

ANALISIS DE ROTURA DE LAMINADOS SIMETRICOS DE
MATERIALES COMPUESTOS

Luis T. Aguirre

- *Departamento de Aeronáutica. Fac. de Ingeniería
Universidad Nacional de Córdoba
- *ATEC S.R.L.
Córdoba - Argentina

El presente trabajo trata sobre el estudio de rotura de laminados de materiales compuestos ortotropos.

En este tipo de laminados es necesario analizar el comportamiento de cada una de las láminas ortotropas que componen el material ante un estado de cargas.

Al comprobar la falla de una de las láminas se debe reformular el laminado y comprobar su respuesta, recordando // que al fallar una capa el laminado es estrictamente un nuevo material que hay que calificar.

De esta forma se incrementa la carga hasta obtener la / falla total del laminado.

El criterio de rotura utilizado para cada lámina es el formulado por Tsai-Hill que es el que más se adapta aun compuesto de vidrio-epoxi.

This paper treats about the failure analysis of laminated orthotropic composite materials.

In this kind of material it is necessary to study the answer of each of the laminae of the laminate to a particular load case.

When one of the laminae fails it is necessary to find // the new characteristics of the laminate, knowing that when / a lamina fails we have a new material.

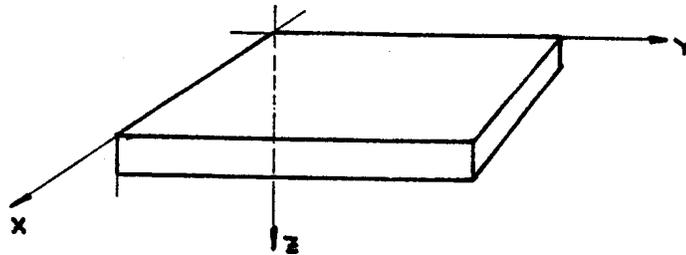
In this way the load is increased till all the laminae fail.

To make the analysis of each lamina we use the Tsai-Hill criterion for glass-epoxi composites.

Notaciones

A, B, D	: Matrices características del laminado
G, H, F, L, M, N	: Constantes propuestas por Tsai
X	: Resistencia de la lámina unidireccional en X
Y	: Resistencia de la lámina unidireccional en Y
S	: Resistencia de la lámina unidireccional al corte
N_L	: Fuerzas por unidad de ancho del laminado
M_L	: Momentos por unidad de ancho del laminado
Q_{ij}	: Términos de la matriz característica de una lámina de compuestos de orientación arbitraria
K	: Número de capa del laminado
θ	: Angulo entre las direcciones principales del material y los ejes de referencia
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: Tensiones
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$: Alargamientos
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$: Alargamiento de la línea media
ρ_x, ρ_y, ρ_z	: Curvaturas

Sistema de ejes



1.- Introducción

Para la determinación de la resistencia de un laminado de materiales compuestos hay que partir, al igual que para la determinación de las rigideces, de las propiedades de una lámina.

En principio, y debido a las características de estos materiales, la falla de una lámina no implica necesariamente la falla total del laminado. El laminado puede soportar cargas mayores aunque su rigidez haya variado en forma considerable.

Debido a las características de los materiales compuestos es muy difícil elaborar una teoría de resistencia en la cual todos los modos de rotura y sus interacciones estén cubiertos. Por otro lado la verificación de esas teorías es muy complicado debido a la cantidad de información que es necesario manejar y la cantidad de variables que se pueden alterar en el proceso. Las teorías deben ser verificadas a través de ensayos y son esenciales para que el diseñador pueda seleccionar el compuesto correcto para cada caso por más complejo que sea el estado de cargas imperante.

Dentro de las teorías de resistencias existentes se ha elegido la desarrollada por Tsai-Hill, debido a que es la que mejor describe el comportamiento de los compuestos de vidrio-epoxi, que es el material que en estos momentos se quiere evaluar.

Todas las teorías de resistencia para materiales compuestos dependen de las resistencias en las direcciones principales del material, que por lo general no coinciden con las direcciones de las tensiones principales.

Los factores principales a tener en cuenta para realizar un análisis de resistencia de un material compuesto son:

- Resistencia de cada lámina.
- Rigidez de cada lámina.
- Coefficientes de expansión térmica de cada lámina.
- Orientación de cada lámina.
- Espesor de cada lámina.
- Secuencia de armado.
- Temperatura de curado.

Las propiedades termomecánicas, espesores y orientaciones son importantes para determinar las características direccionales de resistencia. La secuencia de armado afecta a las rigideces de flexión y acoplamiento del laminado. La temperatura de curado vs. la temperatura de operación influyen en las tensiones residuales. En general si las temperaturas de utilización son diferentes de la temperatura de curado las tensiones térmicas crecerán.

Se requiere un método para el análisis de la resistencia, con el objeto de determinar:

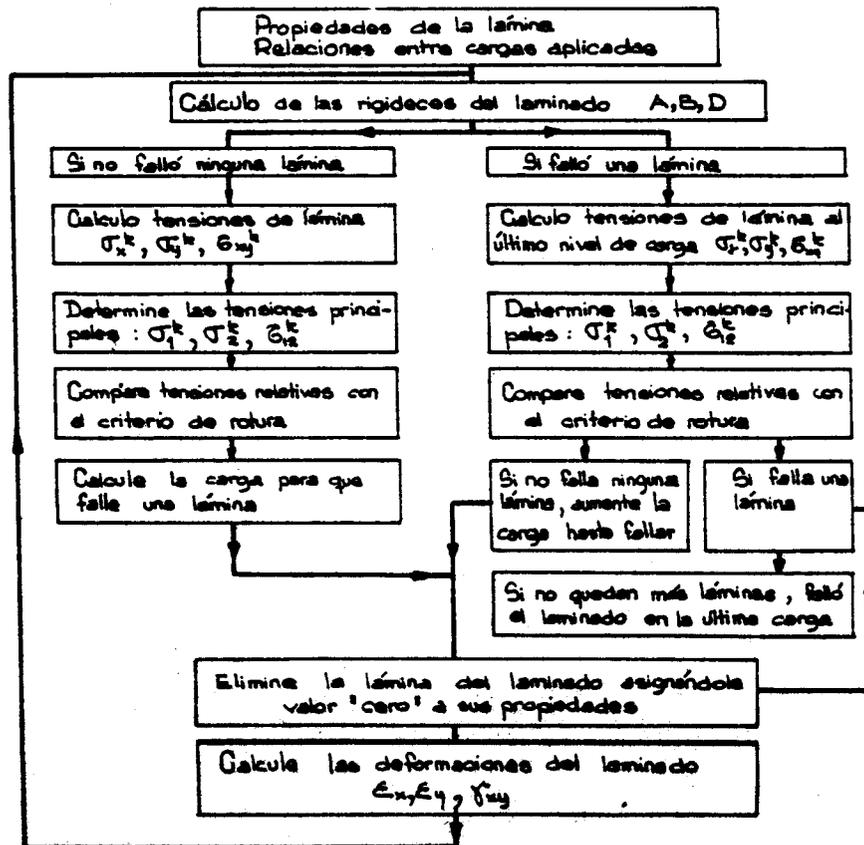
- a) Las cargas máximas que un laminado puede soportar.
- b) Las características que el laminado debe tener para soportar una carga dada.

El primer caso es el análisis y el caso b es el diseño de los materiales.

2.- Procedimiento de análisis de resistencia de un laminado

El análisis de tensiones en las láminas de un laminado/ es una tarea simple pero, a veces, tediosa. Es necesario tener presente la teoría de la laminación, allí las tensiones / se asumieron como funciones lineales de las cargas aplicadas si las láminas exhibían un comportamiento lineal elástico. Si podemos conocer las tensiones en cada lámina, podemos comparárlas con el criterio de rotura y variando la carga determinar la que produce la falla.

En la figura N.1 se puede observar en forma esquemática el procedimiento general para el análisis de la resistencia / de un laminado.



En dicho diagrama se entiende por carga fuerzas y momentos, de igual forma al hablar de deformaciones están incluidos alargamientos y curvaturas. El análisis está compuesto de dos diferentes caminos que dependen de si existe o no la falla de una lámina. Si no ha sucedido esto hay que determinar la carga con la que falla la primera lámina, o mejor dicho, la carga que viola el criterio de rotura utilizado para esa lámina. El proceso de cálculo consiste en incrementar la carga inicial (previamente fijada) hasta que se produzca la falla de alguna capa. Dicha lámina es eliminada haciendo cero sus propiedades (en realidad no se hacen "cero" sus valores, sino que se le asignan valores "casi cero" para evitar las matrices singulares que pudieran aparecer en el resto del cálculo).

Cuando falla una o más láminas se recalculan las rigideces de tracción, flexión y acoplamiento, matrices $[A]$, $[B]$ y $[D]$, con esto se determina la nueva distribución de tensiones.

Debe verificarse ahora si al realizar la redistribución de tensiones, no se produce la falla de otra lámina con la misma carga, de no ser así se incrementa la carga y se continúa el cálculo.

Es interesante citar que no se ha explicitado que criterio de rotura se utiliza, esto es debido a que el proceso // descrito con antelación es independiente del criterio de rotura utilizado.

Es necesario tener presente, que si bien se realizan // consideraciones lineales al analizar cada lámina, el comportamiento general del laminado es no-lineal de no ser que se produzca una falla conjunta de todas las láminas.

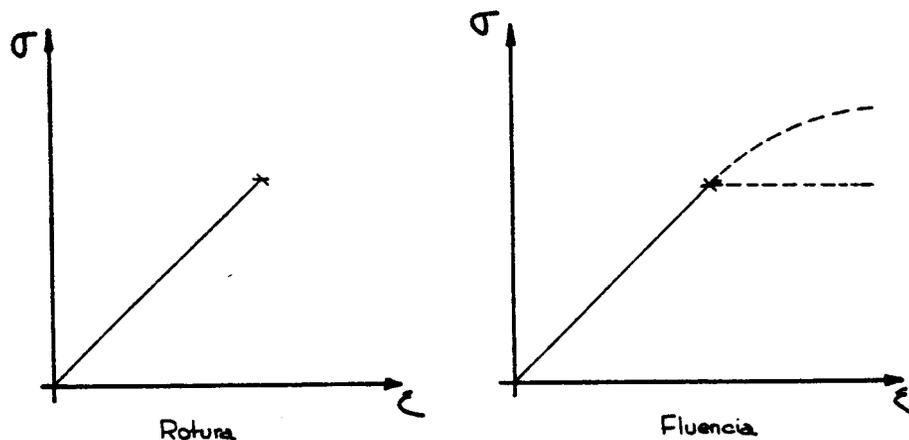
3.- Criterios de resistencia para una lámina

La mayoría de las determinaciones experimentales de resistencia de un material están basadas en estados uniaxiales de tensión. Sin embargo los problemas prácticos presentan // estados bi- cuando no triaxiales de tensiones. Por lo tanto es necesario un método lógico de usar la información obtenida de los estados uniaxiales, en el análisis de los estados multiaxiales.

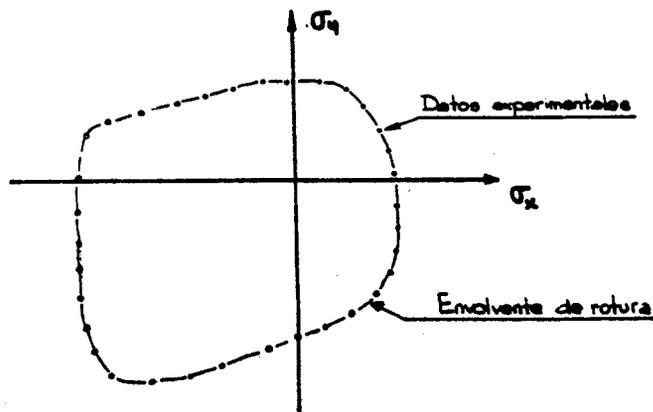
Debido a la gran cantidad de posibles mecanismos de rotura, una transformación tensorial de resistencias es muy difícil. Debemos recordar que las transformaciones tensoriales de resistencia son mucho más complicadas que las transformaciones tensoriales de rigidez. -(El tensor de resistencia es de orden mayor que el tensor de rigidez).

De todas formas las transformaciones tensoriales de resistencia son utilizadas como criterio fenomenológico de rotura, ya que sólo se predice la falla, pero no el tipo de falla. La envolvente teórica de rotura difiere poca cosa del concepto de superficie de fluencia de la teoría de la plasticidad. Ambos representan una terminación del comportamiento lineal elástico ante un estado multiaxial de tensiones. Los

límites del comportamiento lineal elástico se muestran con λ en las curvas de tensión-deformación para una condición de rotura y dos tipos de fluencia en la figura siguiente.



En realidad, las envolventes de rotura no están restringidas a ser el límite de un comportamiento multiaxial lineal elástico. La envolvente enmascara el fenómeno que está ocurriendo y representa meramente donde ocurre una falla, aunque otros eventos, como fluencia, hayan tenido efecto a tensiones menores. Lo que realmente se busca es la definición analítica de la superficie de rotura o envolvente en el espacio de las tensiones. Por ejemplo, los datos de rotura para un material hipotético pueden verse en la figura N.2, en dos dimensiones.



Se puede observar que el material tiene diferentes resistencias en tracción que en compresión. Se debe describir de alguna manera, con una curva o con un conjunto de curvas los datos, cada curva tiene una ecuación que es aplicable para el uso en el diseño.

En el presente trabajo se analiza el criterio biaxial de Tsai-Hill, que es el que más se adapta al trabajo con composites de epoxi-vidrio según cita Jones en Mechanics of Composite Materials.

Las otras teorías son: la de la máxima tensión; la de la máxima deformación y la teoría tensorial de Tsai-Wu.

3.1.- Teoría de rotura de Tsai-Hill

Hill propuso el siguiente criterio de fluencia para materiales anisótropos.

$$(G + H) \sigma_1^2 + (F + H) \sigma_2^2 + (F + G) \sigma_3^2 - 2H \sigma_1 \sigma_2 - 2G \sigma_1 \sigma_3 - 2F \sigma_2 \sigma_3 + 2L \sigma_{23}^2 + 2M \sigma_{13}^2 + 2N \sigma_{12}^2 = 1 \quad (1)$$

Este criterio de fluencia será usado como criterio de resistencia al ser los dos, límites del comportamiento lineal elástico. Por lo tanto, las resistencias de fluencia F, H, L, M, N serán tomadas como de falla. La teoría de Hill / es una extensión del criterio de Von Mises para materiales isótropos. El criterio de Von Mises, puede ser relacionado a la cantidad de energía que se utiliza para deformar el cuerpo, mas que para cambiar su volumen. De todas formas, la de formación no puede ser separada de la dilatación en los materiales ortótropos.

Los parámetros de resistencia F, G, H, L, M y N fueron relacionadas a las tensiones de rotura X, Y y S por Tsai, primero si solo actúa σ_{12} y su máximo valor es S:

$$2 N = \frac{1}{S^2}$$

$$\text{Si sólo actúa } \sigma_1 : \longrightarrow G + H = \frac{1}{X^2}$$

$$\text{Si sólo actúa } \sigma_2 : \longrightarrow F + H = \frac{1}{y^2}$$

Si se denomina con Z la resistencia en la dirección "3" y actúa sólo σ_3 :

$$F + G = \frac{1}{z^2}$$

Combinando las ecuaciones anteriores obtenemos

$$2 H = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2}$$

$$2 G = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2}$$

$$2 F = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2}$$

Para un estado plano de tensiones en el plano 1-2, de una lámina unidireccional con fibras en la dirección 1,

$$\sigma_{13} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \text{ y como puede verse en la figura 3}$$

$$y = z$$

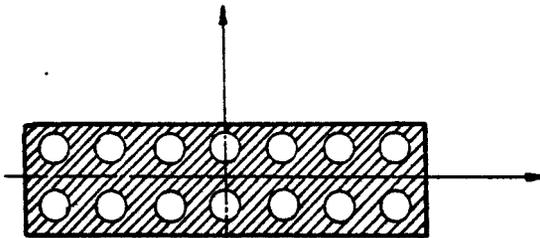


Figura N°3

Por lo tanto la ecuación (1) queda :

$$\frac{\sigma_1^2}{x^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{x^2} + \frac{\sigma_2^2}{y^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{s^2} = 1$$

(2)

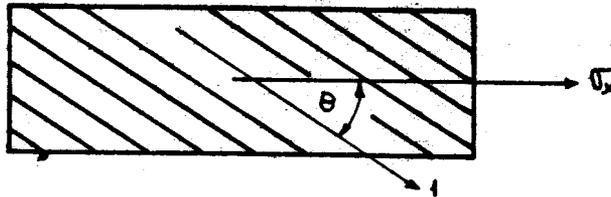
y es el criterio de rotura en términos de las tensiones conocidas de rotura X, Y y S.

Finalmente para un estado uniaxial de tensiones ($\sigma_y \neq 0$) no alineada con las direcciones principales del material:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\sigma_2 = -\sigma_x \sin^2 \theta$$

$$\sigma_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$



y el criterio de Tsai-Hill queda:

$$\frac{\cos^4 \theta}{x^2} + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{x^2} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{y^2} = \frac{1}{\sigma_x^2}$$

(3)

4.- Criterio de Resistencia para un laminado

Se aplica aquí el criterio de Tsai-Hill para predecir la rotura de un laminado de materiales compuestos.

El procedimiento algebraico que se presenta a continuación es el que se siguió para desarrollar el programa de // cálculo presentado en este trabajo.

El primer paso consiste en invertir las ecuaciones de rigidez obtenidas con el AGUIFI, para poder de esa forma obtener las deformaciones ξ_x , ξ_y y γ_{xy} partiendo de la / carga propuesta.

Recordando teníamos:

$$\begin{Bmatrix} N_L \\ M_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} \quad (4)$$

y llegamos luego de invertir a:

$$\begin{Bmatrix} \xi^o \\ \kappa^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ H' & D' \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_L \\ M_L \end{Bmatrix} \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= A^* - B^* D^{*-1} H^* \\ B' &= B^* D^{*-1} \\ H' &= - D^{*-1} H^* \\ D' &= D^{*-1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A^* &= A^{-1} \\ B^* &= - A^{-1} B \\ H^* &= B A^{-1} \\ D^* &= D - B A^{-1} B \end{aligned}$$

Ahora proponemos unos valores iniciales de N_L y M_L , determinamos los ξ^o y κ^o correspondientes con la ecuación (5), con estos valores de ξ^o y κ^o hacemos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_K \cdot \left\{ \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \right\}$$

para cada capa "K" del laminado, estas tensiones σ_{x_K} ; σ_{y_K} y τ_{xy_K} son las que utilizamos en el criterio de rotura.

Ahora bien se ha desarrollado el programa de cálculo para trabajar en el caso de tener fuerzas y no momentos o sea:

$$N_x \neq N_y \neq N_{xy} \neq 0$$

y

$$M_x = M_y = M_{xy} = 0$$

La ecuación (5) toma ahora la forma

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ H^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{Bmatrix}$$

si el laminado es simétrico:

$$H^* = 0$$

y

$$\{\epsilon^0\} = [A^*] \cdot \{N\}$$

o sea

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{16} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{26} \\ A'_{16} & A'_{26} & A'_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{Bmatrix}$$

y las tensiones son:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [Q]_K \cdot \{\varepsilon^o\}$$

Ahora tenemos que introducir estas tensiones en el criterio de Tsai-Hill para ello recordamos que

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

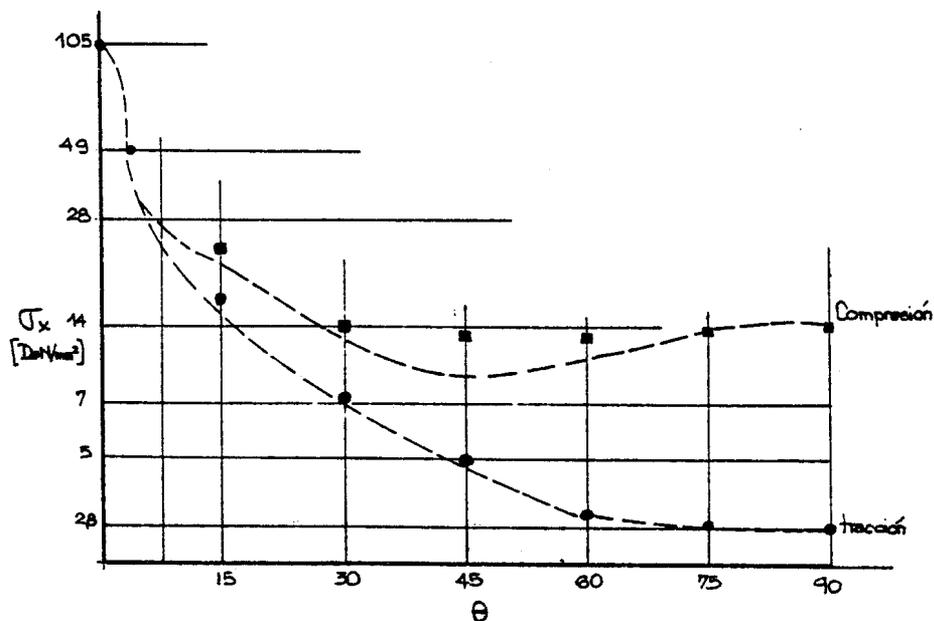
y el criterio es

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1$$

Se ha llevado todo a un estado uniaxial de tensiones, / ya que es el estado que se aplica al material para realizar los ensayos de correlación con la teoría.

En la figura N. 4 se observan graficados los resultados de este criterio y los datos experimentales obtenidos para / un compuesto de vidrio E-epoxy.

(según Jones - Mechanics of Composite Materials)



Las ventajas de la teoría de Tsai-Hill comparadas con la de la máxima deformación y la de la máxima tensión son:

- La variación de resistencia con el ángulo de orientación es suave.
- La resistencia disminuye continuamente mientras θ crece.
- La concordancia entre la teoría y los / valores experimentales es mejor que en los otros criterios.
- Existe interacción entre las resistencias máximas X, Y y S.

Donde reemplazando queda :

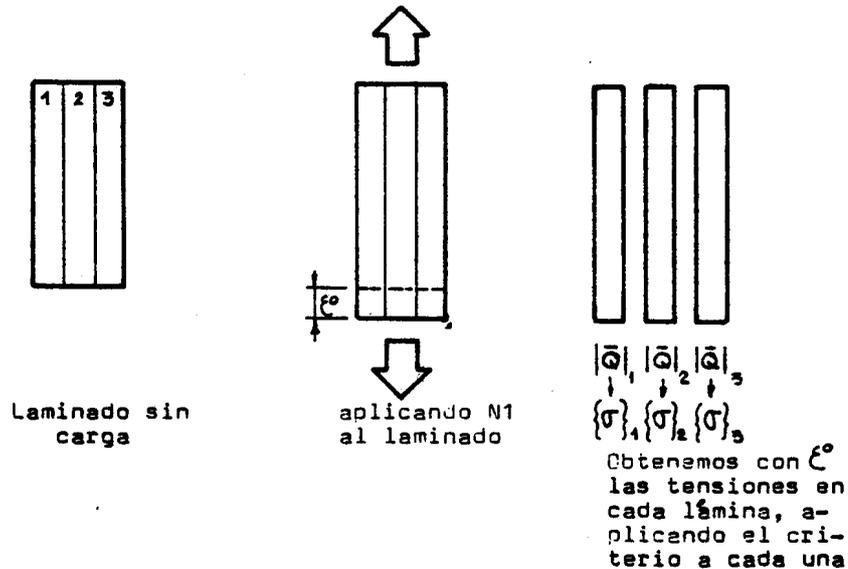
$$\frac{(\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta)}{x^2} -$$

$$\frac{(\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta) (\sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta -$$

$$\frac{-2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta)}{y^2} + \frac{(\sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta)^2}{4^2} +$$

$$+ \frac{(-\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))^2}{s^2} = 1$$

Graficamente se puede expresar asi :



REFERENCIAS : 1 Jones, M., "mechanics of composite Materials" Mc. Graw-Hill, 1982

2 Norma MIL - HDBK-17-a

3 Santalo, Luis , "Vectores y tensores con sus aplicaciones", EUDEBA, 1985