

ANÁLISIS DINÁMICO DE VIGAS DE SECCIÓN
ABIERTA CONSIDERANDO LA FLEXIBILIDAD POR CORTE

Ricardo D. Ambrosini

Programa de Magister en Ing. Civil,
Universidad Nacional de Tucumán
SM de Tucumán, Argentina

Jorge D. Riera

Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre, RS, Brasil

RESUMEN

Se presentan, por medio de una formulación en términos de variables de estado, las ecuaciones de movimiento para vigas de paredes finas y sección abierta, válidas para vigas con espesor variable, flexibilidad por corte e inercia rotacional. Las mismas fueron determinadas incorporando dichos efectos a la teoría de Vlasov. Las ecuaciones propuestas son empleadas en la determinación de frecuencias de vibración de una viga de hormigón pretensado de sección abierta, y los resultados comparados con otras soluciones.

ABSTRACT

The equations of motion of thin-walled beams with open cross-section, are presented using a state variables approach, considering the effects of shear flexibility, rotatory inertia and variable cross-sectional properties. The equations are based on Vlasov's Theory of thin-walled beams, which is modified to include the effects indicated above. The resulting equations are employed in the determination of the natural frequencies of an open cross-section prestressed concrete beam.

INTRODUCCION

Las ecuaciones propuestas por Vlasov[9] para la determinación de la respuesta de barras rectas o curvas de pared fina y sección abierta, sometidas a cargas estáticas o dinámicas, han sido extensamente utilizadas en las últimas décadas. En relación a problemas dinámicos, las ecuaciones de Vlasov fueron empleadas, entre otros, por Cantiene[2], Christiano y Culver[4], Yoo y Fehrenbach[10] y Carbonari, Riera y Awruch[3]. En general, la comparación de determinaciones experimentales de la frecuencia fundamental y de los desplazamientos producidos por cargas móviles en vigas, con predicciones basadas en la teoría de Vlasov, muestra una correlación satisfactoria. Dicha correlación es comparable con la que puede obtenerse a partir de modelos basados en teoría de cáscaras.

Sin embargo, si se tiene en cuenta que la ecuación de movimiento de barras rectas resultantes de las hipótesis de Bernoulli, que no incorporan la influencia de las deformaciones por corte ni de la inercia rotacional, conducen a errores apreciables cuando es aplicada a barras poco esbeltas[8], se deduce que la consideración de dichos efectos en vigas de paredes finas y de sección abierta también puede ampliar significativamente la precisión y la faja de utilización de las ecuaciones correspondientes. Por otro lado, las ecuaciones de Vlasov[9] son aplicadas únicamente a barras de sección uniforme. La extensión de las mismas a elementos rectos de propiedades variables con la coordenada axial adquiere entonces gran importancia práctica.

En un trabajo anterior, Ambrosini & Riera[1] presentaron, siguiendo la formulación original de Vlasov, ecuaciones de movimiento para barras rectas de paredes finas y sección abierta, que consideran las influencias de la deformación por corte y de la inercia rotacional. Dichas ecuaciones, válidas también cuando las propiedades varían linealmente con la coordenada axial, constituyen un sistema de 12 ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. A continuación son descriptas las hipótesis básicas admitidas en dicho trabajo, así como las ecuaciones resultantes. Un procedimiento de integración numérica, conjuntamente con la transformación del problema de condiciones de borde a otro de condiciones iniciales, son finalmente utilizados para determinar las frecuencias y modos de vibración de ejemplos ilustrativos.

HIPÓTESIS Y ECUACIONES FUNDAMENTALES

Vlasov[9] formuló las ecuaciones de barras de eje recto, paredes finas y sección abierta, con propiedades constantes a lo largo del eje longitudinal, sometidas a cargas laterales y momento torsor distribuidos. La teoría propuesta por Vlasov está basada en las siguientes hipótesis:

- Material elástico y lineal
- Pequeñas deformaciones y desplazamientos
- La sección transversal es rígida en su plano, pero el alabeo es permitido
- El espesor de las paredes es pequeño en relación a las otras dimensiones de la sección transversal, siendo las últimas pequeñas en relación a la longitud de la barra
- Las dimensiones de la sección transversal son constantes, esto es, no varían en la dirección longitudinal
- Las deformaciones angulares debidas a las tensiones de corte asocia-

das a flexión son despreciables.

A partir de las hipótesis indicadas, Vlasov obtiene las siguientes cuatro ecuaciones de movimiento:

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} + \rho A \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho I_z \frac{\partial^4 y}{\partial s^2 \partial t^2} = P_y(s, t) \quad (1)$$

$$EI_y \frac{\partial^4 z}{\partial s^4} + \rho A \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho I_y \frac{\partial^4 z}{\partial s^2 \partial t^2} = P_z(s, t) \quad (2)$$

$$EI_\phi \frac{\partial^4 \theta}{\partial s^4} - GK_t \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \rho A \left(r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a_z \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) - \rho I_\phi \frac{\partial^4 \theta}{\partial s^2 \partial t^2} = M_t(s, t) \quad (3)$$

$$EA \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \rho A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = P_x(s, t) \quad (4)$$

en las cuales (Ver Fig.1):

$x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$: funciones de desplazamiento en las direcciones axial, vertical y lateral, respectivamente

$\theta(s, t)$: giro de la sección transversal alrededor del centro de flexión

$P_x(s, t)$, $P_y(s, t)$, $P_z(s, t)$: proyecciones de las cargas externas por unidad de longitud de la barra, en las direcciones x , y , z , respectivamente

E : módulo de Young del material

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: módulo de elasticidad transversal del material

ν : coeficiente de Poisson del material

A : área de la sección transversal

ρ : masa específica del material

GK_t : rigidez torsional de la sección transversal

K_t : constante de torsión de Saint Venant

I_y , I_z : momentos de inercia con relación a los ejes principales de inercia

$I_\phi = \int_A \phi^2 dA$: constante de alabeo (momento sectorial de inercia)

ϕ : coordenada sectorial normalizada

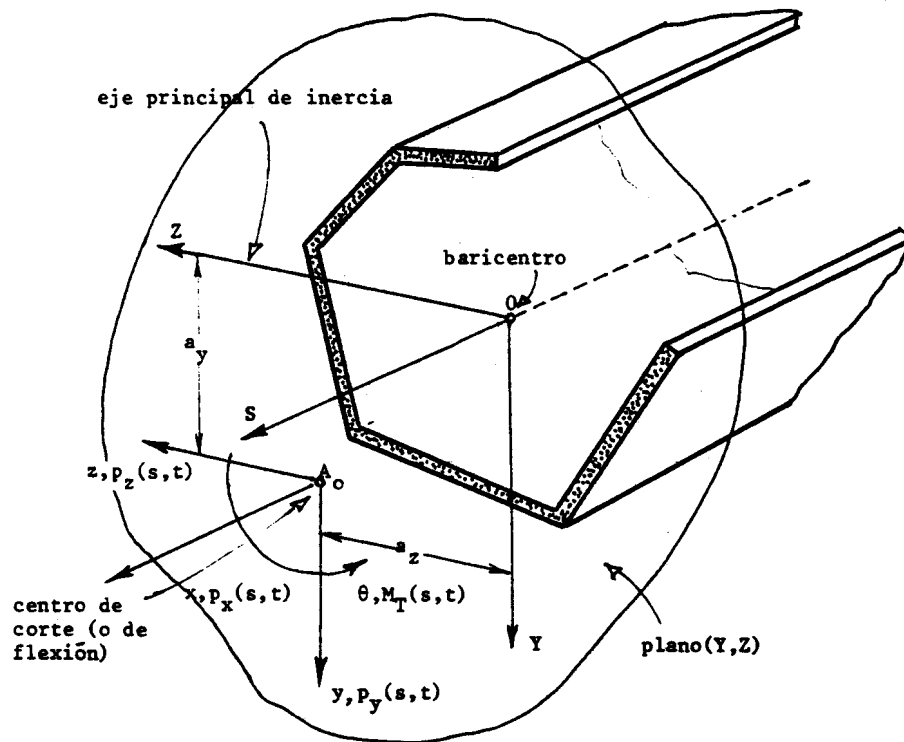


Fig.1. Definición de términos

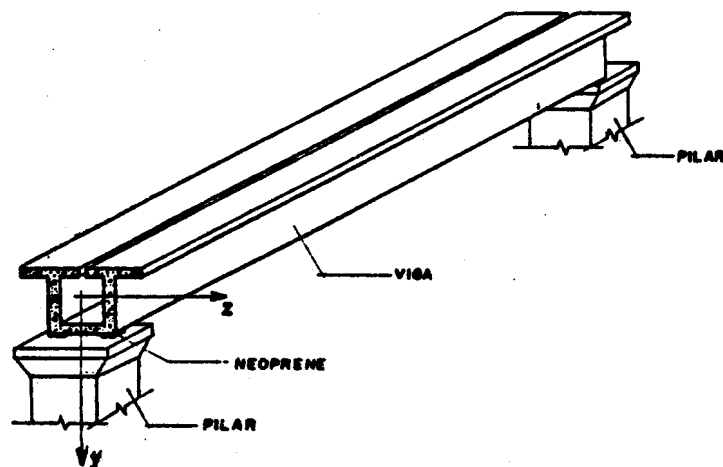


Fig.2. Esquema de la viga en ejemplo

a_y, a_z : coordenadas del centro de flexión A_0 , con referencia a los ejes principales de inercia

$r_y^2 = I_y/A$; $r_z^2 = I_z/A$: radios de giro respecto a los ejes principales

$r^4 = I_\phi/A$

$r^2 = a_y^2 + a_z^2 + r_y^2 + r_z^2$

Las fuerzas internas pueden ser calculadas por medio de las expresiones:

$$\begin{aligned}
 N_x &= EA \frac{\partial x}{\partial s} && : \text{ fuerza axial} \\
 M_y &= EI_y \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} && : \text{ momento flector respecto a Y} \\
 M_z &= EI_z \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} && : \text{ momento flector respecto a Z} \\
 T_s &= GK_t \frac{\partial \theta}{\partial s} && : \text{ momento torsor de St.Venant} \\
 T_\theta &= -EI_\phi \frac{\partial^3 \theta}{\partial s^3} && : \text{ momento de alabeo} \\
 T &= T_s + T_\theta && : \text{ momento torsor total} \\
 BM &= -EI_\phi \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} && : \text{ bimomento} \\
 Q_y &= -EI_z \frac{\partial^3 y}{\partial s^3} && : \text{ esfuerzo de corte respecto a Y} \\
 Q_z &= -EI_y \frac{\partial^3 z}{\partial s^3} && : \text{ esfuerzo de corte respecto a Z.}
 \end{aligned}$$

De acuerdo con Vlasov [9], las ecuaciones precedentes son aplicables cuando las relaciones entre el espesor de la pared y la mayor dimensión de la sección transversal, y entre esta última y la longitud de la barra, son ambas inferiores a 0.1. Dicho límite, aún considerado como apenas indicativo de las relaciones a partir de las cuales las ecuaciones (1-4) comienzan a presentar errores apreciables de aproximación, es sugerido en conexión con problemas estáticos y puede ser menor cuando se desean calcular frecuencias y modos superiores de vibración. En dicho contexto, la influencia de las deformaciones por corte debido a flexión adquiere una incuestionable importancia, acentuada en caso de barras reticuladas o con agujeros. Por otro lado, las ecuaciones de Vlasov no permiten el tratamiento de barras con espesor variable con la coordenada longitudinal. Las ecuaciones de movimiento incluyendo la influencia de las deformaciones por corte y eliminando simultáneamente la restricción a la variación del espesor con s fueron presentadas por Ambrosini y Riera [1], en términos de variables de estado, según se describe a continuación.

FORMULACION EN TERMINOS DE VARIABLES DE ESTADO

Aplicando a todas las ecuaciones relevantes - ecuaciones de equilibrio, relaciones entre esfuerzos y desplazamientos, etc. - la transformada compleja de Fourier con respecto al tiempo, definida como:

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (5)$$

se elimina el tiempo t de la formulación, resultando las variables del problema funciones de la frecuencia ω (rad/s) y de la coordenada longitudinal s . En efecto, siendo:

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(\omega) \quad (6)$$

Se verifica que:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = (-i\omega)^2 F(\omega) \quad (7)$$

Aparece entonces la frecuencia ω como un parámetro en las ecuaciones transformadas. Para simplificar la notación, se mantendrá la misma designación para la variable transformada (en el dominio de la frecuencia), que para la variable original (en el dominio del tiempo). Obsérvese entonces que a continuación todas las variables, tales como funciones de desplazamiento o esfuerzos internos, son transformadas de Fourier de las respectivas magnitudes físicas, y dependen, por lo tanto, de la frecuencia ω .

Las rotaciones con respecto a los ejes Y u Z son definidas por:

$$\phi_z(s, \omega) = z' - \gamma_{mz} \quad (8)$$

$$\phi_y(s, \omega) = y' - \gamma_{my} \quad (9)$$

en las cuales primas indican derivadas con respecto a s , siendo γ_{mz} y γ_{my} deformaciones angulares promedio, que al ser relacionadas con los respectivos esfuerzos de corte Q_z y Q_y conducen a:

$$z' = \phi_z + \frac{\eta_z}{AG} Q_z(s, \omega) \quad (10)$$

$$y' = \phi_y + \frac{\eta_y}{AG} Q_y(s, \omega) \quad (11)$$

donde los coeficientes adimensionales η_y , η_z , estudiados por Couper [5], en conexión con vigas planas, dependen de la forma de la sección transversal. En la teoría de Vlasov se admite, es claro, que ambos coeficientes son nulos, esto es, que $\gamma_{mz} = \gamma_{my} = 0$.

A continuación son elegidas como variables de estado las siguientes magnitudes estáticas y cinemáticas:

$$(y, \phi_y, Q_y, M_z, z, \theta_z, Q_z, M_y, \theta, \theta', T_0, M_0) \quad (12)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 0 & 1 & \frac{\eta_y}{AG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\rho A \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho A \omega^2 a_z & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \rho I_z \omega^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\eta_z}{AG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{EI_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho A \omega^2 & 0 & 0 & 0 & -\rho A \omega^2 a_y & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho I_y \omega^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EI_\phi} \\
 \rho A \omega^2 a_z & 0 & 0 & 0 & -\rho A \omega^2 a_y & 0 & 0 & -\rho A \omega^2 r^2 & -CK'_t & 0 & \frac{G K_t}{EI_\phi} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho I_\phi \omega^2 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

(14)

$$\mathbf{q}^T = \{ 0, 0, -q_y, 0, 0, 0, -q_z, 0, 0, 0, -m_T, 0 \}$$

(15)

En efecto, el esfuerzo y la deformación axiales no están acoplados con las restantes variables y pueden, en caso necesario, ser considerados independientemente. Se define como vector de estado al vector \vec{v} cuyos componentes son las doce variables de estado (12). Las ecuaciones de movimiento pueden entonces ser escritas en la forma [6]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \mathbf{A} \vec{v} + \vec{q} \quad (13)$$

en la cual la matriz \mathbf{A} del sistema, presentada en (14), es una matriz cuadrada de dimensión 12×12 , cuyos componentes son, en general, funciones de s y de ω . Los componentes del vector de cargas externas \vec{q} , indicado en (15), también son funciones arbitrarias de s y de ω .

Aplicando de manera análoga la transformada compleja de Fourier a las ecuaciones (1-4), se obtiene:

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - \rho A \omega^2 (y - a_z \theta) + \rho I_z \omega^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = p_y(s, \omega) \quad (16)$$

$$EI_y \frac{\partial^4 z}{\partial s^4} - \rho A \omega^2 (z + a_y \theta) + \rho I_y \omega^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = p_z(s, \omega) \quad (17)$$

$$EI_\phi \frac{\partial^4 \theta}{\partial s^4} - GK_t \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} - \rho A \omega^2 (r^2 \theta + a_y y - a_z z) + \rho I_\phi \omega^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = M_t(s, \omega); \quad (18)$$

$$EA \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \rho A \omega^2 x = p_x(s, \omega) \quad (19)$$

Tomando $\eta_y, \eta_z, y K_t'$ iguales a cero en (14), el sistema (13) resulta equivalente a las ecuaciones de Vlasov (16-18), esto es, las últimas pueden ser deducidas a partir de la ec.(13). Por el contrario, cuando deformaciones por corte (η_y y $\eta_z \neq 0$) e inercia rotacional (ρI_z e $\rho I_t \neq 0$) son considerados, no resulta conveniente reducir las ecuaciones en términos de variables de estado (13) a un sistema de ecuaciones diferenciales de cuarta orden en términos de las funciones de desplazamiento, de la forma (16-18), debido a dificultades algebraicas que tornan dicho enfoque poco práctico.

La ecuación (13) puede ser integrada numéricamente sin dificultad empleando, por ejemplo, el método de Runge-Kutta o el predictor-corrector. Como el proceso de integración exige el conocimiento de un vector inicial, especificado en $s = 0$, el problema de valores de borde es transformado en un problema de valores iniciales, determinándose los elementos desconocidos del vector inicial por medio de un procedi-

miento análogo al usado en el método de matrices de transferencia. Se describe en la sección siguiente el esquema, en conexión con la determinación de modos y frecuencias naturales de vibración.

CÁLCULO DE MODOS Y FRECUENCIAS NATURALES

En ausencia de cargas externas, $\vec{q} = 0$, reduciéndose la ecuación (13) a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = A \vec{v} \quad (20)$$

Soluciones de ec.(20) distintas de la solución trivial son posibles únicamente cuando la frecuencia ω toma valores ω_n ($n=1,2,\dots$) correspondientes a una de las frecuencias naturales de la barra. El origen de coordenadas $s = 0$ coincide con el apoyo izquierdo de la misma, siendo l la longitud. Para un valor cualquier de la frecuencia ω , si $\vec{v}_a = \vec{v}(0, \omega)$ representa un vector de estado en el extremo izquierdo, mediante integración numérica se puede calcular, con la precisión deseada, el vector en el extremo derecho $\vec{v}_b = \vec{v}(l, \omega)$. En consecuencia, si integra la ec.(20) seis veces, con vectores iniciales \vec{v}_{ai} linealmente independientes, que satisfagan las condiciones de borde en $s=0$. Sea \vec{v}_{bi} el vector en el extremo derecho de la barra correspondiente a \vec{v}_{ai} ($i=1,\dots,6$). Se tiene entonces que:

$$\sum_{i=1}^6 x_i \vec{v}_{bi} = \vec{v}_b \quad (21)$$

en la cual \vec{v}_b representa un vector de estado que satisface las condiciones de borde en $s=l$. A partir de las seis condiciones que deben satisfacer las componentes de \vec{v}_b , la ec.(21) permite establecer un sistema de seis ecuaciones algebraicas homogéneas. Soluciones diferentes de la trivial serán posibles únicamente si el determinante de dicho sistema es nulo, condición que permite la identificación de las frecuencias naturales ω_n . Detalles referentes al procedimiento pueden ser consultadas en las aplicaciones de Ebner y Billington [6] y Pestel y Leckie [7].

EJEMPLO DE APLICACION

Serán determinados las frecuencias naturales de la viga de sección abierta que se muestra en la Fig.2. La viga, de hormigón pretensado y 25m de luz, tiene apoyos articulados a la flexión en las direcciones horizontal y vertical. Las condiciones de borde a la torsión serán aquí consideradas también articuladas, esto es, sin restricción al alabeo, condición que debe aún ser verificada experimentalmente. Las propiedades de la sección transversal en el centro del tramo son las siguientes: $E=35,5\text{GN/m}^2$; $G=14,792\text{GN/m}^2$; $\rho=2500\text{kg/m}^3$; $A=1,085\text{m}^2$; $I_y=0,472\text{m}^4$; $I_z=0,312\text{m}^4$; $I_\theta=0,1975\text{m}^6$; $K_t=0,0105\text{m}^6$; $a_y=1,273\text{m}$; $a_z=0,0$; $\alpha=0,20$. En la Tabla 1 están indicadas las frecuencias determinadas considerando apoyos con y sin restricción al alabeo, mediante varios procedimientos. En primer lugar, se observa que la restricción al alabeo afecta sensiblemente las frecuencias en los modos de torsión-flexión lateral. También pueda verificarse que, para condiciones de borde idénticas, las soluciones mediante el programa DYNAMT, basado

en las ecuaciones de Vlasov (16-18) y las determinadas empleando DYBEAM, o sea variables de estado, ec.(20), para deformabilidad por corte nula, difieren entre si en menos que el error numérico esperado, estimado en 1%.

TABLA 1. FRECUENCIAS NATURALES (Hz)

M O D O	$\theta = \theta' = 0.$		Teoría de Vlasov ($\theta = \theta'' = 0$)		DYBEAM ec.(20) $\eta_y = \eta_z = 0.6$
	Elementos	DINAUT	DINAUT	DYBEAM	
	Finitos Ref.(1)	ecs. (16-18)	ecs. (16-18)	ec.(20) $\eta_y = \eta_z = 0.$	
1.Flexo-torsión lateral	4.85	4,84	3.69	3.69	3.65
2.Flexión vertical*	4.92	5.05	5.06	5.05	5.02
3.Flexo-torsión lateral	11.91	14.77	11.28	11.47	11.0
4.Flexo-torsión lateral	14.35	15.22	12.81	13.00	12.6
5.Flexión vertical	18.40	19.93	20.13	20.03	19.4

*Frecuencia determinada experimentalmente: $\omega_2 = 4.92H_z$

Por otro lado, cuando se incorpora en el modelo la deformabilidad por corte (DYBEAM, $\eta_y = \eta_z = 0.6$), se observa una pequeña reducción en las frecuencias naturales. Mejora la correlación de la primera frecuencia de flexión vertical con el valor observado ($f_2 = 4.92H_z$) y con la solución mediante elementos finitos. Esta última predice también una frecuencia del segundo modo de flexión vertical virtualmente idéntica con la calculada en este trabajo ($f_5 = 18.3H_z$).

CONCLUSIONES

Se presentaron, formulando el problema mediante variables de estado, las ecuaciones de movimiento de vigas de paredes finas y sección abierta, con espesor variable. Como ejemplo de aplicación, son determinadas las primeras cinco frecuencias naturales de una viga de hormigón pretensado, verificandose la coincidencia de las predicciones de las ecuaciones propuestas - cuando no se consideran las deformaciones por corte - con los resultados obtenidos a partir de las ecuaciones de Vlasov. También se presenta evidencia preliminar caracterizando la mayor precisión y campo de aplicación de las ecuaciones propuestas, en relación a las ecuaciones clásicas de Vlasov. Estudios adicionales son aún necesarios. En particular, debe ser analizado el problema de determinación de los coeficientes de corte η_x y η_y para secciones asimétricas, vigas reticuladas, etc.

REFERENCIAS

- [1] Ambrosini, R.D.; Riera, J.D., "Consideración de Deformaciones por Corte, Inercia Rotacional y Parámetros Seccionales Variables en las Ecuaciones de Movimiento de Vigas de Paredes Finas Y Sección Abierta", Caderno Técnico, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, Agosto 1988.
- [2] Cantiene, R., "Dynamic load testing of highway bridges", IABSE Proceedings, Zürich, 1984, 57-72.
- [3] Carbonari, G; Riera, J.D.; Awruch, A.M., "Análise dinâmica de vigas de eixo curvo e seção aberta submetidas a cargas móveis", XXIV Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Colloquia 87; Vol 5, 17-33.
- [4] Christiano, P.; Culver, C., "Horizontally curved bridges subject to moving load", Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, Aug. 1969, 95(8), 1615-43.
- [5] Cowper, G.R., "The shear coefficient in Timoshenko Beam Theory", J.of Applied Mechanics, ASME Transactions, Vol 33, 1966, 335-340.
- [6] Ebner, A.; Billington, D., "Steady state vibrations of damped Timoshenko beams", J.of the Structural Divi., ASCE Proc., 1968, 737-60.
- [7] Pester, E.C.; Leckie, F.A., "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-Hill, New York, 1963.
- [8] Timoshenko, S., Young, D.M., "Vibration Problems in Engineering", 3rd Ed., Van Nostrand, Princeton, NJ, 1968.
- [9] Vlasov, V., "Thin-walled elastic Beams", 2nd Edition, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.
- [10] Yoo, C.; Fehrenbach, J., "Natural frequencies of curved girders", Journal of the Engineering Mechanics Div., Proc. ASCE, 107(2), 1981, 339-54.