

ALGORITMO DE CONTACTO FRICCIONAL Y SU APLICACION EN  
PROBLEMAS DE CONFORMACION MECANICA

Ignacio Iturrioz  
Armando M. Awruch  
Guillermo J. Creus

Curso de Post-Graduação em Engenharia Civil  
(C.P.G.E.C.). Universidad Federal de Rio  
Grande Do Sul (U.F.R.G.S.) Porto Alegre, RS.  
Brasil

RESUMEN

Los efectos de contacto y fricción se presentan en un vasto número de problemas en ingeniería. Se destacan, por su importancia, los procesos de conformación mecánica.

En este trabajo se describe la formulación de un algoritmo que permite considerar los efectos de contacto unilateral y fricción de una superficie rígida que prescribe desplazamientos sobre un cuerpo flexible, donde dichas restricciones son impuestas empleando el método de las funciones de penalidad.

Se exponen por último dos ejemplos numéricos y se mencionan algunas de las dificultades encontradas en la implementación computacional.

ABSTRACT

Effects of contact and friction are present in many engineering problems such as for example in metal forming processes.

An algorithm that accounts for the unilateral contact with friction effect of a rigid surface with prescribed displacement on a flexible body using the penalty function approach is described in this work.

Two numerical examples are included and some difficulties in the computational implementation are indicated.

## INTRODUCCIÓN

Uno de los mecanismos básicos que se presenta en la mecánica del sólido es el contacto entre cuerpos. A través de ese evento físico se transmiten y aplican cargas sobre una estructura.

Hasta hace poco tiempo este importante aspecto del comportamiento estructural no era considerado, debido, fundamentalmente, a las no linealidades involucradas:

- el área de contacto no se conoce antes de la aplicación de las cargas
- entre las superficies en contacto se presentan fenómenos físicos complejos, los cuales requieren consideraciones mecánicas y matemáticas especiales.

En los últimos años se han realizado avances significativos en el estudio de ciertos problemas de contacto, empleando la teoría de las inecuaciones variacionales, el método de los elementos finitos y diferentes técnicas de optimización. Sobre los mismos pueden mencionarse los trabajos realizados por Campos & Oden [1], Kikuchi & Oden [2], Barbosa [3] y Fancello [4], como así también la recopilación realizada por Bohm [5].

Estos trabajos sirvieron como base para encarar el contacto acoplado con problemas más complejos: consideración de grandes deformaciones, inclusión de leyes constitutivas plásticas para los materiales, inclusión de aspectos dinámicos y térmicos, etc. Pudieron, entonces, ser abordados gran cantidad de problemas de ingeniería, como por ejemplo, simulación numérica de procesos de conformación mecánica y problemas de impacto.

En este trabajo se presenta un algoritmo de contacto basado en una formulación incremental lagrangiana actualizada, donde se considera que un cuerpo rígido impone deformaciones sobre otro cuerpo flexible, cuya ley de comportamiento puede considerarse no linealidades físicas y geométricas. Se mencionan además, los avances realizados en su implementación computacional, mostrándose algunos ejemplos numéricos que permiten testear el trabajo realizado. Finalmente se presentan algunas de las conclusiones obtenidas hasta el presente.

## PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Sea un cuerpo flexible definido en un espacio euclideo de tres dimensiones referido a un sistema fijo de coordenadas cartesianas  $x$ , con origen  $O$  y una base  $e_i$ , ver figura (1)

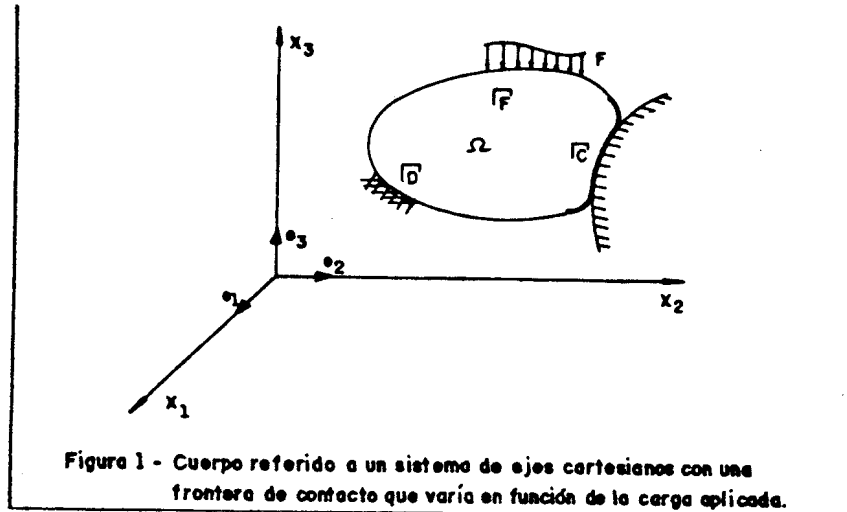


Figura 1 - Cuerpo referido a un sistema de ejes cartesianos con una frontera de contacto que varía en función de la carga aplicada.

Dicho cuerpo ocupa un volumen  $\Omega$  con una superficie compuesta por una porción donde pueden aplicarse condiciones mecánicas de contorno  $\Gamma_F$ , otra donde se verifican las condiciones cinemáticas de contorno  $\Gamma_D$  y, por último, un sector de la superficie donde se puede producir contacto con otro cuerpo  $\Gamma_C$ . Ninguna de estas superficies parciales se superponen entre sí.

Sobre el cuerpo se suponen actuando fuerzas de volumen  $\rho b (= \rho b_i e_i)$ , fuerzas de superficie  $f (= f_i e_i)$  dentro de la frontera  $\Gamma_F$  y fuerzas de contacto  $t (= t_i e_i)$  sobre  $\Gamma_C$ ,  $\Gamma_C^*$  es la frontera del cuerpo donde se realiza el contacto (incluida en  $\Gamma_C$ ).

Si la carga es aplicada en forma incremental, en una etapa intermedia de dicho proceso se puede plantear el principio de los trabajos virtuales obteniéndose la siguiente expresión

$$\int_{\Omega} \Delta \sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \Delta b_i \bar{u}_i d\Omega - \int_{\Gamma_F} \Delta f_i \bar{u}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_C^*} \Delta t_n \bar{u}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Delta t_t \bar{u}_t d\Gamma = 0 \quad (1)$$

donde  $\sigma (= \sigma_{ij} e_i e_j)$ ,  $\varepsilon (= \varepsilon_{ij} e_i e_j)$  y  $u (= u_i e_i)$  son las tensiones, deformaciones y desplazamientos del cuerpo flexible;  $t_n$  y  $t_t$  corresponden a las tensiones normal y tangencial en la superficie de contacto;  $\Delta$  indica

incremento y (-) variación.

Aplicando sobre los tres primeros términos de la ecuación (1) el método de los elementos finitos se puede llegar a una ecuación matricial del tipo

$$K \Delta U = \Delta P \quad (2)$$

donde K es la matriz de rigidez correspondiente a ese paso de carga,  $\Delta U$  es el vector incremental de desplazamientos nodales incógnitas y  $\Delta P$  es el vector de cargas nodales equivalentes incrementales.

Los dos últimos términos de (1) no pueden ser integrados directamente porque incluyen el vector de fuerzas incrementales de contacto que es desconocido.

Frente a esta dificultad surgen dos formas de contornar el problema para una posterior aproximación por el método de los elementos finitos.

La primera forma consiste en utilizar una formulación mixta usando el método de los multiplicadores de Lagrange. En este caso los incrementos de tensiones en la zona de contacto  $\Delta t$  se convierten en incógnitas adicionales a ser calculadas junto con incrementos de desplazamientos  $\Delta U$ . En este método se considera el campo de incrementos de desplazamientos independiente del campo de incrementos de tensiones, lo cual puede resultar ineficiente desde el punto de vista computacional [6],[7].

Otra forma de encarar el problema es utilizando el método de las funciones de penalidad. En este caso las incógnitas son solo desplazamientos, los cuales son penalizados en la zona donde se produce el contacto. Las tensiones de contacto pueden ser obtenidas con un procedimiento de post-procesamiento simple [2],[8],[9],[10].

Aplicando sobre (1) cualesquiera de los dos caminos antes indicados junto con el método de los elementos finitos se puede llegar a una ecuación matricial no lineal que puede ser resuelta mediante un proceso iterativo dentro de cada paso incremental. En la i-ésima iteración, esa ecuación toma la forma

$$(K + K_c^{i-1}) \Delta v_s^i = \Delta p - \Delta F_c^{i-1} \quad (3)$$

donde  $\Delta v_s$  es el vector de incógnitas,  $\Delta p$  el vector de las fuerzas nodales equivalentes incrementales, K la matriz de rigidez del material y  $K_c$  y  $\Delta F_c$  denotan una matriz y un vector que consideran las modificaciones introducidas al tener en cuenta el problema de contacto. Tanto K como  $\Delta F_c$  son funciones del vector  $\Delta v_s$  debido a la variación del área de contacto y del cambio de las condiciones del mismo.

En el caso de considerar plasticidad con grandes deformaciones  $K$  puede ser expresada como la suma de dos matrices  $K^M$  y  $K^G$  que tienen en cuenta la no linealidad física y geométrica respectivamente. Ambas matrices son funciones de las tensiones calculadas en la etapa anterior.

Una de las grandes ventajas de los métodos citados es que pueden ser aplicados sin tener en cuenta, en términos generales, la ley de comportamiento elegida para modelar el material flexible, lo cual facilita la implementación de dicho algoritmo en un programa de elementos finitos de análisis estructural existente.

### FORMULACION UTILIZADA

#### Consideraciones cinemáticas

Sea un cuerpo deformable del tipo definido en la figura(1) que se mueve con una velocidad  $v(=v e_i)$  donde  $v$  es una función que varía punto a punto sobre el dominio  $\Omega$  y con el tiempo  $T$ , y sea también un cuerpo rígido que se desplaza a una velocidad prescrita  $\bar{v}(=\bar{v} e_i)$  y que puede entrar en contacto con el cuerpo deformable antes definido.

La superficie del cuerpo rígido se define mediante la función  $Q(x)$  y la superficie del cuerpo deformable por la función  $S(x)$  en  $\Gamma_c$

A medida que el tiempo transcurre las superficies  $S$  y  $Q$  van cambiando de posición siendo posible el contacto entre ellas.

Para un cierto tiempo  $T$  durante el proceso analizado, y considerando un incremento del mismo suficientemente pequeño, se puede escribir

$$n \cdot (Q(x) + \bar{v} \Delta T) \geq (S(x) + v(x, T) \Delta T) \cdot n \quad (4)$$

donde  $n(=n_i e_i)$  es un versor normal interno a la superficie rígida.

Cuando se produce el contacto se verifica que

$$Q(x) = S(x) \quad \text{en } \Gamma_{ce} \quad (5)$$

donde  $\Gamma_{ce}$  indica la frontera en contacto en el tiempo  $T$ .  
En este caso la ecuación (4) queda reducida a

$$n \cdot \bar{v} \Delta T \geq \Delta T \cdot v(x, T) \cdot n \quad \text{sobre } \Gamma_{ce} \quad (6)$$

y quedando solo con la condición de igualdad, se puede escribir

$$\Delta u_n - \Delta g_n = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{ce} \quad (7)$$

siendo  $\Delta u_n (= \Delta u_{n_i})$  el incremento de desplazamientos restringidos por un desplazamiento prescrito  $\Delta g_n$  sobre la interfase en contacto  $\Gamma_{ce}$ .

Para resolver esta restricción se aplica el método de las funciones de penalidad que desde un punto de vista físico puede considerarse equivalente a colocar un resorte muy rígido entre las superficies en contacto, de esta forma se define

$$\Delta t_n = -kn (\Delta u_n - \Delta g_n) \quad \text{sobre } \Gamma_{ce} \quad (8)$$

donde  $kn > 0$  es la constante del resorte muy rígido (valor elevado), y  $\Delta t_n$  es el incremento de la tensión normal.

Si en una cierta etapa del proceso sobre un punto perteneciente a  $\Gamma_{ce}$  hay un incremento de tensión normal  $\Delta t_n$  positivo, dicho punto tiende a separarse de la superficie rígida, pero su despegue solo se producirá cuando  $t_n$  sea positivo.

#### Ley de fricción incremental

La similitud entre los fenómenos de fricción y fluencia plástica justifica la formulación a seguir [9].

El vector deslizamiento incremental  $\Delta u_{Ti} (= \Delta u_{Ti}^e)$ , tangencial a la superficie rígida, es descompuesto en la forma

$$\Delta u_{Ti} = \Delta u_{Ti}^e + \Delta u_{Ti}^p \quad (9)$$

La componente  $\Delta u_{Ti}^p$  corresponde al deslizamiento propiamente dicho. El término  $\Delta u_{Ti}^e$  corresponde a un pequeño deslizamiento elástico (reversible) observado experimentalmente antes del inicio del deslizamiento, y es el que activa el método de la penalidad. La relación elástica puede ser expresada como

$$\Delta t_{Ti} = -k_T (\Delta u_{Ti}^e - \Delta g_{Ti}) \quad (10)$$

donde  $\Delta t_{Ti}$  indica las componentes de la fuerza tangencial en la interfase,  $\Delta g_{Ti}$  es el movimiento prescrito por la superficie rígida en la dirección tangencial y  $k_T$  es la constante de la función de penalidad.

El criterio de deslizamiento corresponde a la ley de fricción de Coulomb que se puede expresar

$$F(t_T, \mu_F, t_n) = \sqrt{(t_{T_i} - t_{T_n})^2} + \mu_F t_n \quad (11)$$

donde  $t_i (= t_{T_i} e_i)$  y  $t_n$  son las componentes normal y tangencial del vector

$$t_i = t_{T_i} + t_{n_i} \quad (12)$$

y  $\mu$  es el coeficiente de fricción.

Para un punto sobre  $\Gamma_{c*}$  las superficies:

$$\begin{cases} F < 0 \\ \text{ó} \\ F = 0 \text{ y } \dot{F} < 0 \end{cases}$$

- permanecerán adheridas si

- podrá existir deslizamiento si  $F = 0$  y  $\dot{F} \geq 0$

La ley de flujo asociada permite obtener el incremento de deslizamiento

$$\Delta u_{T_i}^p = - \Lambda \left( \frac{\partial F}{\partial t_{T_i}} \right) \quad (13)$$

donde  $\Lambda$  es una constante positiva.

El valor de  $\Lambda$  puede ser determinado mediante la condición de consistencia

(14)

$$\Delta F = \left( \frac{\partial F}{\partial t_{T_i}} \right) \Delta t_{T_i} + \left( \frac{\partial F}{\partial \mu_F} \right) \left( \frac{\partial \mu_F}{\partial u_{T_i}^p} \right) \Delta u_{T_i}^p + \left( \frac{\partial F}{\partial t_n} \right) \Delta t_n = 0$$

trabajando con las expresiones (9), (10), (13) y (14), puede obtenerse la relación constitutiva incremental del contacto con fricción la cual puede expresarse como sigue

$$\Delta t_{Ti} = -k_{ij} (\Delta u_{Tj} - \Delta \epsilon_{Tj}) - c T_i \Delta t_n \quad (15)$$

donde

$$k_{ij} = k_T \left( \delta_{ij} - \alpha \frac{k_T}{D_T} T_i T_j \right) \quad (16)$$

$$c = \alpha \frac{k_T \mu}{D_T} \quad (17)$$

$$D_T = k_T + T_k t_n \left( \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}_T^P} \right) \left( \frac{u_{Tk}^P}{\bar{u}_T^P} \right) \quad (18)$$

$$\bar{u}_T^P = \sqrt{u_{Tj}^P u_{Tj}^P} \quad (19)$$

$$u_{Ti}^P = \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}_T^P} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_T^P}{\partial u_k^P} = \frac{u_{Tk}^P}{\bar{u}_T^P} \quad (21)$$

$$T_i = \frac{\partial F}{\partial t_i^T} = \frac{t_{Ti}}{\bar{t}_T} \quad (22)$$

$$\bar{t}_T = \sqrt{t_{Ti} t_{Ti}} \quad (23)$$

La  $(\partial \mu / \partial \bar{u}_T^P)$  es el módulo de endurecimiento isótropo, obtenido a partir de una curva  $(\mu - \bar{u}_T^P)$  resultante de ensayos de deslizamiento (11). En las expresiones (16) y (17) el coeficiente  $\alpha$  queda definido de la siguiente manera

$$\alpha = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} F < 0 \\ \text{ó} & \text{descarga friccional} \\ F = 0 \text{ y } F = T_i \Delta T_i + \mu_r \Delta t_n < 0 \end{cases}$$



\*  $\alpha = 1$  si  $F = 0$  y  $F \geq 0$  carga friccional

Cabe destacar que  $\Delta t_n < 0$  indica aumento de presión.

### APROXIMACION ATRAVES DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Utilizando las relaciones (8) y (15) la ecuación (1) se puede expresar de la siguiente manera.

$$\int_{\Omega} \Delta \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \Delta b_i \bar{u}_i d\Omega - \int_{\Gamma_f} \Delta f_i \bar{u}_i d\Gamma_f - \quad (24)$$

$$\int_{\Gamma_{ce}} k_n (\Delta u_n - \Delta \epsilon_n) \bar{u}_n d\Gamma - \int_{\Gamma_{ce}} [k_{ij} (\Delta u_{\tau j} - \Delta \epsilon_{\tau j}) + c T_i \Delta t_n] \bar{u}_{\tau i} d\Gamma = 0$$

válida para todo  $\bar{u}_i$  tal que  $\bar{u}_i = 0$  sobre  $\Gamma_D$ .

Aplicando sobre (1) el método de los elementos finitos se puede obtener la ecuación matricial (3) donde en este caso

$$\Delta v_n = \Delta u \quad (25)$$

y las contribuciones de cada elemento con frontera en contacto a la matriz  $K_c$  y al vector de cargas  $F_c$  globales se pueden escribir

$$K_{c,elem} = K_{i,j\alpha\beta} = \int_{\Gamma_{c,elem}} (k_{nn} n_i n_j + \hat{k}_{ij}) N_\alpha N_\beta d\Gamma \quad (26)$$

$$\Delta F_{c,elem} = F_{i\alpha} = \int_{\Gamma_{c,elem}} (k_n \Delta \epsilon_n n_i + k_{ik} \Delta \epsilon_{\tau k} + c T_i \Delta t_n) N_\alpha d\Gamma \quad (27)$$

siendo que

$$\Delta u_i(x) = \Delta u_{i\alpha} N_\alpha(x) \quad (27)$$

$$\bar{u}_i(x) = \bar{u}_{i\alpha} N_\alpha(x) \quad (28)$$

donde  $N(x)$  son las funciones de forma que interpolan  $\Delta u(x)$  y  $\bar{u}(x)$  dentro de cada elemento,  $\alpha$  indica el número local del nodo y varía de 1 al número de nodos del elemento y, por último,  $\Delta u_{i\alpha}$  es la  $i$ -ésima componente de los desplazamientos incrementales del nodo  $\alpha$ .

$\hat{k}_i$  es una expresión función de  $k_i$  y  $n$  resultante de rotar los términos calculados en la dirección tangencial a coordenadas globales  $x_i$ .

Como se mencionó anteriormente (3) representa un sistema de ecuaciones que se debe resolver en forma iterativa siendo que en este caso  $\Delta t_n$  dentro de la expresión (26) no es conocido a priori.

La formulación presentada se está implementando computacionalmente para resolver problemas de estado plano de tensiones y axisimétricos utilizando elementos isoparamétricos lineales de 4 nodos. A continuación se presentan dos ejemplos que ilustran los resultados obtenidos hasta el presente.

### EJEMPLOS NUMERICOS

#### Ejemplo 1

Supóngase un cilindro circular rígido de radio  $R = 8\text{cm}$  que al descender impone deformaciones sobre un cuerpo flexible con comportamiento elástico lineal, ver figura (2).

El cuerpo elástico de dimensiones  $16\text{ cm} \times 4\text{ cm}$  es discretizado utilizando 178 elementos cuadriláteros lineales de 4 nodos, considerando estado plano de deformaciones.

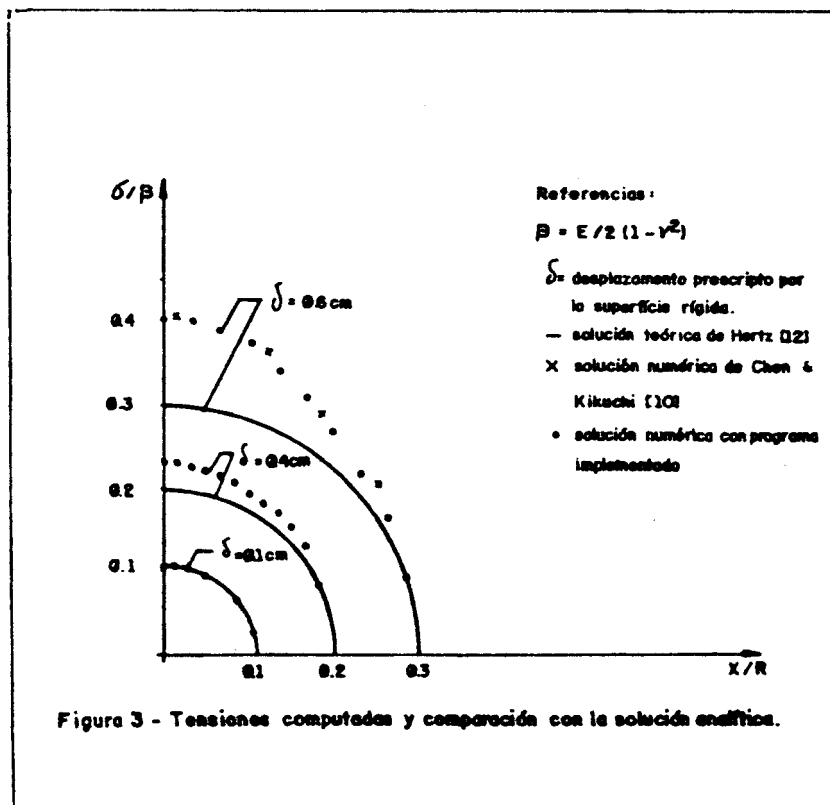
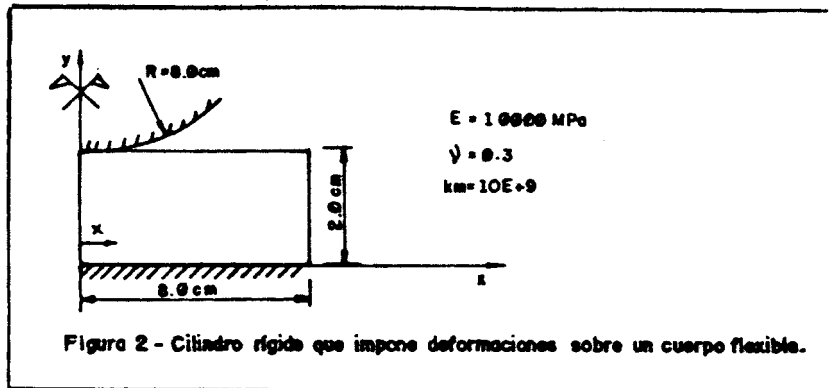
Se adoptó  $E = 10000\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ , coeficiente de fricción  $\mu = 0.0$  y constante de penalidad  $k_n = 10E+9$ .

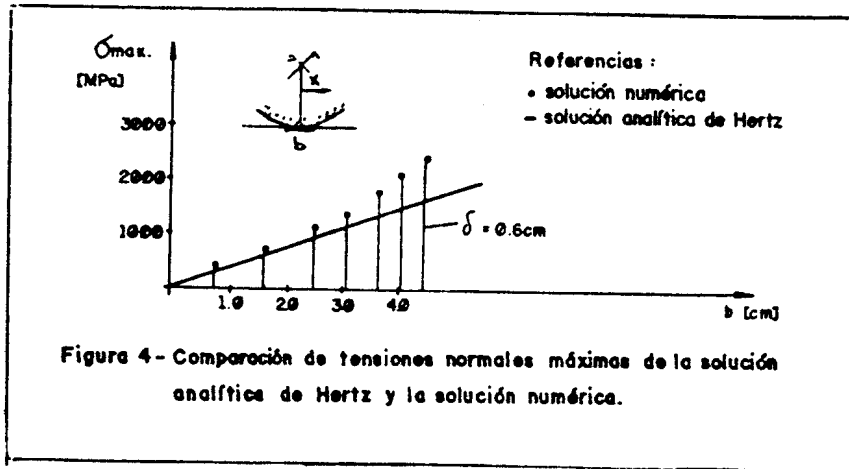
La malla fué densificada en la zona de contacto.

Los resultados obtenidos fueron comparados con la solución teórica de Hertz [12] y con la solución numérica presentada por Chen & Kikuchi [9]. La comparación de los mismos pueden verse en la figura (3).

Los valores numéricos se ajustan razonablemente a la solución dada por Chen & Kikuchi [9]. Al confrontarlos con la solución teórica de Hertz se observan buenos resultados

para profundidades de penetración bajas, apartándose la solución teórica de la numérica a medida que la penetración aumenta. Esto se explica considerando que para penetraciones elevadas las hipótesis de la solución de Hertz dejan de cumplirse, ver figura (4).





### Ejemplo 2

Considérese un disco elástico de radio  $R = 2 \text{ cm}$  y espesor  $e = 1 \text{ cm}$  sobre el cual impone deformaciones un anillo circular rígido, ver figura 4.

Se adoptaron los siguientes valores

$$E = 1000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

El problema fue analizado considerándolo axisimétrico.

La malla utilizada estaba compuesta de 220 elementos isoparamétricos lineales de 4 nodos.

Los resultados obtenidos se ajustaron razonablemente a la solución analítica de Shibuya [2].

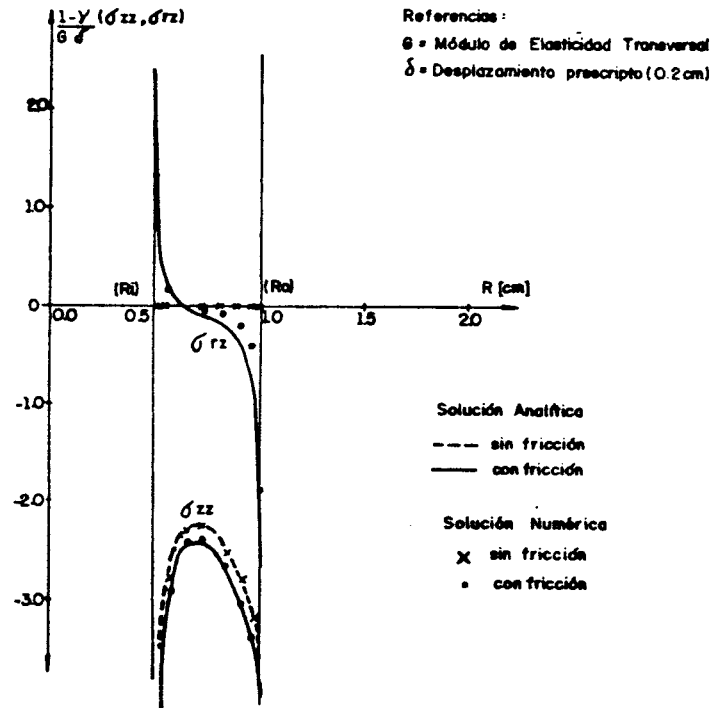
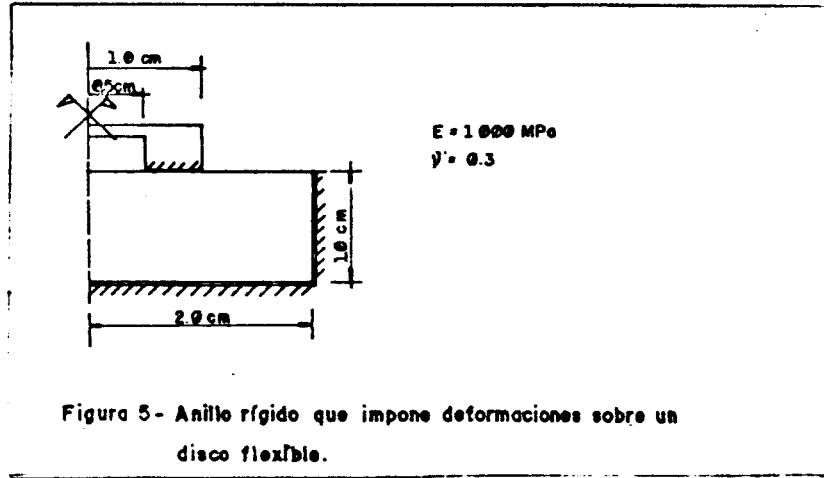


Figure 6 - Tensiones computadas y comparación con la solución analítica

## DISCUSION DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En el programa que se está implementando no se empleó integración reducida para los términos afectados por la penalidad; consecuentemente las tensiones en el área de contacto, obtenidas a través de las expresiones (8) y (15), presentaron distorsiones inadmisibles en la zona de fuertes gradientes. Por esta razón dichas tensiones se calcularon a partir de los valores de  $\sigma$  correspondientes a los puntos de integración del elemento que fueron llevados a los nodos de contacto mediante interpolación y posterior suavización.

Se intentó aplicar integración reducida de los términos afectados por la penalidad, considerando un solo punto de integración sobre el contorno, obteniendo resultados incorrectos. Actualmente se está implementando un método de integración para los términos en cuestión que combina integración por el método de cuadratura de Gauss, y el método de los trapecios, basado en el trabajo presentado por Kikuchi [13].

De esta forma se espera solucionar los inconvenientes encontrados y partir para el objetivo final que es implementar este algoritmo en un programa de plasticidad con grandes deformaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] L. T. Campos, J. T. Oden and N. Kikuchi. "A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics.", *Comp Meth in App. Mechanics*
- [2] J. Oden, and G. Carey, "Contact Problem in Elastostatics.", *Finite elements special problems in solids mechanics*, volumen V . cap IV ,Editores J. T. Oden and G. F. Carey.
- [3] H.J. Corrêa Barbosa, "Algoritmos Numericos para problemas de contato em Elasticidade.", *Tese de Doutorado da Coppe*, Rio de Janeiro 1986.
- [4] E.A.Fancello, "Formulação variacional do problema deo contato com atrito; resolução via regularização.", *Tese de mestrado da Coppe* ,Rio de Janeiro . 1989
- [5] J.Bohm "Comparison of diferent contact algorithms whith Applications ". *Computers&Structures* N 1/2pp207-221,1987-Great Britain.
- [6] K.J.Bathe and a. Chaudhary ."A solution method for planar and axisymmetric contac problem".*Int. J.Mech.Ing.*,vol 21,65-88 (1985).
- [7] F. Guerra and R.Browing, "Comparison of two slideline methods using Adina",*Com. & Struc.*, vol 17 N 56 PP 819,834, 1983.
- [8] J.H. Chen and N. Kikuchi. "An analysis of metal forming processes using large deformation Elastic-Plastic Formulations".*computer met.in mech and ing* 49 (1985) pp71-108 North - Holland.
- [9] J.H. Chen an N. Kikuchi , "An incremental constitutive relations of unilateral contac friction for large deformations analysis".*Journal of applied Mech* (set 1985)
- [10] Chandrasekaran, Wehaisler, R E Goforth."A finite solution method for contact problem". *Int. J. Mech.Ing.*,vol 24,477-495 (1987)
- [11] Bowden F. P. and Tabor D., "The Friction and lubrication of Solids.", Part II , Oxford at the Clarendon Press, London, 1964.
- [12] Thimoshenko-Goddier, *Teoria da Elasticidade* -pag 400-424,(1980)
- [13] Kikuchi N., "A Smoothing technique for reduced integration penalty methods in contact problems.",*int. J. for Numerical Methods in Engineering* ,vol 18,343-350 (1982).

