

CALCULO DE AUTOVALORES EN PROBLEMAS ESTRUCTURALES
CON CONTACTO UNILATERAL

Jean-Pierre Jeusette
Victorio E. Sonzogni
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria
Química - CONICET - UNL
Guemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método original para resolver problemas de autovalores derivados de estudios de estabilidad estructural en presencia de restricciones de contacto unilateral. La solución numérica del problema se obtiene minimizando el cociente de Rayleigh, por medio de un método de gradiente conjugado proyectado. El algoritmo permite obtener la carga de pandeo de estructuras con contacto y sus posibilidades se muestran a través de algunos ejemplos simples.

ABSTRACT

In this paper a new iterative method to solve an eigenvalue problem subject to linear homogeneous inequality constraints is presented. This approach allows to study the linearized equilibrium path stability of a structure submitted to unilateral contact conditions. The solution is obtained by using a projected conjugate gradient technique to minimize the finite element discretized form of the Rayleigh quotient. The well behaviour of this algorithm is illustrated on some simple applications of structural mechanics.

1. INTRODUCCION

Antes de comenzar un análisis no lineal de la respuesta completa de una estructura sometida a cargas desestabilizantes, puede ser de gran ayuda el estudio del problema de estabilidad lineal en el instante inicial. Esto puede servir para:

- definir una malla adecuada para el análisis no lineal,
- introducir, en caso de ser necesario, una imperfección geométrica según ese modo de pandeo, y
- tener una idea de la carga crítica y del primer incremento de carga a dar [1].

Además, para el fenómeno de bifurcación desde una trayectoria no lineal, o para el fenómeno de inestabilidad por punto límite, un estudio del problema linealizado de estabilidad en forma incremental, permite detectar la proximidad de puntos de bifurcación. Por otra parte, juntamente con un método incremental/iterativo en el espacio carga-desplazamiento [2,3], la solución de ese problema de autovalores proporciona la selección de un incremento óptimo para la carga en el paso siguiente [4].

Cuando la estructura, objeto del estudio de estabilidad, está sometida a condiciones de contacto unilateral, con una superficie rígida o deformable, es de interés poder tener una buena estimación de la carga y modo de pandeo compatibles con esa restricción.

El problema de abollamiento de una placa con condiciones de contacto unilateral ha sido recientemente resuelto por Bezzine et al. [5] por el método de ecuaciones integrales de borde. El método utilizado se basa en incrementar iterativamente la rigidez artificial asociada a los nodos que violan las condiciones de contacto. Este procedimiento requiere la solución de un problema de autovalores en cada una de las iteraciones.

Otra manera de resolver este problema es mediante técnicas de perturbación. La estructura puede perturbarse, por ejemplo, mediante un desplazamiento impuesto. Un análisis no lineal permite determinar el valor de la carga exterior que anula la reacción asociada al desplazamiento impuesto. Esta carga y la configuración deformada son aproximaciones a la carga de pandeo y el modo asociado. Así pueden analizarse estructuras con contacto unilateral, sin embargo la elección adecuada de la zona y amplitud de la perturbación no es siempre obvio para estructuras complejas.

En este trabajo presentamos un nuevo método iterativo, que ha sido sugerido en [6], para resolver un problema de autovalores sujeto a restricciones homogéneas de desigualdad, por minimización del cociente de Rayleigh mediante un método de gradiente proyectado conjugado. Este método ha sido aplicado por Géradin [7] al análisis de vibraciones libres; más recientemente, Papadrakakis et al. [8] mostraron mejoras en la velocidad de convergencia del algoritmo utilizando un procedimiento de precondicionamiento, para aplicar al caso de grandes sistemas. Extendemos aquí ese procedimiento para problemas linealizados de pandeo en presencia de condiciones de contacto unilateral.

A continuación se describe el problema a resolver y se examinan algunas propiedades del cociente de Rayleigh. Luego se presenta el algoritmo del gradiente conjugado aplicado a la minimización del cociente de Rayleigh. Las modificaciones propuestas para el caso de problemas con

contacto se presentan a continuación. Finalmente se muestran algunos ejemplos que, aunque sencillos, permiten visualizar el comportamiento y sus posibilidades de aplicación.

2. PROBLEMAS DE ESTABILIDAD CON CONTACTO Y COCIENTE DE RAYLEIGH

Estamos interesados en el estudio de la carga crítica de una estructura en presencia de condiciones de contacto unilateral. Esto significa que parte de la estructura puede estar en contacto con apoyos, u otras estructuras, de manera unilateral, esto es, hay una restricción al desplazamiento en un sentido pero no en el sentido opuesto. Un tipo de restricciones tales, en un problema de estabilidad adquiere sentido solamente si las restricciones son homogéneas. Esto significa que se excluirán las restricciones para las cuales sea necesario un "juego" antes de entrar en contacto. Esta limitación aparece porque el modo de pandeo de la estructura tiene sentido en proximidades de la configuración actual y, siendo su magnitud indeterminada, siempre es posible encontrar una constante multiplicativa que lleve la elástica dentro de los valores de ese "juego" y por lo tanto el contacto sería inefectivo. Debe notarse que, habiéndonos restringido al caso de estructuras inicialmente en contacto (juego nulo), el modo de pandeo resulta indeterminado y puede ser multiplicado por una constante que, no obstante, debe ser positiva.

Dentro de las limitaciones que hemos indicado pueden analizarse, en un vasto campo de aplicaciones, estructuras en contacto unilateral con un medio rígido, como es el caso de apoyos unilaterales, o con un medio deformable, como es el caso de contacto con otras estructuras.

Consideraremos ahora un sistema estructural discretizado por el método de los elementos finitos, en modelo de desplazamientos, con n grados de libertad. El problema linealizado de estabilidad, del sistema sin restricciones, conduce al problema de autovalores.

$$K \underline{q} - \lambda \underline{S} \underline{q} = \underline{0} \quad (2.1)$$

donde \underline{q} representa el vector de desplazamientos nodales, K la matriz de rigidez y S la matriz de estabilidad, función del estado de tensiones. El parámetro λ describe la intensidad de la carga aplicada. La ecuación (2.1) permite calcular una carga crítica con las matrices lineales evaluadas en la configuración inicial. Pero también puede ser aplicada en sentido incremental, con la matriz de rigidez tangente, e incluyendo en la matriz de estabilidad la contribución de los desplazamientos actuales, de las cargas seguidoras y del comportamiento no lineal del material. Las cargas críticas evaluadas desde algunas configuraciones deformadas en el rango pre-crítico pueden ayudar a detectar la proximidad de eventuales bifurcaciones o puntos límites.

El problema de autovalores (2.1) tiene n pares de soluciones $(\lambda_k, \underline{q}_k)$. El menor autovalor λ_1 corresponde a la carga crítica y el autovector \underline{q}_1 es su forma modal asociada. Hay varios métodos para resolver (2.1) y pueden ser agrupados, en general, en cinco grupos según sea la propiedad básica que se utiliza en la solución [14]: a) Métodos de iteración vectorial, b) Métodos de transformación, c) Técnicas de iteración polinómica, d) Métodos que emplean las propiedades de la secuencia de Sturm, y e) Métodos basados en la minimización del cociente de Rayleigh. Existen también varios métodos que utilizan combinaciones de técnicas provenientes de esos cinco grupos.

Un algoritmo basado en minimización del cociente de Rayleigh resul-

ta apropiado para nuestro problema. Permite calcular el menor autovalor y, como se verá, es posible incluir condiciones de contacto unilateral. Por otra parte, las operaciones requeridas por el algoritmo son productos de matrices por vectores, productos que pueden ser realizados a nivel de los elementos sin requerir el ensamble de las matrices globales. Esto puede ser una ventaja interesante en el caso de grandes sistemas, en lo que respecta a las necesidades de almacenamiento en memoria principal.

El cociente de Rayleigh, para el problema (2.1), se escribe

$$\lambda = (\underline{q}^T \underline{K} \underline{q}) / (\underline{q}^T \underline{S} \underline{q}) \quad (2.2)$$

El mismo tiene un valor estacionario en proximidades de un vector propio y cuando \underline{q} se hace igual a ese vector propio λ es su autovalor asociado. El cociente (2.2) es un mínimo, e igual al primer autovalor λ_1 , para un vector \underline{q} igual al primer modo \underline{q}_1 .

Si aplicamos un procedimiento para obtener el mínimo de (2.2) para una estructura con condiciones de contacto unilateral, debe agregarse al problema un conjunto de restricciones de desigualdad, y el mismo queda formulado de la siguiente manera:

$$\text{minimizar} \quad \lambda = (\underline{q}^T \underline{K} \underline{q}) / (\underline{q}^T \underline{S} \underline{q}) \quad (2.3)$$

$$\text{sujeto a} \quad \underline{C}^T \underline{q} \geq 0 \quad (2.4)$$

Donde el conjunto de restricciones de desigualdad es homogéneo, como se mencionó anteriormente. La matriz \underline{C} es de dimensión $n \times p$ resultando (2.4) en un número de p restricciones. Las componentes no nulas de \underline{C} son 1 ó -1 lo que implica que (2.4) contiene restricciones del tipo:

$$\pm q_r \geq 0 \quad (2.5)$$

$$q_r \pm q_s \geq 0 \quad (2.6)$$

etc. La limitación que impondremos sobre estas restricciones es que una componente de \underline{q} , por ejemplo q_r , pueda aparecer solamente en una desigualdad de (2.4).

En la sección siguiente escribiremos el algoritmo del gradiente conjugado para el problema sin contactos. En la sección 4 presentamos el algoritmo propuesto para el caso de problemas con contactos unilaterales.

3. METODO DEL GRADIENTE CONJUGADO PARA MINIMIZACION DEL COCIENTE DE RAYLEIGH

Las técnicas de minimización son métodos iterativos que proceden según los tres pasos siguientes [9]:

- a) determinación de una dirección de búsqueda \underline{s} tal que la función objetivo decrezca en esa dirección;
- b) búsqueda de un paso óptimo que minimice la función objetivo en la dirección \underline{s} ;
- c) cálculo de la nueva aproximación al punto correspondiente al mínimo anterior de la función objetivo.

Los distintos algoritmos existentes difieren en el primer paso. El método del gradiente conjugado es una técnica de minimización basada en

el gradiente, que utiliza el concepto de conjugancia de direcciones de búsqueda sucesivas con respecto al Hessiano de la función objetivo.

Utilizaremos la formulación debida a Fletcher y Reeves [10], que presenta la ventaja de poder ser aplicable al caso de funciones no lineales generales. Este proceso converge en un número de iteraciones a lo sumo igual al número de variables n cuando la función objetivo es cuadrática. En el caso de funciones no cuadráticas, el algoritmo pierde esta propiedad de convergencia; sin embargo la propiedad de terminación cuadrática puede asegurarse si el proceso se reinicia, con una iteración de gradiente puro, después del uso de $n+1$ direcciones conjugadas.

Aplicaremos el algoritmo del gradiente conjugado a la determinación del valor estacionario extremo del cociente de Rayleigh que corresponde al modo fundamental de pandeo [7]. El propósito es buscar el mínimo de la función

$$\lambda(\underline{q}) = \frac{\underline{q}^T \underline{K} \underline{q}}{\underline{q}^T \underline{S} \underline{q}} \quad (3.1)$$

Descripción del algoritmo:

A. Inicialización:

A.1. Generación de un vector \underline{q}^0 arbitrario.

A.2. Cálculo de $\lambda(\underline{q})$ y de su gradiente $\underline{g}(\underline{q})$ en este punto

$$\lambda^0 = \lambda(\underline{q}^0) = \frac{\underline{q}^{0T} \underline{K} \underline{q}^0}{\underline{q}^{0T} \underline{S} \underline{q}^0} \quad (3.2)$$

$$\underline{g}^0 = \underline{g}(\underline{q}^0) = \frac{2(\underline{K} \underline{q}^0 - \lambda^0 \underline{S} \underline{q}^0)}{\underline{q}^{0T} \underline{S} \underline{q}^0} \quad (3.3)$$

A.3. Determinación de la dirección inicial de búsqueda (gradiente puro)

$$\underline{s}^0 = \underline{s}(\underline{q}^0) = -\underline{g}^0 \quad (3.4)$$

B. Proceso iterativo, en iteración $i+1$:

B.1. Cálculo del paso óptimo α^i sobre la dirección \underline{s}^i

$$\frac{\partial \lambda(\underline{q}^i + \alpha^i \underline{s}^i)}{\partial \alpha^i} = 0 \quad (3.5)$$

De la ecuación (3.5) elegimos α_*^i que da un mínimo de la función objetivo $\lambda(\underline{q})$ resolviendo

$$u^i (\alpha^i)^2 + v^i \alpha^i + w^i = 0 \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} u^i &= (\underline{s}^{iT} \underline{K} \underline{s}^i) (\underline{q}^{iT} \underline{S} \underline{s}^i) - (\underline{q}^{iT} \underline{K} \underline{s}^i) (\underline{s}^{iT} \underline{S} \underline{s}^i) \\ v^i &= (\underline{s}^{iT} \underline{K} \underline{s}^i) (\underline{q}^{iT} \underline{S} \underline{q}^i) - (\underline{q}^{iT} \underline{K} \underline{q}^i) (\underline{s}^{iT} \underline{S} \underline{s}^i) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$w^i = (q^{iT} K s^i) (q^{iT} S q^i) - (q^{iT} K q^i) (q^{iT} S s^i) \quad (3.7)$$

B.2. Nueva aproximación para q y λ

$$q^{i+1} = q^i + \alpha_s^i s^i \quad (3.8)$$

$$\lambda^{i+1} = \frac{q^{i+1T} K q^{i+1}}{q^{i+1T} S q^{i+1}} \quad (3.9)$$

B.3. Verificación de convergencia del proceso iterativo

$$\left| \frac{\lambda^{i+1} - \lambda^i}{\lambda^i} \right| < \epsilon_1 \quad (3.10)$$

$$|q_r^{i+1} - q_r^i| < \epsilon_2 \max_s |q_s^{i+1}| \quad (3.11)$$

$$r = 1, \dots, n$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son tolerancias para la convergencia. Si las relaciones (3.10) y (3.11) se verifican simultáneamente, λ^{i+1} y q^{i+1} son respectivamente el primer autovalor y el primer autovector del problema (2.1), dentro de las tolerancias prescritas. Si no, el proceso iterativo continúa en el paso B.4.

B.4. Evaluación de nuevo gradiente y dirección de búsqueda

$$\underline{g}^{i+1} = \frac{2(K \underline{q}^{i+1} - \lambda^{i+1} S \underline{q}^{i+1})}{\underline{q}^{i+1T} S \underline{q}^{i+1}} \quad (3.12)$$

$$\underline{s}^{i+1} = -\underline{g}^{i+1} + \beta^i s^i \quad (3.13)$$

donde β^i se calcula de la siguiente manera. Para cualquier función, el valor de β^i surge de la construcción de direcciones conjugadas sucesivas en la métrica del Hessiano de la función objetivo, o sea:

$$\underline{s}^{i+1T} H \underline{s}^i = 0 \quad (3.14)$$

$$H = [H_{kl}] = \left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q_k \partial q_l} \right] \quad (3.15)$$

de donde la expresión para el parámetro de conjugancia es

$$\beta^i = \frac{\underline{g}^{i+1T} H \underline{s}^i}{\underline{s}^{iT} H \underline{s}^i} \quad (3.16)$$

Sin embargo, utilizaremos para β^i una expresión más simple sugerida por Fletcher y Reeves [10] y tan eficiente como (3.16) [11], basada en una aproximación local cuadrática para $\lambda(q)$, que puede escribirse:

$$\beta^i = \frac{\underline{g}^{i+1T} \underline{g}^{i+1}}{\underline{g}^{iT} \underline{g}^i} \quad (3.17)$$

La siguiente iteración se procesa regresando al punto B.1.

Notas sobre el algoritmo

- i) Si la convergencia del proceso no se logra al cabo de un número de iteraciones igual al número de variables incógnitas, el algoritmo debe ser reiniciado con una iteración de gradiente puro. Para ello se hace cero β^i en la relación (3.13) y se va al paso B.1.
- ii) Los productos $\underline{K} \underline{q}^{i+1}$ y $\underline{S} \underline{q}^{i+1}$ pueden calcularse de forma recurrente haciendo

$$\underline{K} \underline{q}^{i+1} = \underline{K} \underline{q}^i + \alpha_*^i \underline{K} \underline{s}^i$$

y

$$\underline{S} \underline{q}^{i+1} = \underline{S} \underline{q}^i + \alpha_*^i \underline{S} \underline{s}^i$$

- iii) La convergencia del algoritmo es muy sensible al número de condicionamiento de la matriz \underline{K} . Se han desarrollado varias técnicas para reducir el número de condicionamiento de la matriz de rigidez. Papadarakakis et al. [8] usan un gradiente preconditionado para iniciar el algoritmo. Géradin [7] menciona una transformación de escala que permite eliminar el número de condicionamiento artificialmente alto proveniente de una inadecuada elección de las unidades de las magnitudes. La transformación de escala puede escribirse así:

$$\underline{q} = \underline{D} \underline{q}^*$$

y

$$\lambda = \frac{\underline{q}^{*T} \underline{K}^* \underline{q}^*}{\underline{q}^{*T} \underline{S}^* \underline{q}^*} \quad (3.18)$$

donde

$$\underline{K}^* = \underline{D}^T \underline{K} \underline{D} \quad ; \quad \underline{S}^* = \underline{D}^T \underline{S} \underline{D}$$

$$\underline{D} = \text{diag} (\underline{K}_{rr}^{-1/2})$$

4. MINIMIZACION DEL COCIENTE DE RAYLEIGH CON CONDICIONES DE CONTACTO UNILATERAL

El problema a resolver puede escribirse en la siguiente forma:

$$\text{minimizar} \quad \lambda(\underline{q}) = \frac{\underline{q}^T \underline{K} \underline{q}}{\underline{q}^T \underline{S} \underline{q}} \quad (4.1)$$

$$\text{sujeto a} \quad \underline{h}(\underline{q}) = \underline{C}^T \underline{q} \geq 0 \quad (4.2)$$

donde las columnas de \underline{C} , cuya dimensión es $n \times p$ (dimensión del sistema por número de restricciones), son los gradientes de las restricciones homogéneas lineales $\underline{h}(\underline{q})$, es decir

$$\underline{C}_j^T \underline{q} \geq 0 \quad j = 1, p \quad (4.3)$$

Limitaremos los tipos de restricciones a los casos en que la matriz \underline{C} está compuesta por 0, 1, δ -1; y más aún, en cada línea de \underline{C} pueda haber solamente una componente distinta de cero.

Antes de describir el algoritmo, haremos algunos comentarios sobre el método de solución:

- i) Si el vector \underline{q} es un punto admisible, es decir perteneciente al conjunto de puntos que satisfacen (4.2), se puede definir un número de restricciones activas $a < n$, tal que

$$\underline{C}_j^T \underline{q} = 0 \quad j = 1, a \quad (4.4)$$

Las $(p-a+1)$ restricciones restantes no son activas:

$$\underline{C}_j^T \underline{q} > 0 \quad j = a+1, p \quad (4.5)$$

En presencia de restricciones lineales, se introducen varias modificaciones en las reglas del algoritmo de minimización, que permiten decidir cuando una restricción se activa e, inversamente, cuando una restricción activa debe desactivarse.

- ii) Se utiliza una técnica de proyección para realizar un movimiento a lo largo de direcciones descendientes situadas sobre el contorno del espacio admisible, esto es el conjunto de puntos que satisfacen las restricciones de desigualdad. Este método conduce a un procedimiento de gradiente proyectado conjugado cuando las sucesivas direcciones de búsqueda son conjugadas.

Definiremos la matriz \underline{N}_a ($n \times a$) de gradientes de las restricciones activas en el punto \underline{q}^i :

$$\underline{N}_a = (\underline{C}_1, \underline{C}_2, \dots, \underline{C}_a) \quad (4.6)$$

La iteración actual debe conducir, imponiendo las relaciones (3.8) a un punto todavía admisible. Para verificar esta condición, Rosen [12] usa una dirección de descenso \underline{s}^i contenida en el "plano tangente" M_a , definido por la intersección de las restricciones activas en el punto \underline{q}^i (si estas restricciones son linealmente independientes, como en nuestras hipótesis), esto es:

$$M_a = \{ \underline{s}^i : \underline{N}_a^T \underline{s}^i = 0 \} \quad (4.7)$$

Si esta condición se respeta, las restricciones activas en el punto \underline{q}^i son todavía activas en el punto \underline{q}^{i+1} . Para eliminar, eventualmente, una restricción de la base activa, utilizaremos una estrategia que se explicará más adelante. La matriz de proyección ortogonal del gradiente en el "plano" M_a puede escribirse:

$$\underline{P}_a = \underline{I} - \underline{N}_a (\underline{N}_a^T \underline{N}_a)^{-1} \underline{N}_a^T \quad (4.8)$$

donde \underline{I} es la matriz identidad ($n \times n$).

- iii) En el caso de una función objetivo no lineal general, el procedimiento de las direcciones de búsquedas conjugadas tiene que ser reiniciado

(con una iteración de gradiente puro), ya sea cuando se produce un cambio en la base de restricciones activas, o después de (n-a) iteraciones en la base actual.

Descripción del algoritmo:

A. Inicialización:

A.1. Generación de un vector \underline{q}^0 admisible, tal que todas las restricciones estén inactivas.

A.2. Cálculo de los valores iniciales de la función y su gradiente

$$\lambda^0 = \frac{\underline{q}^{0T} \underline{K} \underline{q}^0}{\underline{q}^{0T} \underline{S} \underline{q}^0} \quad (4.9)$$

$$\underline{g}^0 = \frac{2(\underline{K} \underline{q}^0 - \lambda^0 \underline{S} \underline{q}^0)}{\underline{q}^0 \underline{S} \underline{q}^0}$$

A.3. Matriz de proyección inicial, suponiendo que todas las restricciones están inactivas

$$\underline{P}_a^0 = \underline{I} \quad (4.10)$$

A.4. Determinación de la dirección inicial de búsqueda

$$\underline{s}^0 = -\underline{P}_a^0 \underline{g}^0 \quad (4.11)$$

B. Proceso iterativo, en la iteración $i+1$

B.1. Determinación del paso α_a^i a lo largo de la dirección de búsqueda \underline{s}^i ; eventual activación a de una nueva restricción.

El parámetro α_a^i se calcula minimizando la función objetivo sobre la dirección \underline{s}^i , sin violar alguna restricción:

$$\alpha_a^i = \min \{ \bar{\alpha}^i, \alpha_*^i \} \quad (4.12)$$

donde $\bar{\alpha}^i$ el máximo valor admisible se define como:

$$\bar{\alpha}^i = \min_k \left\{ -\frac{\underline{C}_k^T \underline{q}^i}{\underline{C}_k^T \underline{s}^i} \right\} ; \quad k = a+1, p \quad (4.13)$$

bajo la suposición de que hay a restricciones activas en la iteración anterior; y donde α_*^i proviene de la condición de mínimo de la función objetivo

$$\frac{\partial \lambda(\underline{q}^i + \alpha^i \underline{s}^i)}{\partial \alpha^i} = 0 \quad (4.14)$$

La solución de (4.14) está dada por las relaciones (3.6) y (3.7). Si α_a^i es igual a α_*^i , el mínimo de $\lambda(\underline{q})$ a lo largo de la dirección

\underline{g}^i está situado sobre el dominio admisible. En este caso $\underline{N}_a^{i+1} = \underline{N}_a^i$, $\underline{p}_a^{i+1} = \underline{p}_a^i$ y el algoritmo sigue en el paso B.2.

Si α_a^i no es igual a α_a^i , aparece una nueva restricción activa y el operador de proyección actual es

$$\underline{P}_a^{i+1} = \underline{I} - \underline{N}_a^{i+1} (\underline{N}_a^{i+1 T} \underline{N}_a^{i+1 T})^{-1} \underline{N}_a^{i+1 T} \quad (4.15)$$

donde \underline{N}_a^{i+1} se forma a partir de \underline{N}_a^i adicionándole el gradiente de la restricción que se ha activado.

B.2. Nueva aproximación del vector \underline{q} , el cociente de Rayleigh y su gradiente

$$\underline{q}^{i+1} = \underline{q}^i + \alpha_a^i \underline{g}^i \quad (4.16)$$

$$\lambda^{i+1} = \frac{\underline{q}^{i+1 T} \underline{K} \underline{q}^{i+1}}{\underline{q}^{i+1 T} \underline{S} \underline{q}^{i+1}} \quad (4.17)$$

$$\underline{g}^{i+1} = \frac{2(\underline{K} \underline{q}^{i+1} - \lambda^{i+1} \underline{S} \underline{q}^{i+1})}{\underline{q}^{i+1 T} \underline{S} \underline{q}^{i+1}} \quad (4.18)$$

B.3. Eliminación eventual de una restricción de la base activa.

Si no hay restricciones activas, $\underline{p}_a^{i+1} = \underline{p}_a^0$ y el proceso continúa en el punto B.4.

En caso contrario, se evalúa una estimación de los multiplicadores de Lagrange asociada a las restricciones activas, como

$$\underline{r}^{i+1} = (\underline{N}_a^{i+1 T} \underline{N}_a^{i+1 T})^{-1} \underline{N}_a^{i+1 T} \underline{g}^{i+1} \quad (4.19)$$

Si todas las componentes de \underline{r} son no negativas, va a B.4 para verificar la convergencia. De lo contrario, la restricción que corresponde a la componente negativa de menor valor r se elimina de la base activa. Se determina una nueva matriz \underline{N}_a^{i+1} eliminando, de esa matriz el gradiente de esta nueva restricción inactiva. Se calcula \underline{p}_a^{i+1} con la fórmula (4.15) y se continúa con el paso B.4.

B.4. Verificación de convergencia

De igual manera que en la sección 3. Si las relaciones (3.10) y (3.11) se verifican simultáneamente, se alcanza la convergencia y λ^{i+1} y \underline{q}^{i+1} son, dentro de las tolerancias establecidas, el primer autovector y autovector del problema (2.1) sujeto a las restricciones (4.2). Si no se alcanza convergencia el proceso continúa en B.5.

B.5. Determinación de la nueva dirección de búsqueda

$$\underline{s}^{i+1} = -\underline{P}_a^{i+1} \underline{g}^{i+1} + \beta^i \underline{s}^i \quad (4.20)$$

donde el parámetro β^i se evalúa por (3.17) con el gradiente proyectado, es decir

$$\beta^i = \frac{\| \underline{p}_a^{i+1} \underline{g}^{i+1} \|^2}{\| \underline{p}_a^i \underline{g}^i \|^2} \quad (4.21)$$

La siguiente iteración se realiza regresando al punto B.1.

Comentario sobre el algoritmo

- i) En relación al punto B.3, la estimación de un multiplicador de la restricción activa es una imagen de la ganancia obtenida en el decrecimiento de la función objetivo, si la restricción correspondiente se retira de la base activa. Sin embargo estas estimaciones son poco precisas cuando no se realizan en proximidad de un punto estacionario. Puede presentarse un fenómeno de zig-zag que reduce la velocidad de convergencia. Para evitar este inconveniente Zoutendijk [13] propone la estrategia siguiente: si una restricción previamente quitada de la base activa, se agrega a ella nuevamente, esta restricción se mantiene activa independientemente del signo del multiplicador asociado, hasta que se alcance un punto estacionario en esa base.
- ii) Con respecto al punto B.5, si hay un cambio en el número de restricciones activas, en la iteración actual $i+1$ (es decir $p_a^{i+1} = p_a^i$), o, si el algoritmo completa $n-a$ iteraciones desde el último cambio en la base activa, el proceso se reinicializa con una iteración de gradiente puro. El escalar β_i se anula en la relación (4.20).

5. EJEMPLOS

Se describen a continuación algunos ejemplos simples procesados por SAMCEF [16] a fin de mostrar el desempeño del algoritmo. En primer lugar debe indicarse que, cuando se aplicó el procedimiento al caso de estructuras sin contacto, se obtuvieron los mismos resultados, para el primer modo, que los obtenidos mediante otros métodos de solución (por ejemplo, el método de Lanczos).

De igual manera, cuando el primer modo de pandeo de una estructura con condiciones de contacto unilateral puede desarrollarse sin activación de esos contactos, el valor de la carga crítica y el modo asociado obtenidos con este procedimiento, coincide con aquellos calculados con el método de Lanczos para la estructura sin contacto. Ese es el caso de la columna empotrada-libre, con un contacto unilateral en su extremo, como muestra la figura 1. Se obtuvo en este caso la carga crítica de Euler y la observación que debe hacerse es que el modo puede ser multiplicado por un factor de cualquier magnitud, pero positivo a fin de no violar las condiciones de restricción.

El vector inicial, en este caso tenía valores unitarios en todos los grados de libertad y las tolerancias fueron $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-7}$. Para la estructura modelada con 8 elementos de viga de Bernoulli, se precisaron 74 iteraciones para la convergencia total.

El primer ejemplo en que el modo de pandeo se desarrolla con una participación activa de las restricciones es, cuando a la misma columna se le colocan dos contactos unilaterales actuando en sentido opuesto. Estos contactos, representados con triángulos negros en la figura 2, están

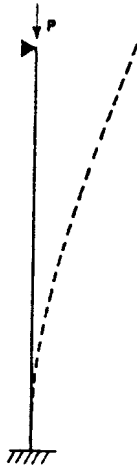


Figura 1: Columna empotrada-libre con una restricción de contacto.



Figura 2: Columna empotrada-libre con dos restricciones de contacto.

ubicados a un 50% y 75% de la altura de la columna. El modo de la figura 1 se ve ahora impedido y el primer modo obtenido con el algoritmo propuesto se muestra en figura 2. Corresponde a una carga crítica $2.53 P_e$. Esta carga es intermedia a las del primero y segundo modos de la columna de Euler sin restricciones de contacto, cuyos valores son P_e y $9.0 P_e$ respectivamente. Esto está de acuerdo con la propiedad de separación de los autovalores de sistemas con restricciones.

Esta estructura fue modelada con 4 elementos de viga y, para tolerancias $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$, se requirieron 25 iteraciones para la convergencia completa. El vector inicial se tomó con valores unitarios en todos los grados de libertad, y con signo cambiado frente al contacto del medio de la vista para no violar las condiciones de contacto.

Finalmente se estudió una columna biarticulada, cargada axialmente y apoyada sobre una pared rígida (figura 3). Para forzar un primer modo con contactos activos, se colocó un resorte a mitad de la altura. La constante de este resorte se eligió de forma que el primer modo del sistema sin contactos fuera asimétrico. En la figura 4 se muestran los dos primeros modos del sistema sin restricciones de contacto. Cuando se agrega la pared, el primer modo del sistema con contactos unilaterales pasa a ser el que se muestra en la figura 3. Este ejemplo fue presentado por Delsemme y Laschet [16], quienes obtuvieron una carga crítica imponiendo un juego transversal en un punto de la columna, que la separa de su configuración recta. En correspondencia con ese punto aparece una reacción cuando la estructura está descargada axialmente. A medida que aumenta la carga axial, la reacción esa disminuye y se anula al alcanzarse el valor de la carga crítica. Así, usando una malla de 10 elementos rectangulares de estado plano para modelar la columna, en ref. 6 obtuvieron una carga crítica igual a $1.39 P_r$, siendo P_r la carga crítica de la estructura sin contacto (figura 4-a).

Al aplicar el proceso descrito en este trabajo, con una malla de 20 elementos de viga, se obtuvo una carga crítica de $1.33 P_r$. En este caso el problema tenía 59 grados de libertad libres y 19 condiciones de restricción. Con una tolerancia de 10^{-7} para ambos tests, se requirió 360 iteraciones para una convergencia completa. Se tomó como partida un vector unitario.

A través de los casos presentados puede verse que el algoritmo propuesto permite calcular la carga crítica para estructuras con condiciones de contacto unilateral. Queda aún por estudiarse las posibilidades de este algoritmo cuando se aplique a un rango mayor de estructuras y problemas, como así también las formas de optimizar el procedimiento. En relación con este tema, debe estudiarse la influencia del vector inicial sobre la convergencia del proceso, por ejemplo, si al colocar contactos activos en el vector inicial, se produce en la mayoría de los casos una disminución en el número de iteraciones. Una limitación que se encontró para el vector inicial, a través de los casos estudiados, aparece en problemas con simetría de la estructura. Si en estos casos el vector de partida es también simétrico, el algoritmo no puede desprenderse de esa simetría y conducirá a un modo también simétrico, aún cuando no corresponda a la carga crítica. Por lo tanto debe evitarse la simetría del vector inicial en ese tipo de problemas.

6. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo hemos presentado un procedimiento de gradiente proyectado conjugado para minimizar el cociente de Rayleigh con

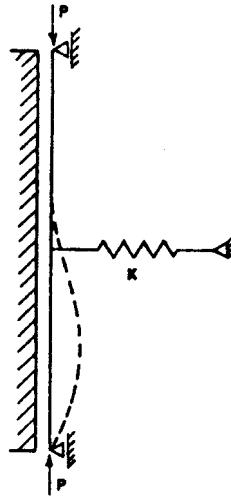


Figura 3: Columna biarticulada, con un resorte agregado, apoyado sobre una pared rígida.

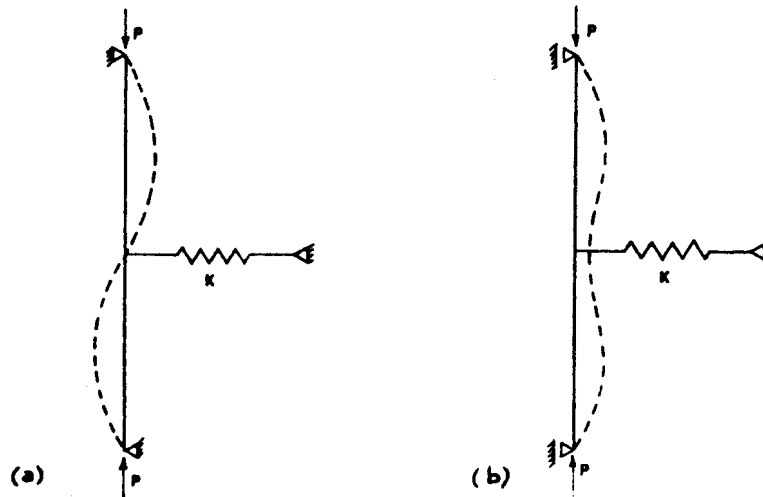


Figura 4: Estructura de la figura 3 sin la restricción de contacto:
a) Primer modo, b) Segundo modo.

restricciones de contacto unilateral. Este método permite tratar problemas linealizados de estabilidad inicial o incremental respetando condiciones de contacto unilateral. Esto constituye una herramienta importante para un análisis no lineal completo en presencia de contactos.

Los resultados obtenidos muestran el buen desempeño del algoritmo, fácil de implementar y que solamente requiere multiplicaciones y no inversiones de matrices. Las aplicaciones presentadas no son limitativas. El método es capaz de resolver una gran cantidad de casos de problemas de pandeo con condiciones de contacto con un medio rígido o deformable.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento al Prof. Guy Sander por su valioso aliento para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] E. Carnoy, G. Panosyan. Approximation of the plastic buckling load as the solution of an eigenvalue problem. Nuclear Eng. and Design, 78, 347-353 (1984).
- [2] E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. Int. J. Solids Struct. 15, 524-551 (1979).
- [3] M.A. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. Comp. Struct. 13, 55-62 (1981).
- [4] E. Carnoy, G. Panosyan. Numerical methods in buckling analysis of elastoplastic thin shell structures. Third Int. Coll. Stability of Metal Structures, Edn. Centre Technique Industriel de la Construction Métallique), Paris (1983).
- [5] G. Bezine, A. Cimetière, J.P. Gilbert. Unilateral buckling of thin elastic plates by the boundary integral equation method. Int. J. Num. Meth. Eng. 21, 2189-2199 (1985).
- [6] J.P. Delsemme, G. Laschet. Méthodes d'analyse de stabilité dans le domaine non linéaire en présence de conditions de contact. Report SF-140. Aerospace Laboratory of Liège University, Belgium (1986).
- [7] M. Gérardin. The computational efficiency of a new minimization algorithm for eigenvalue analysis. J. Sound. Vibration 19, 319-331 (1971).
- [8] M. Papadrakakis, M. Yakoumidakis. A partial preconditioned conjugate gradient method for large eigenproblems. Comput. Meths. Appl. Mech. Engng. 62, 195-207 (1987).
- [9] C. Fleury. Le dimensionnement automatique des structures élastiques. Ph.D. Thesis, University of Liège, Belgium (1978).
- [10] R. Fletcher, C.M. Reeves. Function minimization by conjugate gradients. Computer J. 7, 149-154 (1964).
- [11] M. Papadrakakis, A numerical study of the solution of the partial eigenvalue problem. J. Sound Vibration 73(3), 353-362 (1980).
- [12] J.B. Rosen. The gradient projection method for non linear

- programming. Part I: linear constraints. SIAM J. 8(1), 181-217 (1960).
- [13] G. Zoutendijk. Nonlinear programming, computational methods, Edn. J. Abadie, North-Holland, Amsterdam (1970).
- [14] K.J. Bathe and E.L. Wilson, Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs (1976).
- [15] S. Timoshenko, Theory of elastic stability. Mc Graw-Hill, New York (1936).
- [16] SAMCEF, Système d'Analyse des Milieux Continus par Eléments Finis, Université de Liège, Belgique.
-