

APLICACIONES DEL METODO VARIACIONAL INCREMENTAL (I H B)
A LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE INESTABILIDAD DINAMICA

Alejandro T. Brewer
Fernando G. Flores
Luis A. Godoy

Departamento de Estructuras
Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Nat.
Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de Correo 918
5000 Córdoba - Argentina

RESUMEN

Se presenta la aplicación del método IHB a la solución de problemas de inestabilidad dinámica bajo carga escalón. Se muestra la obtención de las ecuaciones y los esquemas de avance con prescripción en la carga y desplazamiento. Los resultados obtenidos se contrastaron con la solución analítica del modelo estudiado mostrando muy buena correspondencia. Por ser un método que parte de una formulación variacional, puede utilizarse en conjunción con el MEF.

ABSTRACT

An application of the IHB method to the solution of dynamic instability under step loading is presented. First, the paper describes the basic equations and the scheme used to follow a path under prescribed load and displacement. The results are compared with an analytical solution for the same model, and good agreement is obtained. The technique is specially appropriate to be used in conjunction with the FEM because it is obtained from a variational formulation.

INTRODUCCION

Uno de los problemas que ocupa la atención de los investigadores es la búsqueda de métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales no lineales asociadas a sistemas dinámicos. Entre los métodos de integración directa se encuentran los esquemas de integración numérica implícitos, explícitos y semi-implícitos. Los métodos implícitos son más costosos con la ventaja de ser incondicionalmente estables y no tener restricción en la elección del paso de avance; en los explícitos la secuencia de avance es más simple pero el paso está restringido a fin de garantizar la estabilidad del método y en los esquemas semi-implícitos se busca mantener las ventajas de los anteriores: estabilidad incondicional y simplicidad en el avance [1],[2]. Otra posibilidad es utilizar métodos de perturbación los cuales proveen soluciones analíticas, que muestran la influencia de los distintos parámetros en la solución, pero que, en general, son aplicables a problemas suavemente no lineales, [3]. Cuando el sistema no lineal presenta soluciones periódicas, se puede utilizar un método incremental (Incremental Harmonic Balance, IHB) que fuera propuesto por Lau y Chung [4] o su equivalente el HENR (Harmonic Balance Newton Raphson), [5], cuya principal ventaja es que puede aplicarse a sistemas fuertemente no lineales. Las aplicaciones que presenta la literatura se refieren a oscilaciones libres [4] y a sistemas con excitación periódica, [6-9]. Posteriormente, el método se extendió para considerar oscilaciones no periódicas de sistemas no lineales [10,11]. Sin embargo, no se han reportado al presente aplicaciones del método para analizar problemas de inestabilidad dinámica para carga escalón. Cuando el sistema puede ser modelado como de un grado de libertad la solución se puede encontrar en forma analítica por separación de variables y obtener expresiones explícitas para la carga dinámica de pandeo [12]. Raftoyiannis y Kounadis [13] estudiaron distintos modelos de un grado de libertad y propusieron un método estático para establecer la carga dinámica crítica; y dejaron en claro que dicho método no podía extenderse a sistemas de múltiples grados de libertad. Kleiber et al [14] propusieron un criterio para sistemas de múltiples grados de libertad que consiste en integrar la ecuación de movimiento y evaluar en cada paso el valor de la menor frecuencia del problema de valores propios asociado. Si existe un tiempo crítico para el cual el menor autovalor se anula, entonces para valores del tiempo mayores al crítico la solución presentará una quasi-bifurcación dinámica, consistente en una desviación significativa de la respuesta para pequeñas perturbaciones iniciales. A su vez Auli y Rammerstorfer [15] en una evaluación de los distintos criterios y algoritmos disponibles en el estudio de inestabilidad dinámica analizan la propuesta de Kleiber et al y concluyen que es demasiado conservativa.

Entonces, el propósito del presente trabajo es evaluar el comportamiento del método IHB para la predicción de cargas dinámicas de pandeo cuando la carga es escalón. A fin de contrastar los resultados se ha utilizado un modelo no lineal de un grado de libertad que posee dos características importantes: una es que es posible obtener una solución analítica y la segunda es que permite modelar el comportamiento de sistemas que estáticamente están asociados a bifurcaciones simétricas (estables o inestables), asimétricas y puntos límites. La presentación de resultados se hace mediante diagramas carga-amplitud que muestran la

Influencia de las distintas aproximaciones en el valor de la carga obtenida respecto del valor analítico y mediante diagramas de fase presentados para evaluar el comportamiento de la respuesta en el tiempo obtenida por el método IHB respecto de una integración numérica directa.

MODELO - COMPORTAMIENTOS BASICOS

El modelo utilizado en este trabajo fue propuesto inicialmente por Von Karman et al [16] en su estudio sobre la respuesta a cargas dinámicas de cilindros. Posteriormente, Budiansky y Hutchinson [12] lo modificaron para obtener estimaciones para cargas dinámicas de pandeo en cáscaras cilíndricas. Estos autores estudiaron el comportamiento para carga axial solamente. En la Fig. 1 se muestra el modelo, con el agregado de una carga transversal, λ_2 introducida con el fin de modelar el problema de interacción entre la carga axial estática y transversal dinámica [17]. El modelo consta de dos barras rígidas iguales articuladas, restringidas por un resorte no lineal cuya fuerza depende no linealmente del desplazamiento:

$$F = k L \left[\frac{x}{L} + k_a \left(\frac{x}{L} \right)^2 + k_b \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \quad (1)$$

La masa del sistema, m , se ha concentrado en la articulación central y representa la inercia del modelo en la dirección de la carga transversal.

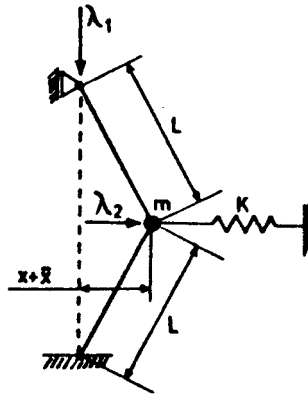


Fig. 1 - Modelo

La ecuación dinámica de equilibrio del modelo puede escribirse en forma adimensional:

$$\frac{\ddot{\xi}}{\omega_n^2} + \left[1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{1c}} \right] \xi + a \xi^2 + b \xi^3 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{1c}} \xi - \frac{\lambda_2}{k L} = 0 \quad (2)$$

donde

k es el coeficiente de rigidez del término lineal;
 $a = k_2/k_1$ y $b = k_3/k_1$ son las relaciones entre los coeficientes de rigidez de los términos cuadrático y cúbico respecto del lineal.
 $\omega_n = (k/m)^{1/2}$ es la frecuencia natural del sistema lineal no amortiguado asociado a la ec. (2).
 $\xi = x/L$ es el desplazamiento adimensionalizado medido a partir de la imperfección del sistema.
 $\bar{\xi} = \bar{x}/L$ es la imperfección adimensional del modelo, y
 $\lambda_{1c} = kL/2$ es la carga estática de bifurcación para el sistema cargado sólo axialmente, $\lambda_2 = 0$.

Los coeficientes cuadráticos y cúbicos, a y b en la ec. (2) pueden ser positivos o negativos; por la simetría del modelo consideraremos a la imperfección, $\bar{\xi}$, positiva. La carga λ_1 será estática y λ_2 , que actúa luego de que el sistema alcanza el reposo bajo la acción de λ_1 , puede ser positiva o negativa: estas hipótesis nos permiten analizar toda la gama de comportamientos básicos de sistemas de un grado de libertad y es el motivo por el cual se escogió este modelo. La comparación de las ecuaciones (1) y (2) muestra que en la obtención de esta última se han despreciado las contribuciones no lineales de la cinemática del sistema, es decir, que la no-linealidad proviene solamente de la ecuación constitutiva no lineal (1); esto, sin embargo, no constituye ningún impedimento para tratar los problemas en los que, a la inversa del presente caso, la no-linealidad proviene de cinemáticas no lineales y ecuaciones constitutivas lineales, hipótesis propias de sistemas estructurales con grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones. En la Tabla No 1 se muestran los modelos que representan los comportamientos estáticos básicos tomados de [18]: bifurcaciones simétricas estable e inestable, bifurcación asimétrica, y punto límite. Se muestra la ecuación dinámica correspondiente y los valores de a y b necesarios para que la ec. (2) represente dicho comportamiento. Los ejemplos de la tabla muestran que en los sistemas que presentan bifurcaciones simétricas están caracterizados por la falta del coeficiente de rigidez cuadrático, $a = 0$. A su vez, si el coeficiente de rigidez cúbico es $b > 0$ la bifurcación simétrica es estable e inestable si $b < 0$. La presencia del término cuadrático está asociada, en sistemas perfectos, con bifurcaciones asimétricas.

SOLUCION ANALITICA DE LA ECUACION DINAMICA

Para referir el movimiento a la posición de equilibrio estático ξ^0 , alcanzado bajo la acción de la carga λ_1 , es necesario introducir el siguiente cambio de variables en la ec. (2):

$$\xi = \xi^0 + z$$

y la ecuación dinámica de equilibrio en términos de z queda:

$$\frac{\ddot{z}}{\omega^2} + k_1 z + k_2 z^2 + b z^3 = -\frac{\lambda_2}{kL} \quad (3)$$

con

Tabla No 1
Modelos Básicos - Relación con el modelo estudiado

	<p>Bifurcación Simétrica Estable</p>
	$\frac{\bar{\xi}}{\omega^2} + \left[1 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_c} \right] \xi + \left[\frac{2}{3} - \frac{\lambda_1^0}{2\lambda_c} \right] \xi^2 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_c} \bar{\xi} - \frac{\lambda_2^0}{\lambda_c} = 0$
	$\omega^2 = C/(L^2 m) \quad a = 0$
	$\lambda_c = CL^0 \quad b = 1/8$
	<p>Bifurcación Simétrica Inestable</p>
	$\frac{\bar{\xi}}{\omega^2} + \left[1 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_c} \right] \xi - \frac{1}{2} \frac{\lambda_1^0}{\lambda_c} \xi^2 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_c} \bar{\xi} - \frac{\lambda_2^0}{\lambda_c} = 0$
	$\omega^2 = k^0/m \quad a = 0$
	$\lambda_c = k^0 L^0 \quad b = -1/2$
	<p>Bifurcación Asimétrica</p>
	$\frac{\bar{\xi}}{\omega^2} + \left[1 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_c} \right] \xi - \frac{3}{4} \xi^2 + \left[\frac{5}{8} - \frac{\lambda_1^0}{2\lambda_c} \right] \xi^2 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_c} \bar{\xi} - \frac{\lambda_2^0}{\lambda_c} = 0$
	$\omega^2 = k^0/2m \quad a = -3/4$
	$\lambda_c = k^0 L^0/2 \quad b = 1/8$
	<p>Punto Limite</p>
	$\frac{\bar{\xi}}{\omega^2} + \xi - \frac{3}{2\Lambda} \xi^2 + \frac{1}{2\Lambda^2} \xi^3 - \frac{\lambda_1^0}{k^0 L^0 \Lambda^2} - \frac{\lambda_2^0}{k^0 L^0 \Lambda^2} = 0$
	$\Lambda = \text{sen } \beta \quad \text{si } kL = k^0 L^0 \quad a = -3/2\Lambda + 2\Lambda^2$
	$\omega^2 = k^0 \Lambda^2/m \quad \bar{\xi} = (2\Lambda^2)^{-1} \quad b = (2\Lambda^2)^{-1} - 4\Lambda^4$

$$k_1 = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{1c}} + 2 a \xi^0 + 3 b (\xi^0)^2$$

$$k_2 = a + 3 b \xi^0 \quad (4)$$

Cuando la carga transversal es escalón la ecuación (3) puede disminuirse de orden separando variables e integrando. Siguiendo a [12], si las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad son nulas se obtiene:

$$\frac{\dot{z}^2}{\omega^2} + k_1 z^2 + \frac{2}{3} k_2 z^3 + \frac{1}{2} b z^4 = \frac{2 \lambda_2}{k L} z \quad (5)$$

En un diagrama de fase ($z - \dot{z}$) la ec. (5) representa curvas cerradas simétricas respecto al eje z si los valores de la carga λ_2 son menores a la carga dinámica crítica, Fig. 2.a. Las amplitudes de estos movimientos periódicos son alcanzados cuando en la ec. (5) la velocidad se anula, dando:

$$k_1 z_m + \frac{2}{3} k_2 z_m^2 + \frac{1}{2} b z_m^3 = \frac{2 \lambda_2}{k L} \quad (6)$$

En la Fig. 2.b se ha representado la ec. (6). Entonces, la carga dinámica crítica λ_{20} es aquella para la cual la ec. (6) presenta un máximo. La amplitud crítica obtenida de (6) es

$$z_m = - \frac{4 k_2}{9 b} \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{8 k_2}{9 b} \right)^2 - \frac{8 k_1}{3 b} \right]^{1/2} \quad (7)$$

Reemplazando (7) en (6) se obtiene

$$\frac{k_2}{9} \left(\frac{8 k_2}{9 b} \right)^2 \mp \frac{b}{8} \left[\left(\frac{8 k_2}{9 b} \right)^2 - \frac{8 k_1}{3 b} \right]^{3/2} = 2 \left[\frac{\lambda_2}{k L} + \frac{2}{9} \frac{k_1 k_2}{b} \right] \quad (8)$$

Para determinado valor de la carga axial λ_1 , la (8) permite obtener el valor de la carga transversal escalón λ_2 crítica para valores determinados de los coeficientes de rigidez a, b , y de la imperfección del sistema ξ . Curvas típicas de interacción de cargas, para sistemas cuadráticos ($b = 0$) o cúbicos ($a = 0$), se muestran en [17]. Notar que la expresión (8) fue obtenida suponiendo que las dos no linealidades están presentes por lo que la ec. (3) puede representar sistemas con comportamiento estable y entonces la ec. (6) no presentará un máximo y las ec. (7) y (8) se harán imaginarias. Si el coeficiente de rigidez b es negativo (V a), el sistema siempre exhibirá un comportamiento inestable (punto límite) al aumentar λ_2 pero en el caso en que $a < 0$ y $b > 0$ esta aseveración no es cierta. Las condiciones bajo las cuales la existencia de un máximo en (6) esta garantizada no serán discutidas en el presente trabajo.

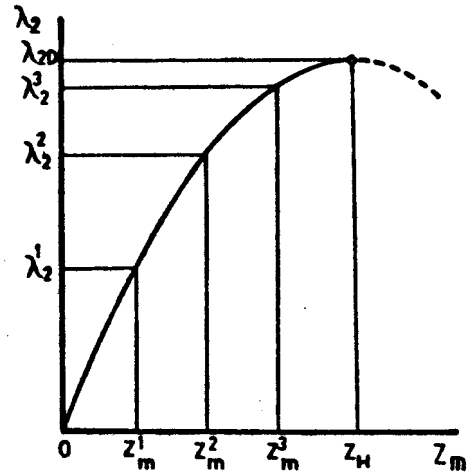
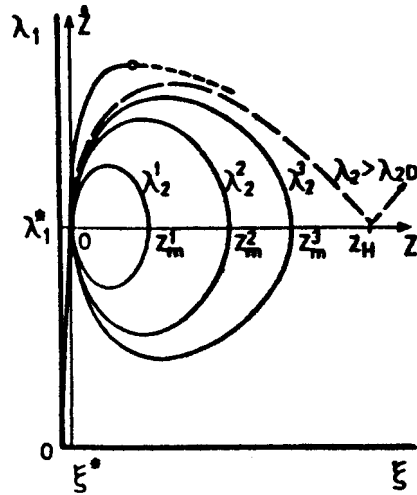


Fig. 2.a - Diagrama de fase

Fig. 2.b - Carga dinámica crítica

En la Fig. 2.a se han representado dos diagramas. Uno corresponde al comportamiento estático de un sistema que pierde rigidez al aumentar la carga axial λ_1 . Para determinado valor de la carga λ_1 , el sistema se encuentra en una posición de equilibrio ξ ; si se aplica una carga escalon, λ_2 , menor que el valor crítico, el sistema presenta un movimiento oscilatorio periódico representado por la ec. (5). Cuando la carga es mayor que el valor crítico, λ_{2D} , la solución diverge: en un sentido más estricto se comporta en forma monotonica creciente sólo si $a < 0$, $b = 0$ o si $b < 0$, (V a) y en los casos en que $a < 0$ y $b > 0$ la solución es periódica pero el punto representativo del equilibrio estático de esta nueva oscilación periódica se aleja considerablemente respecto de aquellos correspondientes a las cargas $\lambda_2 < \lambda_{2D}$. En la Fig. 2.b se han representado las amplitudes de las oscilaciones, ec. (6), y el valor de la carga dinámica crítica λ_{2D} . En los puntos en que el sistema alcanza el máximo desplazamiento, la velocidad es nula, y la aceleración es negativa si $\lambda_2 < \lambda_{2D}$ mientras que si $\lambda_2 = \lambda_{2D}$ se cumple $\dot{z} = \ddot{z} = 0$. La trayectoria, en un diagrama de fase, que pasa por el punto crítico se llama separatriz y el tiempo que tarda el sistema en alcanzarlo es infinito: esto significa que la frecuencia de la oscilación tiende a cero cuando $\lambda_2 \rightarrow \lambda_{2D}$.

SOLUCION INCREMENTAL DE LA ECUACION DINAMICA (IMB)

En esta sección obtendremos la versión incremental [4] de la ec. (2). Para ello utilizaremos el Principio de Hamilton:

$$\delta \int_0^t (T - V) dt = 0 \quad (9)$$

en la que T y V representan la energía cinética y potencial del sistema:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (10)$$

$$V = \int_0^x F(x) dx - \frac{\lambda_1 x}{L} (x + 2 \bar{x}) - \lambda_2 x \quad (11)$$

En la ec. (11) la integral representa el potencial de fuerzas elásticas con F(x) dado en la ec. (1) y los restantes términos son el potencial de las cargas. Si la solución es periódica y se cambia la escala de tiempo haciendo $\tau = \omega t$, siendo ω la frecuencia fundamental de la oscilación del sistema, y reemplazando las ec. (10) y (11) en (9) se obtiene:

$$\delta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right]^2 d\tau - \delta \int_0^{2\pi} \left[\frac{\xi^2}{2} + a \frac{\xi^3}{3} + b \frac{\xi^4}{4} - \frac{\lambda_1}{\lambda_{1c}} \xi \left(\frac{\xi}{2} + \bar{\xi} \right) - \frac{\lambda_2}{kL} \xi \right] d\tau = 0 \quad (12)$$

en la que el significado de las variables fue dado con la ec.(2). La ecuación de equilibrio cuando la solución es periódica, $\xi(\tau) = \xi(\tau + 2\pi)$, queda:

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \xi + a \xi^2 + b \xi^3 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{1c}} (\xi + \bar{\xi}) - \frac{\lambda_2}{kL} \right\} \delta \xi d\tau = 0 \quad (13)$$

Se propone una solución periódica de la forma:

$$\xi = \sum_{i=0}^n A_i \cos(i\tau) + \xi^0 \quad (14.a)$$

$$\dot{\xi} = - \sum_{i=1}^n i A_i \operatorname{sen}(i\tau) \quad (14.b)$$

$$\ddot{\xi} = - \sum_{i=1}^n i^2 A_i \cos(i\tau) \quad (14.c)$$

En la (14.a) ξ^0 es la posición estática de equilibrio alcanzada cuando sobre el sistema actúa la carga axial λ_1 o sea que ξ satisface la ec.(2) con $\ddot{\xi} = \lambda_2 = 0$:

$$\xi^0 + a \xi^{0^2} + b \xi^{0^3} - \frac{\lambda_1}{\lambda_{1c}} (\xi^0 + \bar{\xi}) = 0 \quad (15)$$

y la variación del desplazamiento es:

$$\delta \xi = \sum_{i=0}^n \delta A_i \cos(i\tau) \quad (16)$$

Introduciendo las (14.a y c) y (16) en (13) se obtienen las ecuaciones de equilibrio:

$$\boxed{i = 0}$$

$$2A_0 + a \left[\gamma_j A_j^2 + 4 A_0 \xi^0 \right] + b \left[\alpha_{jk}^1 A_j A_k A_1 + 3 \gamma_j A_j^2 \xi^0 + 6 A_0 \xi^{02} \right] - 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_{1c}} A_0 - 2 \frac{\lambda_2}{kL} = 0 \quad (17)$$

en la que se hizo uso de la ec. (15) y

$$\alpha_{jk}^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(l\tau) \cos(j\tau) \cos(k\tau) d\tau$$

$$\gamma_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq 0 \\ 2 & \text{si } j = 0 \end{cases} \quad (18)$$

y para $i \neq 0$:

$$\boxed{i \neq 0}$$

$$A_1 - \left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 i^2 A_1 + a \left[\alpha_{jk}^1 A_j A_k + 2 A_1 \xi^0 \right] + b \left[\beta_{jkl}^1 A_j A_k A_l + 3 \alpha_{jk}^1 A_j A_k \xi^0 + 3 A_1 \xi^{02} \right] - \frac{\lambda_1}{\lambda_{1c}} A_1 = 0 \quad (19)$$

con

$$\beta_{jkl}^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(l\tau) \cos(j\tau) \cos(k\tau) \cos(l\tau) d\tau \quad (20)$$

Las ecuaciones incrementales de equilibrio se obtienen de las ec. (17) y (19) por derivación:

$$\boxed{i = 0}$$

$$2 \Delta A_0 + a \left[2 \gamma_j A_j \Delta A_j + 4 \xi^0 \Delta A_0 \right] + b \left[3 \alpha_{jk}^1 A_j A_k \Delta A_1 + 6 \gamma_j A_j \xi^0 \Delta A_j + 6 \xi^{02} \Delta A_0 \right] - 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_{1c}} \Delta A_0 - \frac{2}{kL} \Delta \lambda_2 = 0 \quad (21)$$

$$\boxed{i \neq 0}$$

$$- \left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 i^2 \Delta A_1 - 2 \frac{i^2 A_1 \omega_1}{\omega_n^2} \Delta \omega + \Delta A_1 + a \left[2 \alpha_{jk}^1 A_j \Delta A_k + 2 \xi^0 \Delta A_1 \right] + b \left[3 \beta_{jkl}^1 A_j A_k \Delta A_l + 6 \alpha_{jk}^1 A_j \xi^0 \Delta A_k + 3 \xi^{02} \Delta A_1 \right] - \frac{\lambda_1}{\lambda_{1c}} \Delta A_1 = 0 \quad (22)$$

$$j, k, l = 0, 1, 2, \dots, n$$

Además de las ecuaciones de equilibrio e incrementales es necesario

establecer una condición adicional a fin de que las distintas soluciones pasen por el punto de equilibrio estático, $\xi = \xi_0$, para $t = 0$, esto es:

$$\sum_{i=0}^n \Delta A_i = 0 \quad (23)$$

Notar que la ec. (23) representa a la condición inicial de desplazamiento ya que la de velocidad se satisface por la forma de las funciones de aproximación elegidas.

La solución de las ecuaciones de equilibrio (17)(19) más la condición inicial (23) puede encararse en base al método de Newton-Raphson. En tal caso expresando las ecuaciones incrementales (21)(22) en forma matricial resulta

$$\left[K_T - \left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 M \right] \Delta A = R + \Delta \omega R_w \quad (24)$$

donde

K_T es la matriz que agrupa los coeficientes que relacionan los incrementos de las variables de desplazamiento ΔA_i , que es simétrica pero en general no definida positiva

M es la matriz de masa

ΔA es el vector que agrupa a los incrementos en los A_i

R son los residuos de la ecuación diferencial en el último paso de cálculo

R_w agrupa a los coeficientes asociados al incremento de frecuencia en las (21)(22)

A las (24) debemos agregar la condición (23) o su equivalente incremental

$$\sum_{i=0}^n \Delta A_i = 0 \quad (25)$$

El agregado de (25) a las (24) destruye la simetría del sistema de ecuaciones a resolver. Sin embargo esto puede evitarse operando adecuadamente. Para la solución via Newton-Raphson es factible usar cualquier técnica de continuación; aquí describiremos brevemente las dos implementadas.

(a) Incremento prescrito sobre λ_2 . En tal caso para cada paso de iteración l en un incremento $\Delta \lambda_2$ resolvemos los sistemas

$$\left[K_T - \left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 M \right] {}^{l+1} \Delta A_j^{(1)} = {}^l R \quad (26)$$

$$\left[K_T - \left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 M \right] {}^{l+1} \Delta A_j^{(2)} = R_w \quad (27)$$

y luego aplicamos la (25)

$$\sum_{j=0}^n {}^{l+1} \Delta A_j^{(1)} + {}^{l+1} \Delta \omega \sum_{j=0}^n {}^{l+1} \Delta A_j^{(2)} = 0 \quad (28)$$

de donde

$${}^{1+1}\Delta\omega = \frac{\sum_{j=0}^n {}^{1+1}\Delta A_j^{(1)}}{\sum_{j=0}^n {}^{1+1}\Delta A_j^{(2)}} \quad (29)$$

(b) Incremento prescrito sobre λ_0 .

$$\Delta\lambda_0 = \Delta \quad (30)$$

En tal caso en la primera iteración del incremento primero resolvemos

$$\left[K_T - \left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 H \right] A^T = R_2 \quad (31)$$

$$\left[K_T - \left[\frac{\omega}{\omega_n} \right]^2 H \right] {}^1\Delta A^{(2)} = R_w \quad (32)$$

donde R_2 es el vector asociado al incrementos en λ_2 en las ecuaciones incrementales (21)(22) que en este caso sólo tiene componente en $j=0$. A continuación la aplicación simultanea de la (25) y (30) conduce a las dos ecuaciones simultaneas

$${}^1\Delta\lambda_2 \sum_{j=0}^n \lambda_j^T + {}^1\Delta\omega \sum_{j=0}^n {}^1\Delta A_j^{(2)} = 0 \quad (33)$$

$${}^1\Delta\lambda_2 \lambda_0^T + {}^1\Delta\omega \Delta\lambda_0^{(2)} = \Delta \quad (34)$$

en los siguientes pasos de iteración se resuelven primero sistemas similares a los (26)(27) y luego se plantean las siguientes ecuaciones

$$\sum_{j=0}^n {}^{1+1}\Delta A_j^{(1)} + {}^{1+1}\Delta\lambda_2 \sum_{j=0}^n \lambda_j^T + {}^{1+1}\Delta\omega \sum_{j=0}^n {}^{1+1}\Delta A_j^{(2)} = 0 \quad (35)$$

$${}^{1+1}\Delta\lambda_0^{(1)} + {}^{1+1}\Delta\lambda_2 \lambda_0^T + {}^{1+1}\Delta\omega \Delta\lambda_0^{(2)} = 0 \quad (36)$$

De esta forma podemos obtener la solución de las ecuaciones de equilibrio para distintos valores de λ_2 o de λ_0 .

RESULTADOS - CONCLUSIONES

Si un sistema está sometido a cargas dinámicas escalón, la respuesta puede o no presentar un comportamiento inestable. En el primer caso el interés del analista estará centrado en la determinación de la carga crítica y en el segundo interesará la relación entre la carga y la amplitud de las oscilaciones. La cuestión esencial es de que manera, un método, que fuera propuesto para describir movimientos periódicos, puede describir el comportamiento de un sistema en las proximidades de un punto

crítico en donde la solución pasa de periódica a no periódica ($a < 0, b = 0$ o $b < 0, a > 0$); para el caso $a < 0, b > 0$ la solución más allá del punto crítico es periódica pero, como se aclarara anteriormente, el punto de reposo asociado a esta nueva oscilación dista del correspondiente a valores en que $\lambda_2 < \lambda_{20}$. En la Fig. 3 se han graficado los resultados obtenidos para un sistema en el que $b < 0$. En la Fig. 3.a se muestra el diagrama carga amplitud para la solución analítica, ec. (8), y las soluciones utilizando el método IHB para uno, dos y tres armónicos. En la Fig. 3.b se muestran los diagramas de fase correspondientes al máximo valor de la carga que se obtuviera como aproximación de la carga crítica y la solución obtenida por integración numérica directa para valores próximos a la carga crítica. En la Fig. 3.c se ha graficado el comportamiento de la frecuencia de la oscilación con la carga para las distintas aproximaciones y los valores obtenidos por integración numérica. Fueron implementados los dos esquemas de avance descritos: carga prefijada y desplazamiento prescripto. Los resultados obtenidos permiten enunciar algunas conclusiones y observaciones sobre el método utilizado:

a) El método mostró una muy buena correspondencia entre los valores de la carga obtenidos y el previsto teóricamente. La mejor aproximación a dicho valor se obtiene utilizando un esquema de avance de carga prescripta, sin embargo, el número de pasos de avance necesarios para obtener el valor crítico es mayor en este caso (para igual número de iteraciones por paso) que el necesario en desplazamiento prescripto.

b) Los esquemas de avance no presentaron problemas de convergencia, y preservaron la simetría de la matriz de rigidez. En ambos casos, la ecuación de condiciones iniciales de desplazamiento fue utilizada para la obtención del incremento de frecuencia.

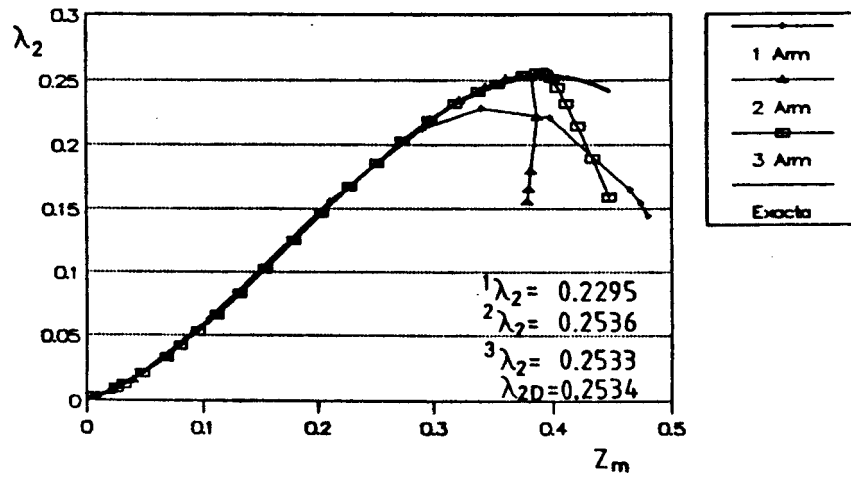
c) No es necesario tener un conocimiento previo a cerca de si el sistema presentará o no un comportamiento inestable. Si lo es, dará la carga límite y si no, la relación carga-amplitud de las oscilaciones periódicas

d) El orden del sistema de ecuaciones depende del número de armónicos que se incluyan en la solución por lo que en sistemas de múltiples grados de libertad deberá tenerse en cuenta este aspecto.

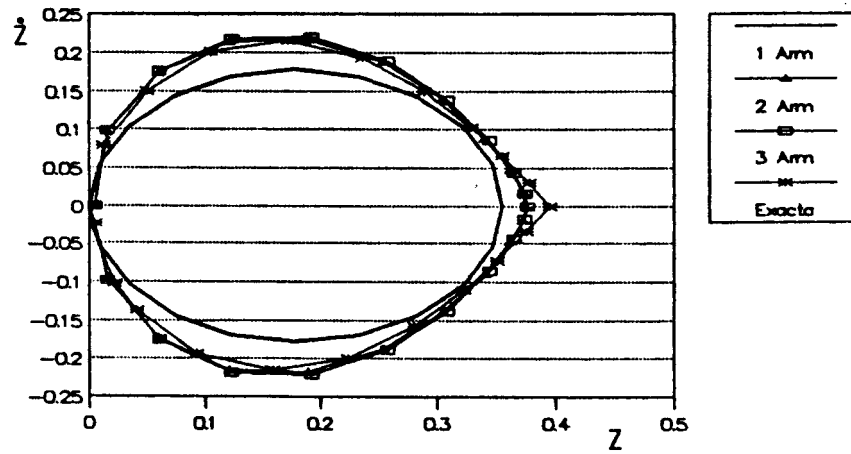
e) Por ser un método variacional puede utilizarse en conjunción con el MEF.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo forma parte de un programa de investigación financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y por el Consejo de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de la provincia de Córdoba (CONICOR).

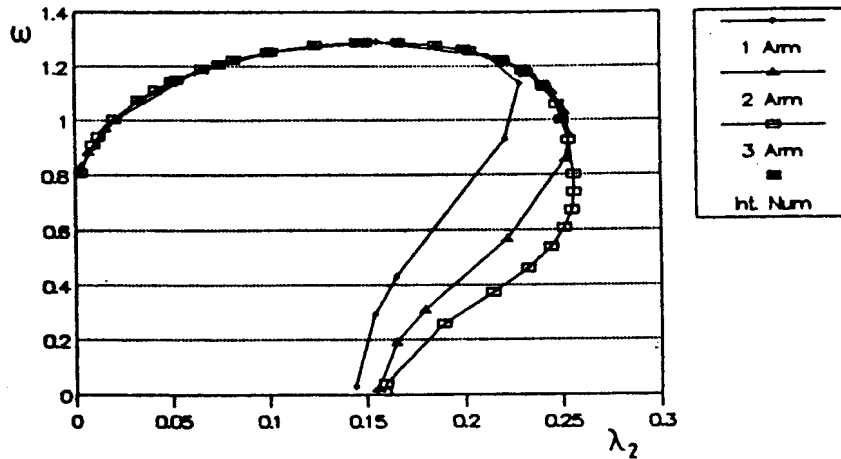


(a)



(b)

Fig.3 Resultados para un sistema con $b < 0$. (a) diagrama carga-amplitud; (b) diagrama de fase; (c) relación carga-frecuencia



(c)

Fig.3 Continuación

REFERENCIAS

- [1] PARK, K.C., "An Improved Semi-Implicit Method for Structural Dynamics Analysis", Journal of Applied Mechanics, vol. 49, 1982, 589-593.
- [2] TRUJILLO, D.M., "Stability Analysis of an Extrapolated Force Correction Method for Nonlinear Structural Dynamics", Journal of Applied Mechanics, vol. 49, 1982, 203-205.
- [3] NAYFEH, A.H., MOOK, D.T., Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [4] LAU, S.L., CHEUNG, Y.K., "Amplitude Incremental Variational Principle for Nonlinear Vibration of Elastic Systems", Journal of Applied Mechanics, vol. 48, 1981, 959-964.
- [5] FERRI, A.A., "On the Equivalence of the Incremental Harmonic Balance Method and the Harmonic Balance-Newton Raphson Method", Journal of Applied Mechanics, vol. 53, 1986, 455-457.
- [6] LAU, S.L., CHEUNG, Y.K., WU, S.Y., "A Variable Parameter Incrementation Method for Dynamic Instability of Linear and Nonlinear Elastic Systems", Journal of Applied Mechanics, vol. 49, 1982, 849-853.

- [7] TONGUE, B.H., "Limit Cycle Oscillations of Monolinear Rotorcraft Model", AIAA Journal, vol. 22, 1984, 967-974.
- [8] PIERRE, C., DOWELL, E.H., "A Study of Dynamic Instability of Plates by an Extended Incremental Harmonic Balance Method", Journal of Applied Mechanics, vol. 52, 1985, 693-697.
- [9] PIERRE, C., FERRI, A.A., DOWELL, E.H., "Multi-Harmonic Analysis of Dry Friction Damped Systems Using an Incremental Harmonic Balance Method", Journal of Applied Mechanics, vol. 52, 1985, 958-964.
- [10] LAU, S.L., CHEUNG, Y.K., WU, S.Y., "Incremental Harmonic Balance Method With Multiple Time Scales for Aperiodic Vibration of Nonlinear Systems", Journal of Applied Mechanics, vol. 50, 1983, 871-876.
- [11] LAU, S.L., CHEUNG, Y.K., "Incremental Hamilton's Principle With Multiple Time Scales for Nonlinear Aperiodic Vibrations of Shells", Journal of Applied Mechanics, vol. 53, 1986, 465-466.
- [12] BUDIANSKY, B., HUTCHINSON, J.W., "Dynamic Buckling of Imperfection Sensitive Structures", Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Gortler, H., ed., Munich, 1964, 636-651.
- [13] RAFTOYIANNIS, J., KOUNADIS, A.M., "Dynamic Buckling of Limit-Point Systems Under Step Loading", Dynamics and Stability of Systems, vol. 3, 1988, 219-234.
- [14] KLEIBER, M., KOTULA, W., SARAN, M., "Numerical Analysis of Dynamic Quasi-Bifurcation", Eng. Comput., vol. 4, 1987, 48-52.
- [15] AULI, W., RAMMERSTORFER, F.G., "On the Dynamic Instability of Shell Structures - Criteria and Algorithms", en Finite Element Methods for Plates and Shell Structures, vol. 2: Formulations and Algorithms, Ed. I.R. Hughes, T.R. Hinton, E., Pineridge Press, Swansea, 1986, 58-82.
- [16] Von KARMAN, Th., DUNN, L.G., TSIEN, H.S., "The Influence of Curvature on the Buckling Characteristics of Structures", Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 7, 1940, 276-289.
- [17] BREWER, A.T., GODOY, L.A., "On Interaction Between Static and Dynamic Loads in Quadratic or Cubic Systems", Journal of Sound and Vibration, (en prensa).a).
- [18] J.M.T. Thompson y G.W. Hunt, A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, Londres, 1973.

