

UNA BANDA FINITA DE ORDEN SUPERIOR PARA
INESTABILIDAD DE LAMINAS PLEGADAS

Silvia R. Raichmán
Laboratorio de Estructuras, Universidad
Nacional de Tucumán, Argentina

Luis A. Godoy
Departamento de Estructuras, Universidad
Nacional de Córdoba, Argentina

RESUMEN

Se presenta una banda finita de orden superior para el análisis de pandeo de placas plegadas. La banda está basada en interpolación cúbica de las tres componentes de desplazamiento y se integra numéricamente en la dirección transversal. Se incluyen ejemplos que muestran convergencia de la solución en términos de cargas y modos de bifurcación.

ABSTRACT

A higher-order finite strip is developed for the buckling analysis of plate assemblies. The strip is based on cubic interpolation of all three displacement components, and is integrated numerically in the transverse direction. Examples are included to show convergence of the solution in terms of buckling loads and mode shapes.

1. INTRODUCCION

El Método de Bandas Finitas desarrollado por Cheung /1/ permite analizar las estructuras denominadas prismáticas con una gran economía computacional frente a la discretización en dos dimensiones. Este representa la solución por series de Fourier en la dirección longitudinal cubriendo la totalidad del dominio, en tanto que en la dirección transversal simula el comportamiento mediante Elementos Finitos. Las características físico-geométricas de la sección transversal deben permanecer constantes en la dirección prismática en la que se realiza el desarrollo armónico, aunque el estado de cargas pueda variar arbitrariamente en esa dirección. Un estado del arte sobre la aplicación de este método en problemas de inestabilidad de láminas plegadas prismáticas está desarrollado en la referencia /2/. Graves Smith y Sridharan /3/ realizaron las primeras aplicaciones para determinar cargas de bifurcación considerando inestabilidad en modos flexionales. En la referencia /4/ se utilizó este método para el estudio de inestabilidad en modos torsionales bajo cargas laterales. La mayoría de los estudios de estabilidad que emplean Bandas Finitas, se basan en el elemento propuesto por Cheung /1/, denominado LO2 (lower order, dos líneas nodales). Este interpola linealmente los desplazamientos membranales y con polinomios cúbicos el desplazamiento de flexión. Cheung propone como elemento de orden superior al HO3 (higher order, tres líneas nodales), que utilizapolinomios cuadráticos para los desplazamientos u y v en el plano, y quíntico para w , desplazamiento fuera del plano.

La banda finita aquí propuesta tiene tres aristas nodales e interpola cúbicamente las tres componentes de desplazamiento. Su aplicación en el análisis estático lineal de placas plegadas prismáticas apoyadas en diafragmas en sus extremos, se encuentra en la referencia /5/. En este trabajo se presenta una formulación general del problema de estabilidad en términos de coordenadas generalizadas para sistemas discretos, /6/ y /7/, y el comportamiento de este elemento en la determinación de cargas de bifurcación de las estructuras mencionadas.

2. FORMULACION DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD

Para una estructura de paredes delgadas como la de la Figura 1, el cambio en la energía potencial total ΔV entre un estado sin tensiones y deformaciones y un estado arbitrario deformado, viene dado por

$$V = \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{t}{2} \iint \underline{\varepsilon}^* \underline{\sigma} \, dx \, dy - t \iint \underline{\delta}^* \underline{p} \, dx \, dy - t \int [P \cdot V]_{x_0}^{x_1} \, dx \right\} \quad (1)$$

donde K es el número total de láminas, $\underline{\varepsilon}$ y $\underline{\sigma}$, son los vectores de deformaciones y tensiones generalizadas respectivamente, $\underline{\delta}$, es el vector de desplazamientos, \underline{p} , es el vector de cargas distribuidas, y, P , son las cargas axiales aplicadas en los extremos.

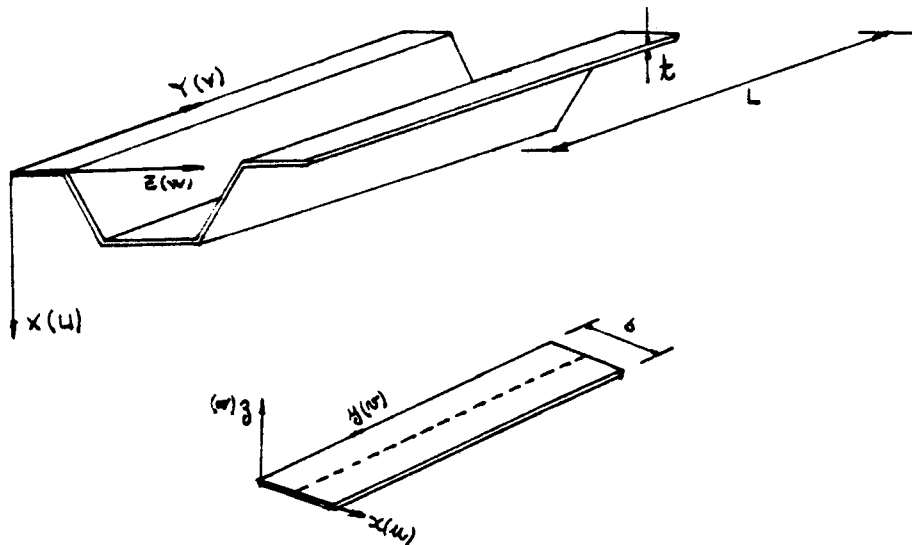


Figura 1. Ejes coordenados y dimensiones consideradas.

Las relaciones cinemáticas en un sistema local de coordenadas, distinguiendo entre componentes lineales y no lineales en desplazamientos, pueden escribirse como

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}' + \underline{\varepsilon}'' \quad (2.a)$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.b)$$

Para un material elástico, isótropo y homogéneo, las ecuaciones constitutivas se escriben

$$\underline{\sigma} = [D] \underline{\epsilon} \quad (3)$$

siendo,

$$[D] = \{ N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy} \} \quad (4)$$

y,

$$[D] = \begin{bmatrix} [D]_m & [0] \\ [0] & [D]_f \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[D]_m = [C] E t / (1 - \nu^2); \quad [D]_f = [C] E t^3 / [12(1 - \nu^2)]; \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

E y ν , son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson respectivamente.

Conocida una trayectoria fundamental de equilibrio a partir de la cual ocurre una bifurcación, los desplazamientos en la trayectoria secundaria pueden escribirse como

$$\underline{\delta}^s = \underline{\delta}^f + \underline{\delta} \quad (7)$$

donde $()^s$ representa desplazamientos en la trayectoria secundaria, $()^f$, desplazamientos en la trayectoria primaria, y las variables sin superíndice son desplazamientos incrementales a partir del estado fundamental.

Si la trayectoria primaria de equilibrio se considera lineal en $\underline{\delta}^f$, pero la trayectoria secundaria se supone no lineal en desplazamientos incrementales, las deformaciones y tensiones en esta última, resultan

$$\underline{\epsilon}^s = \lambda \underline{\epsilon}^f + \underline{\epsilon}' + \underline{\epsilon}'' \quad (8)$$

$$\underline{\sigma}^s = \lambda \underline{\sigma}^f + \underline{\sigma}' + \underline{\sigma}'' \quad (9)$$

donde λ es el parámetro de carga que permite distinguir entre distintos niveles de carga. Para carga transversal y axial que se incrementan, pueden expresarse respectivamente como

$$P^s = \lambda P^f \quad (10)$$

$$R^s = \lambda R^f \quad (11)$$

Reemplazando las ecuaciones (7) a (11) en (1), se tiene

$$\underline{V} = \underline{V}_0 + \underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 + \underline{V}_4 \quad (12)$$

donde V_0 representa la energía potencial total en el estado fundamental; V_1 contiene los términos que dependen linealmente de los desplazamientos incrementales, y es la primera variación de la energía potencial total, V_2 , V_3 y V_4 contienen los términos que dependen respectivamente, en forma cuadrática, cúbica y cuártica de los desplazamientos incrementales. (/6/ y /7/)

Debido a que los esfuerzos y cargas en el estado fundamental se encuentran en equilibrio, la primera variación de V debe ser nula para todo estado incrementado cinemáticamente admisible.

$$V_1 = \delta V = 0 \quad (13)$$

Similarmente, si existe un estado incremental de equilibrio, la trayectoria secundaria puede evaluarse del sistema no lineal

$$\delta V_2 + \delta V_3 + \delta V_4 = 0 \quad (14)$$

En la vecindad de un punto de bifurcación los desplazamientos incrementales pueden considerarse arbitrariamente pequeños, despreciándose los términos de orden superior, y el parámetro de carga λ en el punto de bifurcación puede obtenerse de la expresión

$$\delta V_2 = 0 \quad (15)$$

El campo de desplazamientos incrementales asociado con el menor valor de λ determinado a partir de (15) es el modo de bifurcación.

3. DISCRETIZACION POR BANDAS FINITAS

La banda finita desarrollada tiene tres aristas nodales como indica la Figura 2, e interpola cúbicamente las tres componentes de desplazamiento. Las funciones de interpolación han sido tomadas de la referencia /8/, donde fueron usadas para láminas de revolución. El campo de desplazamientos incrementales viene definido por

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^N \Phi_m^u(x) \sin \frac{m\pi y}{L} \\ v &= \sum_{m=1}^N \Phi_m^v(x) \cos \frac{m\pi y}{L} \\ w &= \sum_{m=1}^N \Phi_m^w(x) \sin \frac{m\pi y}{L} \end{aligned} \quad (16)$$

siendo las funciones polinómicas

$$\begin{aligned} \Phi_u^m &= \psi_1 u_1^m + \psi_2 u_2^m + \psi_3 u_3^m + \psi_4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0^m \\ \Phi_v^m &= \psi_1 v_1^m + \psi_2 v_2^m + \psi_3 v_3^m + \psi_4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0^m \\ \Phi_w^m &= \psi_1 w_1^m + \psi_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0^m + \psi_3 w_2^m + \psi_4 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_2^m \end{aligned} \quad (17)$$

donde

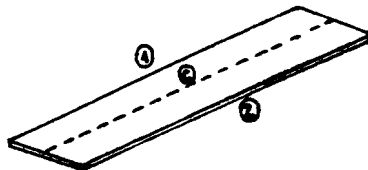
$$\begin{cases} \psi_1 = \xi^2/2 (1-\xi) \\ \psi_2 = \xi^2/2 (1+\xi) \\ \psi_3 = 1-\xi^2 \\ \psi_4 = \xi (1-\xi^2) b/2 \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \psi_1 = (\xi^3 - 3\xi + 2)/4 \\ \psi_2 = (\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1) b/2 \\ \psi_3 = (-\xi^3 + 3\xi + 2)/4 \\ \psi_4 = (\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1) b/2 \end{cases} \quad (19)$$

En $Y=0$, e $Y=L$, se satisfacen las condiciones de borde

$$u = w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$

mientras que en las uniones entre placas se satisface la condición de compatibilidad entre desplazamientos, ya que u y w están definidos por las mismas funciones trigonométricas.



$$\begin{aligned} & [u_1, v_1, w_1, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1] \\ & [u_2, v_2, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2, \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_2] \\ & [u_3, v_3, w_3, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_3] \end{aligned}$$

$\xi = -1$
 $\xi = 0$
 $\xi = 1$

Figura 2.

Reemplazando las expresiones (16) en (15), queda expresada la condición de bifurcación como un problema de vectores y valores propios

$$([K] - \lambda[K_0]) \underline{a} = 0 \quad (21)$$

donde $[K]$ es la matriz de rigidez de la estructura, $[K_0]$ es la matriz de carga-geometría, y \underline{a} es el autovector asociado al autovalor λ .

Las matrices $[K]$ y $[K_0]$ se calculan para cada banda como

$$[K]_e = \int_{A_e} [B]^T [D] [B] dA_e \quad (22)$$

$$[K_0]_e = \int_{A_e} [G]^T [M] [G] dA_e \quad (23)$$

donde $[B]$ es la matriz lineal deformación-desplazamiento, $[D]$ es la matriz de elasticidad, $[G]$ es la matriz geométrica que contiene los términos no lineales de los desplazamientos incrementales, y $[M]$ es la matriz de esfuerzos en el estado fundamental. En el Apéndice se encuentran las formas de estas matrices. Las integrales necesarias para su evaluación se efectúan analíticamente en la dirección longitudinal, y en forma numérica en la dirección transversal. Se adoptó como procedimiento de integración, el método de cuadratura de Gauss-Legendre con tres puntos.

El uso de N componentes armónicos en la trayectoria fundamental lineal conduce a N sistemas de ecuaciones desacoplados, debido a la ortogonalidad de las funciones desplazamiento expresadas en (16). Se pueden obtener soluciones con un esfuerzo computacional sólo linealmente proporcional al número de armónicas considerado. Pero la evaluación de cargas de bifurcación, si el estado fundamental de tensiones está definido como una combinación lineal de N armónicas, implica la existencia de un único problema de autovalores en el que las M armónicas del desarrollo propuesto para los desplazamientos incrementales, están acopladas.

Las variables que influyen en la precisión de la solución son:

- a) el número de bandas, K .
- b) el número de armónicas para la trayectoria primaria de equilibrio, N .
- c) el número de armónicas para la trayectoria secundaria, M .

El tiempo computacional no depende significativamente del número de armónicas para la trayectoria fundamental, pu-

diendo adoptarse en la práctica una cantidad apropiada. La convergencia puede ser demostrada variando K y N.

4. RESULTADOS NUMERICOS

Se presentan a continuación varios ejemplos a los efectos de ilustrar el comportamiento del elemento en la determinación de cargas de bifurcación, comparando resultados con otras soluciones analíticas y numéricas, y haciendo un estudio de convergencia.

4.1 Como verificación de la banda usada se estudió una placa rectangular simplemente apoyada en tres bordes y empotrada en uno, sometida a carga axial. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3, donde la carga de bifurcación se expresa en términos de un coeficiente de pandeo k por medio de la siguiente ecuación

$$P_c = k G_c t \quad (24)$$

donde

$$G_c = \frac{E \pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (25)$$

De la referencia / 9/ se obtiene para la relación de luces $a/b=0.79$, un coeficiente de pandeo $k=5.81$, valor obtenido por los autores empleando 10 bandas y considerando tres armónicas.

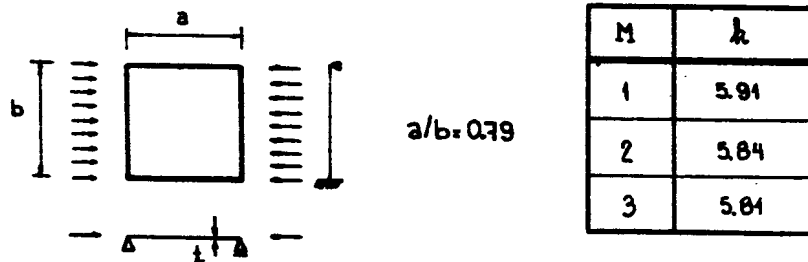
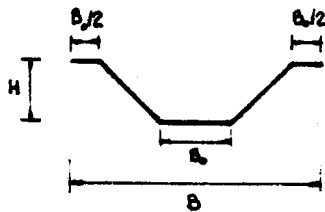


Figura 3.

4.2 Como segundo ejemplo se analiza la estabilidad de una sección trapezoidal bajo carga tipo peso propio. En la Figura 4 se muestran los datos utilizados y un estudio de convergencia de la solución. Este caso se resolvió en la re-

ferencia / 10/ empleando la banda L02, para una armónica y diez bandas, obteniéndose un valor de carga crítica $q_c=13.2$ KN/m.



$$E = 2.17E07 \text{ KN/m}^2 \quad t = 0.06 \text{ m}$$

$$\nu = 0.15 \quad H = 0.65 \text{ m}$$

$$L = 25.0 \text{ m} \quad B = 250 \text{ m}$$

$$(a) \quad B_o = 0.40 \text{ m}$$



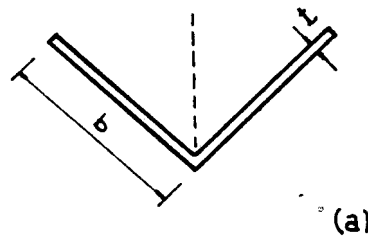
(b)

K	M	Armónicas	q_c [KN/m]
	1	1	14.62
5	2	1 3	14.51
	3	1 3 5	14.16
7	1	1	12.73
	2	1 3	12.65
	3	1 3 5	12.38
10	1	1	12.26
	2	1 3	12.18
	3	1 3 5	12.00

(c)

Figura 4. Inestabilidad de una sección trapezoidal bajo carga tipo peso propio. (a) datos, (b) discretizaciones empleadas, (c) convergencia de la solución.

4.3 En tercer término se estudia la estabilidad de una sección ángulo bajo carga tipo peso propio. Los datos correspondientes, y resultados obtenidos se indican en la Figura 5. Se verifica nuevamente la convergencia de la solución.



$$E = 2.40E07 \text{ KN/m}^2$$

$$\nu = 0.15 \quad \alpha = 60^\circ$$

$$L = 25.0 \text{ m} \quad b = 4.0 \text{ m}$$

$$t = 0.06 \text{ m}$$

K	M	Q_c [KN/m]
8	1	13.14
	2	12.15
	3	10.92
	4	10.44

K	M	Q_c [KN/m]
12	1	9.12
	2	8.82
	3	7.75
	4	7.38

(b)

Figura 5. Inestabilidad de una sección ángulo bajo carga tipo peso propio. (a) datos, (b) convergencia de la solución.

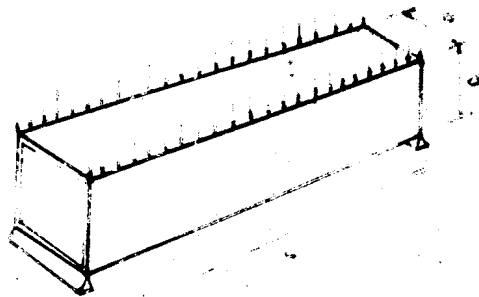
4.4 Por último, se considera una viga cajón sometida a cargas de línea en las paredes verticales. En la Figura 6 se pueden ver las características de la estructura y los valores del coeficiente k de estabilidad para distinta cantidad de armónicas. En este caso, la carga crítica viene dada por

$$P_c = k \frac{\pi^2 D}{d} \quad (26)$$

donde

$$D = Et^3 / [12(1-\nu^2)] \quad (27)$$

Sridharan /3/ ha resuelto este ejemplo con carga de línea parcial, empleando la banda L02. El menor valor del coeficiente de estabilidad, $k=3,20$, lo obtiene para 12 bandas (habiendo discretizado media estructura) y considerando 6 armónicas. La diferencia entre ambas soluciones está asociada a los distintos estados de carga considerados.



$b/d = 1$

$L/d = 4$

$\nu/d = 0.01$

M	k
1	3.032
2	2.500
3	2.266
4	2.216
5	2.244
6	2.242

Figura 3. Inestabilidad de una viga cajón sometida a cargas de línea.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una banda para de orden superior para la determinación de cargas de bifurcación de láminas plegadas prismáticas apoyadas en diafragmas en sus extremos bajo cargas arbitrarias. El comportamiento del elemento ha sido satisfactorio como se demuestran los ejemplos presentados y los estudios de convergencia de la solución.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecer la colaboración de Fernando G. Flores durante el desarrollo de este presente trabajo.

APENDICE

Definiendo los vectores ψ y φ en base a las funciones dadas en (18) y (19).

$$\psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}^T \quad (A.1)$$

$$\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}^T \quad (A.2)$$

Definido

$$a_m = \{u_1^m, u_2^m, u_3^m, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^m\}^T \quad (A.3)$$

$$\underline{a}_m^u = \left\{ \nu_x^m \quad \nu_y^m \quad \nu_z^m \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_m \right\}^T \quad (\text{A.4})$$

$$\underline{a}_m^w = \left\{ w_x^m \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_m \quad w_y^m \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_m \right\}^T \quad (\text{A.5})$$

las expresiones (16) pueden escribirse de la siguiente forma

$$u = \sum_{m=1}^M \psi^T \underline{a}_m^u \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \quad (\text{A.6})$$

$$\nu = \sum_{m=1}^M \psi^T \underline{a}_m^v \cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \quad (\text{A.7})$$

$$w = \sum_{m=1}^M \psi^T \underline{a}_m^w \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \quad (\text{A.8})$$

Las componentes lineales en desplazamientos, del campo de deformaciones generalizadas (expresión (2.b)), resulta

$$\underline{\xi}^i = \sum_{m=1}^M [\underline{B}]_m \underline{a}_m \quad (\text{A.9})$$

donde

$$\underline{a}_m = \left\{ \underline{a}_m^u \quad \underline{a}_m^v \quad \underline{a}_m^w \right\}^T \quad (\text{A.10})$$

y

$$[\underline{B}]_m = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{m\pi y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \frac{m\pi y}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\psi^T}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \psi^T & \psi^T & 0 \\ 0 & \frac{d\psi^T}{dx} & 0 \\ 0 & \psi^T & 0 \\ 0 & \frac{d\psi^T}{dx} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

con

$$\xi_x = \frac{m\pi}{L} \quad ; \quad \xi_z = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \quad (\text{A.12})$$

La expresión de la contribución energética V_m^e para una banda es la siguiente

$$V_m^e = t \left\{ \int_V \left[\frac{1}{2} \underline{\xi}^T \underline{\xi}^i + \frac{\lambda}{2} (\underline{\xi}^T \underline{\xi}^i + \underline{\xi}^T \underline{\xi}^i) \right] dV \right\} \quad (\text{A.13})$$

Teniendo en cuenta que

$$\underline{\underline{Q}}' = [D] \underline{\underline{\xi}}' \quad (A.14)$$

$$\underline{\underline{\xi}}' = [B] \underline{\underline{a}} \quad (A.15)$$

$$\underline{\underline{\xi}}'' = [B_1(a)] \underline{\underline{a}} \quad (A.16)$$

$$\underline{\underline{Q}}' = [D][B] \underline{\underline{a}} \quad (A.17)$$

$$\underline{\underline{Q}}'' = [D][B_1(a)] \underline{\underline{a}} \quad (A.18)$$

la expresión (A.13) resulta

$$\underline{\underline{V}}_i^e = t \left\{ \frac{1}{2} \underline{\underline{a}}^T \int_{A^e} [B]^T [D] [B] dA^e \underline{\underline{a}} + \frac{\lambda}{2} \underline{\underline{a}}^T \int_{A^e} 2[B_1(a)]^T \underline{\underline{Q}}' dA^e \right\} \quad (A.19)$$

O también,

$$\underline{\underline{V}}_i^e = t \left\{ \frac{1}{2} \underline{\underline{a}}^T [K]^e \underline{\underline{a}} + \frac{\lambda}{2} \underline{\underline{a}}^T [K_0]^e \underline{\underline{a}} \right\} \quad (A.20)$$

siendo

$$\int_{A^e} 2[B_1(a)]^T \underline{\underline{Q}}' dA^e = [K_0]^e \underline{\underline{a}} \quad (A.21)$$

La componente no lineal del vector de deformaciones generalizadas puede escribirse de la forma

$$\underline{\underline{V}}_i^e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{u}} \\ \underline{\underline{v}} \\ \underline{\underline{w}} \\ \underline{\underline{u}} \\ \underline{\underline{v}} \\ \underline{\underline{w}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [A] \underline{\underline{\theta}} \quad (A.22)$$

Teniendo en cuenta (A.6), (A.7) y (A.8), el vector $\underline{\underline{\theta}}$ puede relacionarse con los parámetros nodales por

$$\sum_{m=1}^M \begin{pmatrix} \sin \frac{m\pi}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{m\pi}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \frac{m\pi}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \frac{m\pi}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \frac{m\pi}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \frac{m\pi}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (A.23)$$

o también,

$$\underline{e} = [G] \underline{a} = \sum_{m=1}^M [G]_m \underline{a}_m = \sum_{m=1}^M [C]_m [G]_m \underline{a}_m \quad (A.24)$$

Sustituyendo (A.24) en (A.22) se tiene

$$\underline{E}^* = \frac{1}{2} [A] \underline{e} = \frac{1}{2} [A][G] \underline{a} \quad (A.25)$$

De (A.16) y (A.25) se deduce que

$$[B_1(\underline{a})] = \frac{1}{2} [A][G] \quad (A.26)$$

Entonces, el primer miembro de (A.21) puede escribirse

$$\int_{\mathcal{A}} 2 [B_1(\underline{a})]^T \underline{G}^t dA^e = \int_{\mathcal{A}} [G]^T [A]^T \underline{G}^t dA^e \quad (A.27)$$

Pero $[A]^T \underline{G}^t$ también se expresa como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{z}_1 & \underline{z}_2 & \underline{z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{z}_4 & \underline{z}_5 & \underline{z}_6 & \underline{z}_7 & \underline{z}_8 & \underline{z}_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{z}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_7 & \underline{z}_8 & \underline{z}_9 & \underline{z}_{10} & \underline{z}_{11} & \underline{z}_{12} \end{pmatrix} \quad (A.28)$$

O sea,

$$[A]^T \underline{Q}^t, [M] \underline{Q} \quad (A.29)$$

Reemplazando (A.29) y (A.24) en (A.27) queda

$$2 \int_{\mathcal{A}^e} [Q(\underline{a})]^T \underline{Q}^t dA^e + \int_{\mathcal{A}^e} [G]^T [M] [G] dA^e \underline{Q} \quad (A.30)$$

Comparando (A.30) y (A.21) resulta que

$$[K_e]^e = \int_{\mathcal{A}^e} [G]^T [M] [G] dA^e \quad (A.31)$$

donde $[G]$, denominada matriz geométrica contiene los términos no lineales en desplazamientos, y, $[M]$, los esfuerzos en el estado fundamental.

REFERENCIAS

1. Cheung, Y.K., Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, Oxford, Inglaterra, 1976.
2. Godoy, L.A., Finite strip methods for instability of prismatic plate assemblies, Engineering Analysis, (en prensa).
3. Graves Smith, T.R., Sridharan, S., A finite strip method for the buckling of plate structures under arbitrary loading, Int. J. Mechanical Sciences, 20, 685-693, 1978.
4. Godoy, L.A., Prato, C.A., Inestabilidad de placas plegadas por el método de bandas finitas, Revista Internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, Vol. 3, 1, 77-90, 1987.
5. Raichman, S.R., Análisis lineal y de bifurcación de placas plegadas prismáticas usando una banda finita de orden superior, Tesis de Magister en Ingeniería Estructural, Univ.Nac. Tucumán, Argentina, 1988.
6. Croll, J.G.A., Walker, A.C., Elementos de Estabilidad Estructural, Editorial Reverté, España, 1975.
7. Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, Inglaterra, 1973.
8. Flores, F.G., Godoy, L.A., Un elemento de cáscara de revolución para análisis de bifurcación bajo cargas no axil simétricas, VII Congr. Latino-Americano sobre Métodos Computacionales para Ingeniería, Sao Carlos, SP, Brasil, 1986

9. Barés, R., Tables for the Analysis of Plates, Slabs and Diaphragms Based on the Elastic Theory, Bauverlag GmbH., 1969.
10. Godoy, L.A., Prato, C.A., Buckling of thin walled beams under water loading, J. Structural Div., Am. Soc. Civ. Engrs., 110 (11), 2667-2676, 1984.