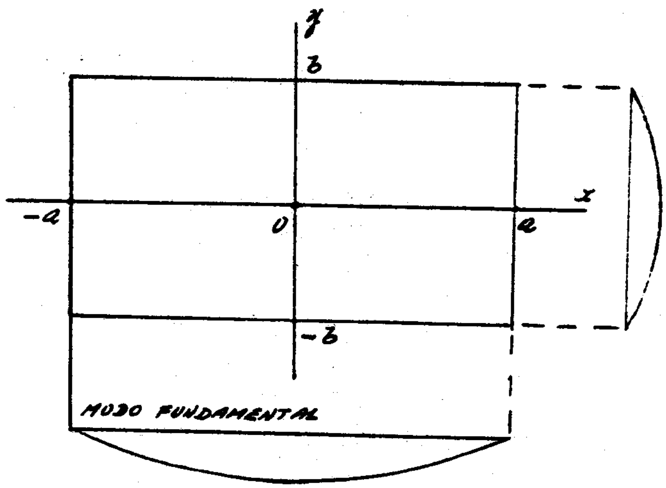

Figura 1 - Sistema vibrante en estudio.

De acuerdo a lo explicado se toma

$$u \cong u_a = P(y,\gamma) f(x) \qquad (2)$$

donde

$$P(y,\gamma) = 1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{\gamma} \; ; \; y \geq 0 \qquad (3)$$

γ : parámetro de optimización.

Dado que el parámetro de optimización "γ" no es, en general, un número entero, se efectuará la integración requerida por el método de Kantorovich con respecto a la variable independiente - y - entre 0 y b en virtud de que se analiza un modo simétrico. Por otra parte la expresión (3) satisface las condiciones

$$P(b,\gamma) = \frac{dP(0,\gamma)}{dy} = 0 \qquad (4)$$

Substituyendo ahora (2) en (1b) se obtiene la función "error" o residual $\varepsilon(x,y,\gamma)$ y requiriendo que

$$2\int_0^b \varepsilon(x,y,\gamma)\,P(y,\gamma)\,dy = 0 \qquad (5)$$

se obtiene

$$\int_0^b (f''P^2 + fP''P + \lambda f P^2)\,dy = 0 \qquad (6)$$

Dado que

$$\int_0^b P''P\,dy = P'P\Big|_0^b - \int_0^b P'^2\,dy = -\int_0^b P'^2\,dy \qquad (7)$$

uno puede expresar a (6) en la forma

$$f''(x) + (\lambda - M)f(x) = 0 \qquad (8)$$

donde

$$M = \int_0^b P'^2\,dy \Big/ \int_0^b P^2\,dy = M(\gamma) \qquad (9)$$

La solución de (8) es

$$f(x) = A\cos\sqrt{\lambda - M}\,x + B\,\mathrm{sen}\sqrt{\lambda - M}\,x \qquad (10)$$

debiendo cumplir las condiciones de borde

$$f(a) = f(-a) = 0 \qquad (11)$$

y por consiguiente resulta

$$B = 0 \qquad (12a)$$

$$\cos\sqrt{\lambda - M}\,a = 0 \qquad (12b)$$

De (12b) se obtiene la raíz de mínimo valor

$$\sqrt{\lambda - M}\,a = \frac{\pi}{2} \qquad (13)$$

y por consiguiente

$$\lambda a^2 = \frac{\pi^2}{4} + M(\gamma)a^2 \qquad (14)$$

Requiriendo ahora que (14) sea un mínimo con respecto a γ :

$$\frac{\partial(\lambda a^2)}{\partial\gamma} = 0 \qquad (15)$$

se obtiene, para $a/b = 1$:

$$\lambda a^2 = 4.942$$

mientras que el método clásico de Kantorovich (sin optimizar) arroja el valor

$$\lambda a^2 = 4.967$$

siendo el valor exacto

$$\lambda a^2 = 4.9348$$

Se concluye que la mejora introducida por el proceso de optimización es del orden del 1% en el caso que se ha estudiado en esta sección.

INTRODUCCION DE UN PARAMETRO MULTIPLICADOR "ξ".

Se expresará ahora a la solución aproximada de (1a) en la forma

$$u_a = [\xi P_1(y,\gamma) + P_2(y,\gamma)] f(x) \qquad (16)$$

donde

$$P_1 = \left(\frac{y}{b}\right)^{\gamma} - 1 \qquad (17a)$$

$$P_2 = \left(\frac{y}{b}\right)^{\gamma+2} - y^2 \qquad (17b)$$

siendo requerido que

$$P_i(b) = P_i'(0) = 0 \; ; \; i = 1,2 \qquad (18)$$

Substituyendo (16) en (1a) se obtiene $\varepsilon(x,y,\gamma,\xi)$ y de la condición de ortogonalidad

$$2\int_0^b \varepsilon(x,y,\gamma,\xi)(P_1\xi + P_2)dy = 0 \qquad (19)$$

resulta finalmente

$$2\int_0^b [f''(P_1\xi + P_2)^2 + f\cdot(P_1''\xi + P_2'')\cdot(P_1\xi + P_2) + $$

$$+ \lambda f\cdot(P_1\xi + P_2)^2]\,dy = 0 \qquad (20)$$

Dado que

$$\int_0^b (P_1''\xi + P_2'')(P_1\xi + P_2)dy = (P_1'\xi + P_2')(P_1\xi + P_2)\Big|_0^b -$$

$$-\int_0^b (P_1'\xi + P_2')^2 dy = -\int_0^b (P_1'\xi + P_2')^2 dy \qquad (21)$$

substituyendo en (20) se obtiene en definitiva

$$f'' + \left(\lambda - \frac{M}{I^2}\right) f = 0 \qquad (22)$$

donde $$M = \frac{\int_0^1 (P_1'\xi + P_2')^2 d\eta}{\int_0^1 (P_1\xi + P_2)^2 d\eta} = M(\gamma,\xi) \; ; \quad \eta = \frac{y}{b}$$

La solución de (22) esta dada por

$$f(x) = A \cos\sqrt{\lambda - \frac{M}{b^2}}\, x + B \operatorname{sen}\sqrt{\lambda - \frac{M}{b^2}}\, x \tag{23}$$

y utilizando las condiciones de borde se deduce que

$$B = 0 \;, \quad \cos\sqrt{\lambda - \frac{M}{b^2}}\, a = 0 \tag{24}$$

El coeficiente de frecuencia fundamental es obtenido de la relación

$$\sqrt{\lambda_1 - \frac{M}{b^2}}\, a = \frac{\pi}{2} \tag{25}$$

y finalmente se obtiene

$$\lambda_1 a^2 = \frac{\pi^2}{4} + M(\xi,\gamma)\left(\frac{a}{b}\right)^2 \tag{26}$$

De las condiciones de minimización

$$\frac{\partial(\lambda_1 a^2)}{\partial\gamma} = \frac{\partial(\lambda_1 a^2)}{\partial\xi} = 0 \tag{27}$$

se obtiene para $a/b = 1$:

$$\lambda_1 a^2 = 4.9348$$

que, desde el punto de vista práctico, coincide con la solución exacta.

Es de interés mencionar el hecho de que el valor obtenido coincide con el determinado por el método clásico de Kantorovich cuando se utilizan dos funciones coordenadas, pero siendo el procedimiento considerablemente mas complejo ya que siguiendo el método clásico hay que resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales.

EL METODO OPTIMIZADO DE KANTOROVICH EN UN PROBLEMA ESTACIONARIO DE CONDUCCION DE CALOR

Sea nuevamente el caso del dominio mostrado en la Figura 1 pero el fenómeno analizado es el de conducción estacionaria de calor cuando hay generación de calor en el dominio.

El problema en cuestión es gobernado por el sistema diferencial

$$\nabla^2\theta(x,y) + \frac{p(x,y)}{k} = 0 \tag{28a}$$

$$\theta[L(x,y) = 0] = 0 \tag{28b}$$

Resolver al sistema (28) es equivalente a obtener la solución del planteo variacional

$$\delta I = \delta\left\{\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{p\theta}{k}\right\}dx\,dy\right\}=0 \qquad (29)$$

donde θ debe satisfacer (28b).

Tomando

$$\theta \cong \theta_a = f(x,\gamma,\xi)\,g(y) \qquad (30)$$

donde $f(x,\gamma,\xi)$ satisface las condiciones de borde

$$f(-a,\gamma,\xi)=f(a,\gamma,\xi)=0 \qquad (31)$$

y siendo $g(y)$ determinada posteriormente, se obtiene, de substituir

$$\delta\theta = f(x)\,\delta g(y) \qquad (32)$$

en (29):

$$\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\left(f''fg+f^2g''+\frac{pf}{k}\right)\delta g\,dx\,dy=0 \qquad (33)$$

Integrando con respecto a la variable x resulta

$$\int_{-b}^{b}\left[-\int_{-a}^{a}f'^2dx\cdot g+\int_{-a}^{a}f^2dx\cdot g''+\int_{-a}^{a}\frac{pf}{k}\,dx\right]\delta g\,dy=0 \qquad (34)$$

y por consiguiente se obtiene

$$g''-gM+\frac{p_0N}{k}=0 \qquad (35)$$

donde

$$M=\int_{-a}^{a}f'^2dx\Big/\int_{-a}^{a}f^2dx = M(\gamma,\xi) \qquad (36a)$$

$$N=\int_{-a}^{a}\alpha(x,y)f\,dx\Big/\int_{-a}^{a}f^2dx=N(\gamma,\xi)\ ;\ p(x,y)=p_0\alpha(x,y) \qquad (36b)$$

Una vez obtenida g(y) se utilizan las condiciones de contorno

$$g(-b)=g(b)=0 \qquad (37)$$

y se tiene así la solución aproximada del problema

$$\theta \cong \theta_a = f(x,\gamma,\xi)\,g(y,\gamma,\xi) \qquad (38)$$

Dado que la funcional gobernante

$$I=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{p\theta}{k}\right\}dx\,dy \qquad (39)$$

debe ser mínima tambien con respecto a los parámetros γ y ξ, de la condición

$$\frac{\partial I}{\partial \gamma} = \frac{\partial I}{\partial \xi} = 0 \tag{40}$$

se obtienen los valores óptimos de γ y ξ que minimizan la funcional I.

Es interesante considerar primeramente el caso en que

$$P(x,y) = p_0 \tag{41}$$

Dada la simetría del sistema termo - mecánico resulta conveniente tomar f(x) en la forma

$$f(x) = \left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\gamma}\right] + \xi\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2} - \left(\frac{x}{a}\right)^{\gamma+2}\right] \;;\; x \geq 0 \tag{42a}$$

$$f(x) = \left[1-\left|\frac{x}{a}\right|^{\gamma}\right] + \xi\left[\left|\frac{x}{a}\right|^{2} - \left|\frac{x}{a}\right|^{\gamma+2}\right] \;;\; x \leq 0 \tag{42b}$$

Siguiendo el procedimiento previamente explicado se obtiene

$$q(\eta,\gamma,\xi) = \frac{N p_0}{M k}\left(1 - \frac{\cosh \sqrt{Ma^2}\,\frac{\eta}{a}}{\cosh \sqrt{Ma^2}\,\frac{b}{a}}\right) \tag{43}$$

y en definitiva

$$\frac{\vartheta}{\frac{p_0 a^2}{k}} \simeq \left\{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\gamma}\right] + \xi\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2} - \left(\frac{x}{a}\right)^{\gamma+2}\right]\right\} \frac{N}{Ma^2}\left(1 - \frac{\cosh \sqrt{Ma^2}\,\frac{\eta}{a}}{\cosh \sqrt{Ma^2}\,\frac{b}{a}}\right) \tag{44}$$

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

La expresión (44) es también válida para $-a/2 \leq x \leq 0$ pero en este caso se toma el valor absoluto de x.

La Tabla 1 muestra una comparación de valores máximos de $\vartheta / p_0 a^2/k$ para b/a = 1,2 y 4.

Se deduce que la metodología optimizada de Kantorovich permite obtener una excelente precisión.

Por último se considera el caso en que

$$p(x,y) = -0.2\, p_0\, y/b \tag{45}$$

y los resultados obtenidos mediante la técnica discutida en este trabajo son comparados con los exactos y también con aquellos determinados en un trabajo reciente donde se incorpora el concepto de la metodología de Kantorovich a la técnica de solución de ecuaciones diferenciales mediante mínimos cuadrados [6], ver Figura 2.

b/a	Método clásico de Kantorovich	Resultados Exactos	Método de Kantorovich Optimizado		
				γ	ξ
1	0.30259	0.29469	0.29479	1.9	0.25
2	0.45774	0.45687	0.45682	1.9	0.1
4	0.49821	0.49807	0.49821	2	0

Tabla 1 - Valores de $\theta / p_0 a^2 / k$ en $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 0$

Se concluye nuevamente que la metodología optimizada de Kantorovich brinda resultados muy precisos siendo un enfoque mas sencillo que el de la Referencia [6].

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido auspiciado por el CONICET (PID 3009400).

REFERENCIAS

1 Kantorovich, L.V. y Krylov, V.I. "Approximate Methods of Higher Analysis". Interscience Publishers Inc., 1964.

2 Laura, P.A.A. y Cortinez, V.H. "Optimization of the Kantorovich Method When Solving Eigenvalue Problems". Instituto de Mecánica Aplicada (8111-Base Naval Puerto Belgrano, Argentina) Publicación Nº 88-14, 1988.

3 Rayleigh, J.W.S. "Theory of Sound" Vol.I Dover, 1945.

4 Cortinez, V.H. y Laura, P.A.A. "Further Optimization of the Kantorovich Method When Applied to Vibrations Problems" Instituto de Mecánica Aplicada (8111-Base Naval Puerto Belgrano, Argentina) Publicación Nº 88-15, 1988.

5 Laura, P.A.A. y Cortinez, V.H. "An Extension of the Kantorovich Method And Its Application to a Steady State Heat Conduction Problem". Instituto de Mecánica Aplicada (8111-Base Naval Puerto Belgrano, Argentina. Publicación Nº 88-20, 1988.

6 Djukic, D.S. y Atanackovic, T.M. "The Least Squares Method: Kantorovich Approach" International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.24, 1981, págs.443-448.

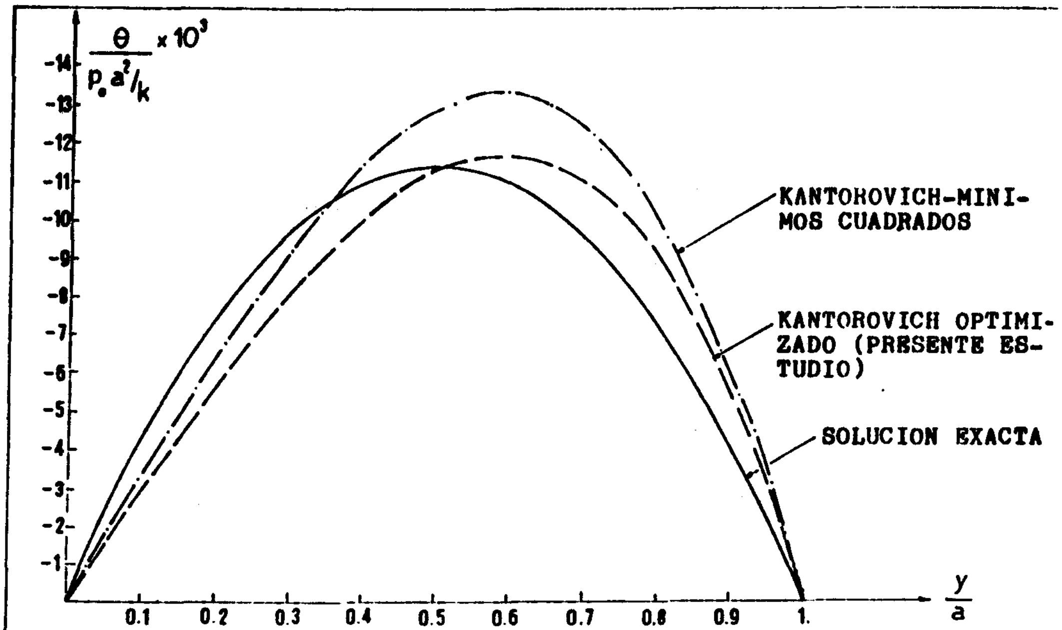

Figura 2 - Comparación de valores de temperatura en $x/a = 0$; ver eq.(45).