

CALCULO DE FLUJOS TURBULENTOS CON EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS POR VOLUMENES DE CONTROL

Pablo M. Carrica
Axel E. Larretguy
José Converti
Laboratorio de Termohidráulica
CNEA - Centro Atómico Bariloche

Resumen

La mayoría de los flujos en la naturaleza son turbulentos. Desafortunadamente, la naturaleza irregular y altamente compleja de estos flujos hace que no existan soluciones analíticas, por lo que se hace necesario el cálculo numérico para resolver el problema. Además, en ingeniería se utilizan en general valores medios de velocidad, presión, etc., lo que da lugar a los modelos de cierre en las ecuaciones promediadas. Entre los modelos más populares se encuentra el modelo k- ϵ , que ha sido mayormente implementado en diferencias finitas. En este trabajo presentamos un programa para resolver flujos turbulentos en dos dimensiones utilizando el Método de Elementos Finitos por Volúmenes de Control para discretizar las ecuaciones k- ϵ de turbulencia y las ecuaciones de Navier-Stokes. Mostramos dos casos de prueba donde se observa buena concordancia con los resultados experimentales.

Abstract

Most flows in nature are turbulent. Unfortunately, the non-regular and highly complex nature of these flows does not allow the existence of any analytical solution, so numerical calculus is necessary to solve the problem. In addition, mean values of velocity, pressure, etc. are generally used in engineering, so the closure models of the averaged equations appear. One of the most popular models are the k- ϵ closure equations, mostly implemented in finite differences. In this work we present a program that solves two dimensional turbulent flows by means of the Control Volume Finite Element Method to discretize the k- ϵ turbulence equations and the Navier-Stokes equations. We show two tests that exhibit a good agreement with experimental results.

INTRODUCCION

La simulación numérica de flujos turbulentos tiene gran importancia en ingeniería. La mayoría de los flujos en la naturaleza son turbulentos: los movimientos de agua en ríos, lagos y océanos, los flujos en conductos, los movimientos de masas de aire en la atmósfera, etc. También casi todos los flujos de aplicación tecnológica son turbulentos: se utiliza la capacidad de mezclado de la turbulencia para mejorar la transferencia de calor, para acelerar reacciones químicas; los flujos de dos fases y los flujos de geometrías complejas que aparecen en válvulas, curvas y codos, sensores, álabes de bombas y turbinas son también turbulentos.

Desafortunadamente, la naturaleza altamente irregular y compleja que tiene la turbulencia hace que no exista solución analítica, lo que obliga al uso del cálculo numérico para resolver el problema.

La simulación numérica de flujos turbulentos ofrece mayor dificultad que la de flujos laminares. La base teórica aplicable es la misma que para flujos laminares (resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes), pero la exigencia de memoria y tiempo de cálculo es mucho mayor, al punto de superar ampliamente las capacidades de las computadoras actuales.

Por esta razón se necesita un modelado para poder obtener magnitudes medias de interés en ingeniería, como ser velocidades y presiones, energía de las fluctuaciones turbulentas, disipación de energía, etc. El detalle del flujo no suele ser importante desde el punto de vista de aplicaciones tecnológicas. Uno de los modelos más utilizados es el k-ε. Las ecuaciones para k y ε son no lineales y quedan acopladas a las de Navier-Stokes, dando junto a la ecuación de continuidad un sistema para dos dimensiones de cinco ecuaciones diferenciales acopladas.

En las siguientes secciones presentaremos el modelo k-ε de turbulencia y su discretización utilizando el Método de Elementos Finitos por Volúmenes de Control.

MODELO DE TURBULENCIA

Las ecuaciones (1) de Navier-Stokes y la de continuidad (2), que gobiernan la dinámica de los fluidos incompresibles, son válidas también en el caso de flujos turbulentos. La dimensión de los vórtices más pequeños es lo suficientemente grande como para utilizar la hipótesis del continuo, aun para números de Reynolds muy elevados.

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (2)$$

Siguiendo el procedimiento ideado por Osborne Reynolds, expresamos las velocidades y la presión como suma de sus partes media y fluctuante:

$$U_i = \bar{U}_i + U_i' \quad (3)$$

$$P_i = \bar{P}_i + P_i' \quad (4)$$

sustituyendo las ecuaciones (3) en la (2) y promediando obtenemos:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_i} = 0 \quad (5)$$

que es la ecuación de continuidad del flujo medio.

Reemplazando (3) y (4) en las ecuaciones (1), promediando y operando, teniendo en cuenta la (5) y la (2) obtenemos la expresión para la conservación de momento del flujo medio:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} - \overline{U_i' U_j'} \right) \quad (6)$$

Aquí resulta un término adicional conocido como tensor de tensiones turbulentas o tensor de Reynolds (último término del segundo miembro). Este término se debe al transporte convectivo de momento a causa de las fluctuaciones turbulentas, y es el responsable de la necesidad de modelado ya que introduce seis nuevas incógnitas al problema, dando lugar al llamado problema de cierre (closure problem).

Uno de los primeros intentos por "cerrar" el problema fue propuesto por Boussinesq a fines del siglo pasado. La idea es suponer que el transporte de momento se debe a una viscosidad turbulenta, o sea se interpreta el transporte convectivo como difusivo con el gradiente del flujo medio:

$$-\overline{U_i' U_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (7)$$

donde

$$k = 1/2 \overline{U_i' U_i'} \quad (8)$$

es la energía cinética de las fluctuaciones turbulentas, y ν_t es la viscosidad turbulenta. De esta forma la condición de incompresibilidad se cumple inmediatamente.

Esta hipótesis de gradiente es utilizada por el modelo k- ϵ . El modelado se reduce ahora a obtener la viscosidad turbulenta y k en función del estado del flujo medio en cada punto. Para hallar la viscosidad turbulenta se postula, en base a análisis dimensional:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (9)$$

donde ϵ es la disipación de energía cinética turbulenta en calor:

$$\epsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial U_i'}{\partial X_j} \right)^2} \quad (10)$$

Pueden obtenerse ecuaciones de transporte exactas para k y c , y modelar los términos desconocidos en función de valores conocidos. En la referencia [1] se presenta una deducción detallada del modelo k - c . Aquí presentaremos brevemente el sistema a resolver.

Ecuación de transporte para k :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\left(\frac{\nu}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial X_j} \right] + \nu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial X_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial X_j} - c \quad (11)$$

Ecuación de transporte para c :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U_j \frac{\partial c}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\left(\frac{\nu}{\sigma_c} + \nu \right) \frac{\partial c}{\partial X_j} \right] + C_{1\nu} \frac{c}{k} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial X_j} - C_2 \frac{c^2}{k} \quad (12)$$

El modelo k - c como fué presentado adolece de importantes limitaciones debido a que gran parte de las hipótesis hechas no son válidas en muchos casos.

Entre las hipótesis mas importantes hechas en la deducción podemos mencionar:

* Alto número de Reynolds. Esta condición queda implícita al tomar una viscosidad turbulenta escalar [2] (ver ecuación (7)) para modelar el tensor de Reynolds. Puede verse que la utilización de la aproximación de Boussinesq implica además la condición de isotropía local [3].

* Similaridad de la distribución espectral. Esta condición aparece al tomar una sola disipación que representa a todas las escalas en la cascada de Kolmogorov [4].

* Turbulencia homogénea. Al tomar c como en la ecuación (10) esta condición queda implícita [5].

DETERMINACION DE LAS CONSTANTES EMPIRICAS

Para determinar los valores de las cinco constantes del modelo presentaremos dos casos analíticos simples en los cuales estudiaremos el comportamiento de las ecuaciones.

TURBULENCIA GENERADA POR UNA GRILLA

El problema es determinar el decaimiento de la turbulencia detrás de una grilla generadora. Se trata de un flujo laminar con velocidad U en X y cero en otra dirección. La velocidad es uniforme. Al pasar por una malla infinita en Y y Z se genera turbulencia que detrás de la grilla decae hasta hacerse cero. Todas las derivadas en Y o Z son cero, y como el problema es estacionario y la producción es cero (detrás de la grilla), las ecuaciones para el decaimiento resultan:

$$U \frac{\partial k}{\partial X} = -c \quad (13)$$

$$U \frac{\partial c}{\partial X} = -C_2 \frac{c^2}{k} \quad (14)$$

y cuya solución es para k:

$$k = C_2 X^{-\frac{1}{(C_2-1)}}$$

Entonces de la medición directa podemos obtener C_2 , que tiene un valor de entre 1.8 y 2.0. El valor óptimo desde el punto de vista computacional parece ser 1.92 [6].

FLUJO CERCA DE UNA PARED

Cerca de una pared la distribución de velocidades sigue la conocida ley logarítmica [7]

$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(9 Y^+) \quad (15)$$

donde κ es la constante de Von Kármán, U_τ es la velocidad friccional definida como:

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

τ_w es la tensión de corte en la pared y

$$Y^+ = \frac{Y U_\tau}{\nu}$$

es la distancia adimensionalizada a la pared. La ley (15) es aplicable para $30 \leq Y^+ \leq 100$, donde la producción de energía cinética turbulenta iguala aproximadamente a la disipación. Además, suponiendo que la tensión de corte es aproximadamente constante en $0 \leq Y^+ \leq 100$ y para viscosidad turbulenta mayor que la viscosidad molecular podemos poner:

$$-\overline{UV} = U_\tau^2 \quad (16)$$

En este caso la producción vale:

$$P = -\overline{UV} \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{U_\tau^3}{\kappa Y} \quad (17)$$

y como es igual a c resulta:

$$c = \frac{U_\tau^3}{\kappa Y} \quad (18)$$

que en forma adimensional se pone:

$$c = \frac{\nu c}{U_\tau^4} = \frac{1}{\kappa Y^2} \quad (19)$$

Esta expresión se utiliza como condición de borde para c en Y^* . En k resulta, igualando la producción con disipación:

$$C_{\mu} \frac{k^2}{\epsilon} \left(\frac{U\tau}{\kappa Y} \right)^2 = \frac{U\tau^3}{\kappa Y} \Rightarrow C_{\mu} k^2 = U\tau \kappa Y \frac{U\tau^3}{\kappa Y} \Rightarrow C_{\mu} = \frac{U\tau^4}{k^2} \quad (20)$$

experimentalmente se observa que [8]:

$$\frac{1}{k^*} = \frac{U\tau^2}{k} = 0.3 \quad (21)$$

lo que implica una condición de borde para k^* y un valor para $C_{\mu}=0.09$.

La ecuación (12) para c retiene sólo los términos de producción, disipación y difusión de c [9] lo que nos lleva a poner:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\nu}{\sigma_k} \frac{\partial c}{\partial Y} \right) + C_1 P \frac{c}{k} - C_2 \frac{c^2}{k} = 0 \quad (22)$$

y utilizando la (17) y la (18) junto con los valores anteriormente obtenidos de C_2 y C_{μ} y teniendo en cuenta la (21) y la (22) y operando :

$$C_1 = C_2 - \frac{\kappa^2}{\sigma_c \sqrt{C_{\mu}}} \quad (23)$$

que nos da el valor de C_1 una vez elegido σ_c .

Las otras constantes σ_k y σ_c se asumen cercanas a 1 y se ajustan por optimización computacional [10]. El set de constantes resulta finalmente:

$C_1 = 1.44$	$C_2 = 1.92$	$\sigma_k = 1.0$	$\sigma_c = 1.3$	$C_{\mu} = 0.09$
--------------	--------------	------------------	------------------	------------------

ECUACIONES DE MOMENTO

El modelo k - c nos permite obtener ν_t y k en la relación (7). Reemplazando en las ecuaciones (6) y operando obtenemos:

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial X_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\left(\nu + \nu_t \right) \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial X_j} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial X_1} \quad (25)$$

que son las ecuaciones de momento finales a resolver.

DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES

BALANCES EN UN VOLUMEN DE CONTROL.

Sea el volumen de control Ω de la figura 1, definido para redes triangulares por la unión de los centroides de los elementos

convergentes al nodo i, y cuya superficie de control denominaremos Γ_i .

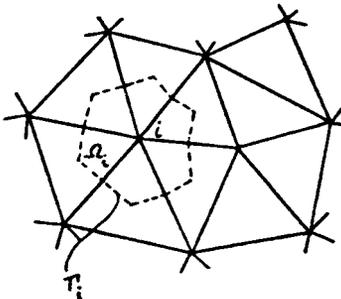


Figura 1

La ecuación (11) de transporte de k se transforma, mediante el teorema de Gauss-Green en:

$$\int_{\Gamma_i} \left[U_k k - \left(\frac{\nu t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial c}{\partial X_t} \right] n_t d\Gamma = \int_{\Omega_i} \left[\nu t \left(\frac{\partial U_b}{\partial X_t} + \frac{\partial U_k}{\partial X_b} \right) \frac{\partial U_b}{\partial X_t} - c \right] d\Omega \quad (26)$$

y expresa la conservación de k en el volumen de control.

La ecuación (12) de transporte de c se transforma en:

$$\int_{\Gamma_i} \left[U_c c - \left(\frac{\nu t}{\sigma_c} + \nu \right) \frac{\partial c}{\partial X_t} \right] n_t d\Gamma = \int_{\Omega_i} \left[C_1 \frac{c}{k} \nu t \left(\frac{\partial U_b}{\partial X_t} + \frac{\partial U_k}{\partial X_b} \right) \frac{\partial U_b}{\partial X_t} - C_2 \frac{c^2}{k} \right] d\Omega \quad (27)$$

donde por simplicidad en la notación se han omitido las barras de promedio en las velocidades.

Podemos escribir la ecuación (26) de forma de separar las contribuciones interiores y exteriores al recinto de integración:

$$\int_{\Gamma_i \cap \Omega} \left[U_k k - \left(\frac{\nu t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial X_t} \right] n_t d\Gamma + \int_{\Gamma_i \cap \Gamma} U_k k n_t d\Gamma = \int_{\Omega_i} \left[\nu t \left(\frac{\partial U_b}{\partial X_t} + \frac{\partial U_k}{\partial X_b} \right) \frac{\partial U_b}{\partial X_t} - c \right] d\Omega \quad (28)$$

I II

III

Donde fácilmente reconocemos en el término I al flujo total de k a través de la superficie interior del volumen de control. El término II representa el flujo convectivo exterior de k , y el término III es la fuente total de k . Notemos que la (28) no incluye la posibilidad de

flujo difusivo de k por la superficie exterior. Esto implicaría dar condiciones de Neumann no homogéneas en k , lo cual no es posible por falta de conocimiento del comportamiento de k (en el caso de las velocidades las condiciones de Neumann indican fuerzas que tienen interpretación física clara). En todos los casos se utilizan condiciones de Dirichlet y de Neumann homogéneas. Exactamente lo mismo podemos decir para c .

La ecuación (27) puede ponerse:

$$\int_{\Gamma_1 \cap \Omega} \left[U_t c - \left(\frac{\nu t}{\sigma_c} + \nu \right) \frac{\partial c}{\partial X_t} \right] n_t d\Gamma + \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma} U_t c n_t d\Gamma$$

I II

$$\int_{\Omega_i} \left[C_1 \frac{c}{k} \nu t \left(\frac{\partial U_s}{\partial X_t} + \frac{\partial U_t}{\partial X_s} \right) \frac{\partial U_s}{\partial X_t} - C_2 \frac{c^2}{k} \right] d\Omega \quad (28)$$

III

donde los términos I, II y III representan respectivamente el flujo total interior de c , el flujo convectivo exterior de c y la fuente total.

Reescribamos la ecuación (28) para el espacio discreto:

$$\sum_{e=1}^{NEL} \left\{ \int_{S_i^e} \left[U_t k - \left(\frac{\nu t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial X_t} \right] n_t d\Gamma + \int_{\Gamma_1^e} U_t k n_t d\Gamma \right\} =$$

I II

$$\sum_{e=1}^{NEL} \left\{ \int_{\Omega_i^e} \nu t \left[\frac{\partial U_s}{\partial X_t} + \frac{\partial U_t}{\partial X_s} \right] \frac{\partial U_s}{\partial X_t} - c \right\} \quad (30)$$

III

Interpretamos los distintos términos en (30) como:

- I) Flujo total interior elemental.
- II) Flujo convectivo exterior.
- III) Fuente elemental total.

Son necesarias funciones de forma elementales para calcular los flujos a través de las superficies de control en (30). Para la velocidad de transporte U_t escogemos una interpolación lineal en el elemento, y para k elegimos una función del tipo exponencial, de acuerdo al algoritmo utilizado por Larreteguy [11].

El Pe_k efectivo del problema se toma para k :

$$Pe_k = \rho U_s \frac{X_{max} - X_{min}}{\left(\frac{\nu t}{\sigma_k} + \nu \right)}$$

y para c:

$$Pe_c = \rho U_m \frac{X_{max} - X_{min}}{\left[\frac{\nu_t}{\sigma_c} + \nu \right]}$$

Notemos que el Pe elemental numérico está limitado por la aparición de la viscosidad turbulenta, que típicamente puede ser del orden de 50 veces mayor que la viscosidad molecular. Lo mismo ocurrirá al resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, resultando el Re numérico del problema mucho menor que el Re real del mismo. Aun con estas consideraciones, el Re efectivo puede ser grande para problemas con Re elevado.

La discretización de la ecuación (28) de transporte de c se efectúa de igual forma que la de k . Las fuentes se toman constantes por elemento y se trata de retrasar el menor número de términos posible. De esta forma se llega a un sistema matricial de término independiente homogéneo, como el mostrado en la figura 2.

$$A \vec{X} = \vec{B} \quad (31)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_k^k & A_k^c \\ A_c^k & A_c^c \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Dirichlet} \\ 0 \\ \text{Dirichlet} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} K \\ E \end{pmatrix}$$

Figura 2 : Sistema matricial de las ecuaciones k-c

Siendo las condiciones de Dirichlet lo que asegura la unicidad de la solución.

La discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes se explica claramente en las referencias [1] y [12]. El uso del Método de elementos finitos por volúmenes de control para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes tiene diversas ventajas, ya que permite interpolación de igual orden de presiones y de velocidad, pudiendo atacarse problemas de Re grandes con redes no muy densas. La discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes lleva a una matriz de velocidades-presión dependiente de la solución del sistema (31).

RESOLUCION DE LOS SISTEMAS ACOPLADOS

Los sistemas matriciales resultantes de las discretizaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y de las ecuaciones k-c son no lineales y están acoplados entre sí. La estrategia de resolución se muestra en la figura 3. Los sistemas de Navier-Stokes y de k-c

realizan algunas iteraciones no-lineales antes de pasar a las iteraciones globales. Para resolver estos sistemas lineales utilizamos el método iterativo CGS [13], muy eficiente cuando las matrices son no simétricas como en nuestro caso.

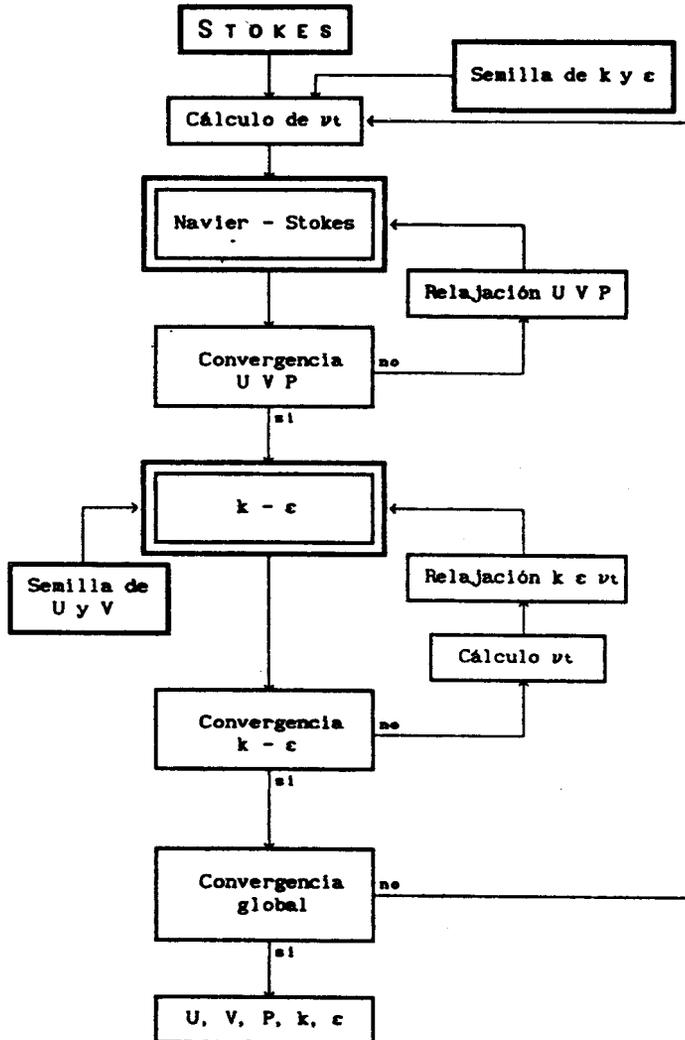


Figura 3 : Esquema de cálculo global

CASOS DE PRUEBA

Corrimos dos casos para los cuales hay disponibles datos experimentales.

El primero es un canal cerrado completamente desarrollado para un $Re = 20000$ que fué medido por Laufer [14] y Nikuradse [15]. Utilizamos una red de 2×62 nodos para representar el problema unidimensional. Las condiciones de borde son de simetría en el eje central, de tracción nula en la entrada y la salida y de pared sobre la pared rígida. La velocidad friccional la calculamos con la relación:

$$U\tau|U\tau| = \nu_t \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_y \quad (32)$$

y el único dato necesario es el gradiente de presión. En la figura 4 vemos los resultados de velocidad media, energía cinética turbulenta y disipación de k comparados con los experimentales.

El segundo caso corrido es un canal con una de sus caras abierta, sin tensiones inducidas en la superficie. Se proponen para la superficie del canal las siguientes condiciones de borde para k y c [16]:

$$k_s = \frac{U\tau_s^2}{\sqrt{C\mu}}$$
$$c_s = \frac{\left[k_s \sqrt{C\mu} \right]^{3/2}}{\kappa y}$$

En la figura 5 vemos los resultados obtenidos y la comparación con los experimentales reportados en la referencia [16].

CONCLUSIONES

Se presenta un programa que resuelve las ecuaciones k - c acopladas a las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones con el Método de Elementos Finitos por Volúmenes de Control. Se observa buena concordancia entre los valores obtenidos con el modelo y los resultados experimentales.

La programación del modelo k - c con el Método de Elementos Finitos con redes no estructuradas adolece del problema de que el error en el cálculo de la tensión de corte en la pared sólo se puede hacer a primer orden. Esto puede traer problemas de convergencia, por lo que es recomendable aproximarse a la solución utilizando una homotopía temporal o basada en el Re .

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. Carrica, *Simulación k-ε de turbulencia con el Método de Elementos Finitos por Volúmenes de Control*, Informe interno Termohidráulica, Centro Atómico Bariloche (1990).
- [2] J. O. Hinze, *Turbulence*, Mc Graw-Hill, NYC, p 24 (1975).
- [3] J. Lumley y B. Kajeh-Nouri, *Phys. of Fluids*, (1981).
- [4] N. C. Markatos, *The mathematical modelling of turbulent flows*, Appl. Math. Modelling, vol 10 June (1986).
- [5] S. Corrsin, *J. Aeronaut. Sci.*, vol 20, p 853 (1953).
- [6] W. Rodi, *Turbulence models and their application in Hydraulics*, IAHR report, Delft (1980).
- [7] H. Schlichting, *Boundary layer theory*, Mc Graw-Hill, NYC (1968).
- [8] V. Patel, W. Rodi y G. Schereuer, *Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows*, AIAA Journal, vol 23, p 1308 (1984).
- [9] N. Mansour, J. Kim y P. Moin, *Near-wall k-ε modelling*, AIAA Journal, vol 27, p 1068 (1988).
- [10] W. Rodi, *The prediction of free turbulent boundary layers by the use of a two equation model of turbulence*, Ph. D. Thesis, University of London (1972).
- [11] A. Larretegui y J. Converti, *Improvements to the Finite Volume Method for Convection-Diffusion problems. A new shape function*. Enviado a Int. J. for Num. Meth. Eng. (1990).
- [12] A. Larretegui, P. Carrica y J. Converti, *Desarrollos en el método de elementos finitos por volúmenes de control aplicado a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes*, presentado a ENIEF'90, Mar del Plata (1990).
- [13] A. Larretegui y P. Carrica, *Desarrollo de un conjunto de rutinas para la resolución de sistemas con matrices raras no simétricas. Comparación de varios métodos iterativos basados en gradientes conjugados*, Presentado a ENIEF'90, Mar del Plata (1990).
- [14] J. Laufer, *Natl. Adv. Comm. Aeronaut. Tech. Notes* # 2123 (1950).
- [15] J. Nikuradse, *UDI-Forschungsheft* # 361 (1933).
- [16] W. Rodi, *Turbulence models and their application in hydraulics*, IAHR report, Delft (1980).

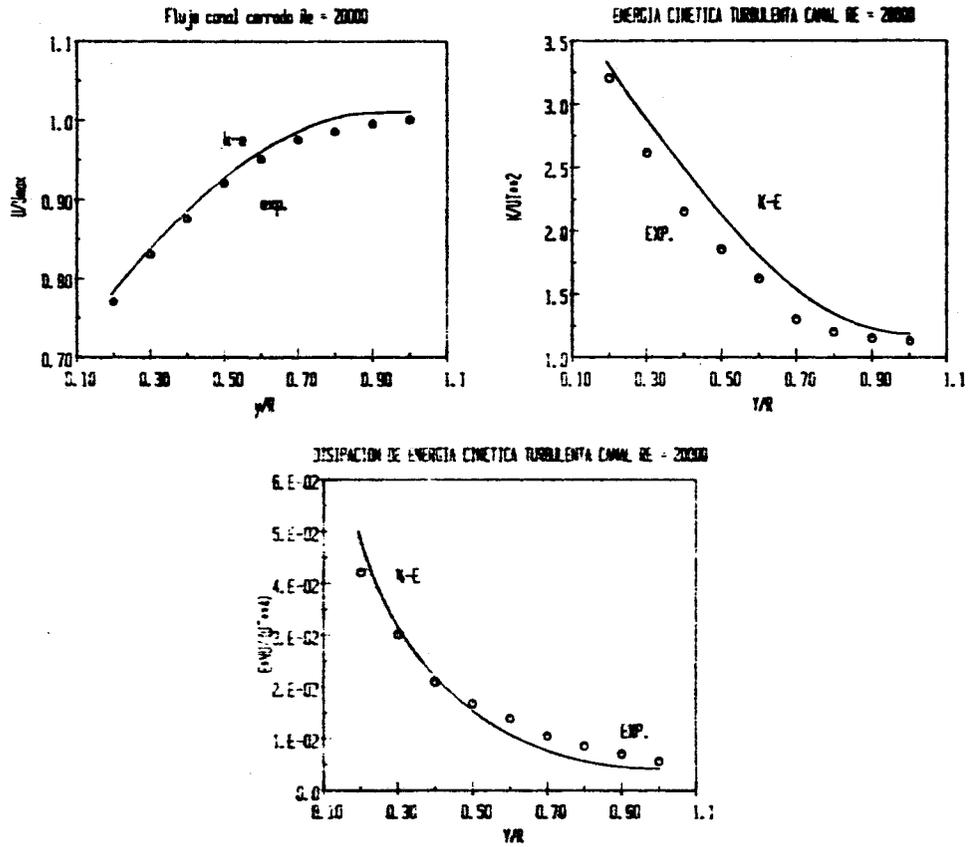


Figura 4 : Resultados obtenidos para un canal cerrado con $Re = 20000$

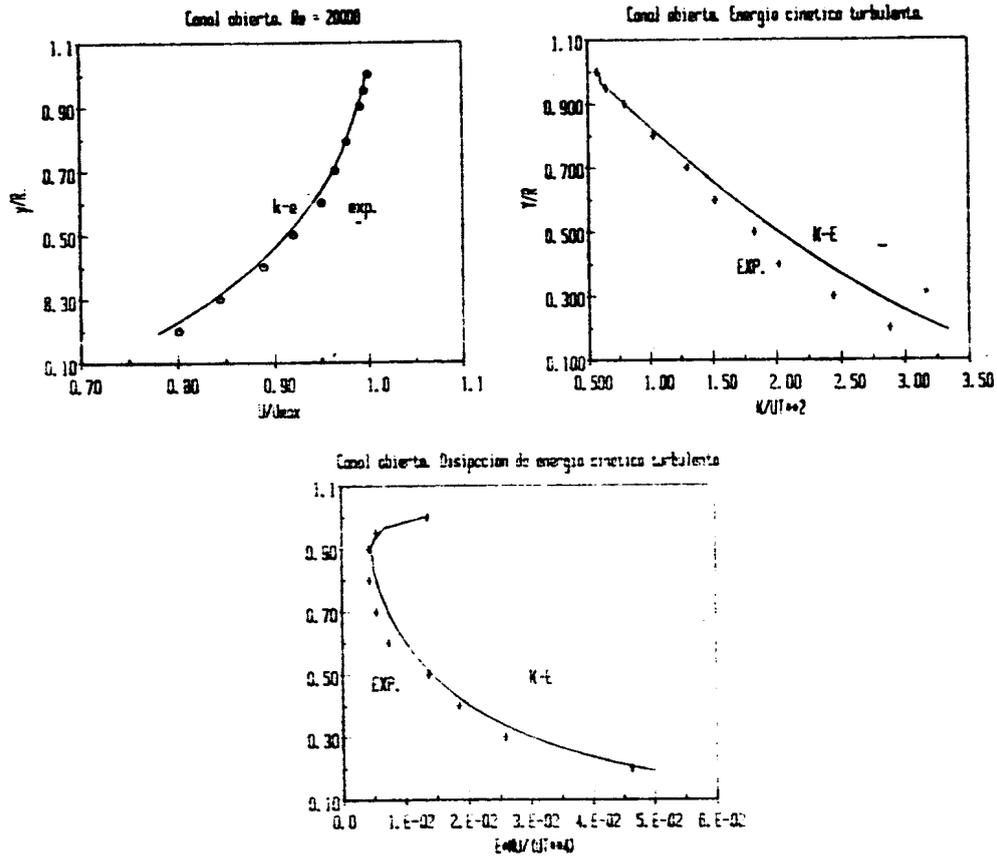


Figura 5 : Resultados obtenidos para un canal abierto sin fuerzas inducidas en superficie.