

DESCRIPCION DE DOMINIOS BIDIMENSIONALES MEDIANTE  
"ARBOLES CUATERNARIOS". APLICACION AL M.E.F.

Gabriel A. Baum, Michel R. Sauval Benada, Ricardo F. Rosenfeld\*, Eduardo G. Antonelli \* - I.I.T.R.E.E. (Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y Equipos Eléctricos - Facultad de Ingeniería - U.N.L.P.

\* Becarios de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

RESUMEN

Uno de los principales problemas que enfrentan los métodos de resolución numérica para el estudio de campos es el mallado del área de estudio y el ingreso, como datos, de esta red de nodos en el computador.

En este trabajo se informa acerca de las experiencias recogidas del desarrollo e implementación de tres procedimientos de generación de mallas para la representación de regiones planas:

- \* generación de la malla por "deformación elástica" de una malla regular;
- \* diseño de la malla en forma manual, interactiva;
- \* generación de la malla mediante un algoritmo basado en árboles (de relaciones) cuaternarios.

El "método de los árboles cuaternarios" presenta evidentes ventajas en lo que respecta a su eficiencia computacional en tiempo y memoria, y en cuanto a las facilidades que ofrece al usuario para la representación de la región en estudio.

1.- Introducción

La implementación de un programa de cálculo para la resolución numérica por computadora de problemas de campo plantea los siguientes subproblemas:

- a) La descripción del dominio a estudiar en forma de un grafo o malla de nodos, en la que se desea conocer el valor numérico de la variable in cónita.
- b) La conversión del sistema de ecuaciones diferenciales o integrales que gobiernan el campo, en un sistema de ecuaciones algebraicas.
- c) La resolución del sistema de ecuaciones algebraicas.
- d) La presentación de los resultados, particularmente en forma gráfica.

Los subproblemas b) y c) han merecido amplio tratamiento, teórico y en aplicaciones, existiendo actualmente técnicas eficientes en tiempo de ejecución y almacenamiento de datos.

El subproblema a) representa generalmente un considerable esfuerzo manual o semi-manual de preparación de datos que identifican los nodos de la malla y sus coordenadas. Sobre estos aspectos se investigaron algunos procedimientos que facilitarían la automatización del ingreso de datos. Se realizaron experiencias en tres líneas de desarrollo.

En primera instancia se trabajó con un modelo de malla "deformable". El método consiste en generar una malla regular de contornos sencillos. Luego, asignando una oportuna propiedad elástica a dicho esquema geométrico, se lo deforma paulatinamente mediante el corrimiento de los nodos del borde de la malla hasta que sus posiciones sean congruentes con el contorno real del área de estudio.

El segundo método estudiado consistió en diseñar la malla "interactivamente", señalando el operador directamente sobre la pantalla gráfica de la computadora la posición de cada nodo deseado, realizándose luego automáticamente la triangulación, identificación y asignación de coordenadas.

Finalmente se aplicó un método de descripción de la malla mediante "árboles cuaternarios". Este método consiste básicamente en el ordenamiento de la información sobre el dominio a estudiar formando el "árbol de relaciones" de tipo "cuaternario" que resulta de sucesivas subdivisiones del dominio en cuadrantes. Con este procedimiento sólo es necesario ingresar los datos que describen el contorno del dominio.

Este método permite obtener automáticamente las características geométricas de los elementos en que ha quedado dividido el dominio, y asignar fácilmente las propiedades del medio y las condiciones de contorno. Facilita también el diseño de diferentes subregiones con contornos arbitrarios y distinto grado de discretización, y de regiones múltiplemente conexas.

El algoritmo utilizado resulta ser eficiente en tiempo y memoria. El tiempo de ejecución es proporcional al producto del perímetro y el logaritmo del diámetro de la región.

## 2.- Modelo de malla deformable

### 2.1.- Fundamentos del modelo

El procedimiento es conceptualmente sencillo y consiste de dos etapas:

- (a) Generar un retículo uniforme con bordes rectilíneos, suficientemente aproximados a la forma de la región plana en estudio (Fig. 1).
- (b) Asignar oportunas propiedades elásticas al esquema precedente y deformarlo trasladando los nodos de los contornos externos e internos hasta que coincidan con los de la región en estudio. Los nodos internos asumirán, en consecuencia, nuevas posiciones dependientes de la propiedad elástica asignada al sistema.

Es posible utilizar diversos modelos elásticos para obtener el resultado deseado: se puede asimilar el dominio ocupado por el retículo uniforme a una membrana plana o bien tratarlo como compuesto por varillas elásticas. Estos modelos, sin embargo, requieren una gran masa de cálculo y almacenamiento para generar la matriz de rigidez y para solucionar el sistema de  $2n$  ecuaciones con  $2n$  incógnitas resultante, siendo  $n$  el número de nodos "libres" (sin posición final asignada) del retículo.

El modelo adoptado [Ref. 1], aunque menos riguroso, tiene la ventaja de ser mucho más simple desde el punto de vista computacional.

Cada nodo interior del retículo generado en la fase a) se considera efectivamente vinculado a los nodos del contorno a través de varillas elásticas ideales; se prescinde de las relaciones recíprocas entre los nodos interiores y se postula que las ubicaciones finales de los mismos

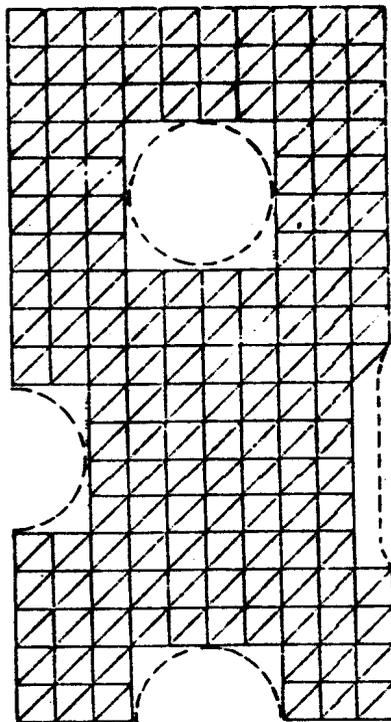


Figura 1 - Retículo uniforme con bordes rectilíneos a modificar por "deformación elástica".

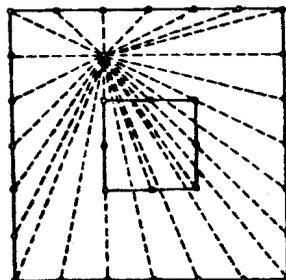


Figura 2 - Representación del modelo elástico adoptado.

sólo dependen de las ubicaciones impuestas a los nodos del contorno. Los elementos triangulares del retículo aparecen luego bajo la forma de relaciones topológicas y no forman parte del modelo elástico utilizado para la generación de la malla definitiva.

Considérese un retículo con  $n$  nodos interiores y  $m$  nodos de contorno y las varillas "virtuales" que vinculan un nodo interior con los  $m$  nodos de contorno (Fig. 2), con adecuadas propiedades elásticas. Las componentes de las fuerzas en el extremo libre de la varilla serán función del corrimiento del nodo interior en estudio, del módulo de elasticidad, de la sección adoptada para la varilla y de su longitud, de los cosenos directores de las mismas y de los corrimientos de los nodos del contorno [Ref. 1]. Dado que el nodo interior alcanza una posición de equilibrio, la fuerza resultante en el nodo será nula, obteniéndose así que las componentes del corrimiento del nodo interior  $(u_i, v_i)$  por efecto del corrimiento de los nodos del contorno son la solución de un sistema lineal de la forma:

$$\begin{cases} a_{11} u_i + a_{12} v_i = b_1 \\ a_{12} u_i + a_{22} v_i = b_2 \end{cases}$$

donde los coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_1$  y  $b_2$  son también función del módulo de elasticidad, de la sección, de la longitud y de los cosenos directores de las varillas en el sistema de referencia adoptado y de los corrimientos de los nodos de contorno.

La determinación de los valores  $u_i$  y  $v_i$  de los  $n$  nodos internos se reduce, por lo tanto, a la solución de  $n$  ecuaciones lineales con dos incógnitas, obteniéndose las nuevas coordenadas de las mismas.

Las relaciones descriptas valen para corrimientos pequeños; sin embargo, los impuestos a los nodos del contorno no pueden, en general, ser considerados tales. En consecuencia, resulta necesario fraccionar los desplazamientos e iterar el procedimiento descrito hasta obtener las posiciones deseadas. En la Fig. 3 se muestra una etapa intermedia de deformación de la malla inicial.

## 2.2. Consideraciones críticas

La falta de conexiones elásticas entre los propios nodos internos, si bien por un lado simplifica sensiblemente los cálculos, por el otro

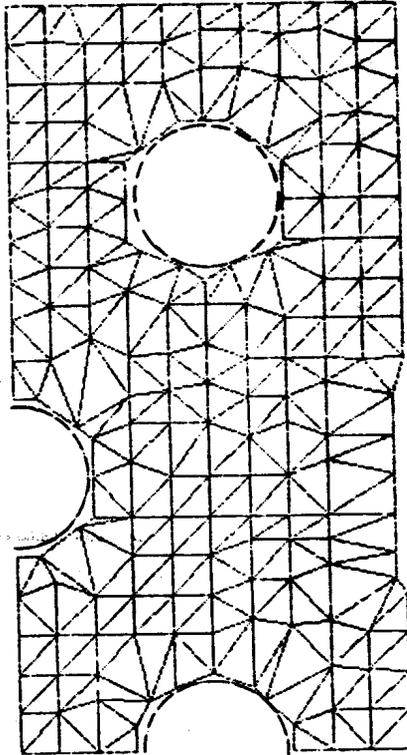


Figura 3 - Estado de la malla mostrada en la figura 1 en una etapa intermedia de la "deformación elástica".

puede dar lugar a corrimientos incongruentes entre ellos. Estas incongruencias pueden a su vez dar lugar a "degeneraciones" (alineamientos o superposiciones) de los nodos de un elemento o "penetraciones" entre los elementos.

Si bien se ha intentado mejorar el modelo en este aspecto, conservando su sencillez inicial, tal vez sea cuestión de experiencia en la definición del retículo de partida el camino más adecuado para evitar las mencionadas incongruencias.

La deficiencia más notable de este método es, sin duda, su escaso aporte al problema de generar "automáticamente" regiones con diferentes grados de discretización. Esta tarea debe cargarse en la fase (a) del proceso, complicándose un poco la generación de la malla regular. Sin embargo, con el mayor refinamiento de la malla se agrava el problema de las incongruencias resultantes de desplazamientos excesivos de los nodos del contorno.

### 3.- Diseño interactivo de la malla

#### 3.1. Generalidades operativas

Este método requiere de una computadora con pantalla gráfica, ya que consiste en diseñar sobre la misma la malla, siguiendo una operatoria interactiva con la computadora.

La sucesión de los pasos de operación es la siguiente:

- (a) El programa parte de una gráfica del contorno de la malla, ingresada previamente como una sucesión cerrada de nodos (cuyos datos son sus coordenadas). Dicha gráfica (o parte de la misma) es presentada en la pantalla, sobre la cual se ubica también un "puntero".
- (b) El usuario desplaza entonces el "puntero" hasta el lugar donde desea ubicar un nuevo nodo, posición que es verificada por el programa en relación a la condición de convexidad. Esta condición se cumple cuando hay al menos dos de los nodos previamente existentes, ubicados a una distancia máxima prefijada, y tales que las rectas que pasen por cada uno de ellos y el nuevo nodo creado dejen a todos los demás nodos en un mismo semiplano.

- (c) Si se cumple la condición de convexidad, el programa dibuja los elementos generados a partir de la inclusión del nuevo nodo.
- (d) El usuario debe entonces verificar si el nuevo nodo es interior a algún polígono convexo no triangular, en cuyo caso la operación debe repetirse.
- (e) De esta manera, y en forma interactiva, repitiendo el procedimiento de (a) a (d), el usuario diseña toda la malla.

En la figura 4 se muestra, a modo de ejemplo, una malla diseñada mediante el método descrito para el cálculo del campo eléctrico y del potencial de una configuración de electrodos típica con simetría axial. La figura 5 muestra las líneas equipotenciales obtenidas a partir de la solución de la ecuación de Laplace por el método de Galerkin.

### 3.2.- Consideraciones críticas

El objetivo del método es ahorrar el trabajo rutinario que significa relevar manualmente las coordenadas de los nodos de una malla y digitar las mismas en la consola de la computadora como datos de entrada al programa.

Con este método dichas operaciones son realizadas por la computadora.

Sus limitaciones radican en que:

- \* el trabajo de diseño de la malla, nodo por nodo, sigue siendo privativo del usuario.
- \* se requiere de una computadora con pantalla gráfica.

## 4.- Representación de regiones planas por el método de los árboles cuaternarios

### 4.1. Fundamentos

El método de los árboles cuaternarios consiste, básicamente, en la construcción de lo que se denomina un "árbol cuaternario", con el objeto de describir la relación entre los elementos creados en la discretización de los dominios a representar [Refs. 1,2,3,4,5,6 y 7]. La discretización referida corresponde a la de una malla de elementos cuadrados, y el dominio a representar (región plana) puede ser descrito a partir tan sólo de su contorno.

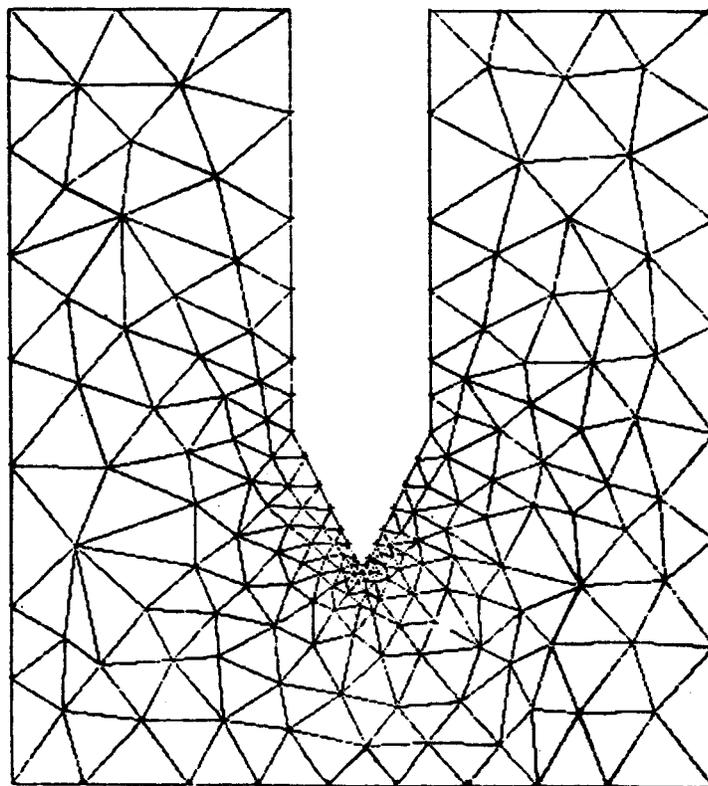


Figura 4 - Malla diseñada en la forma manual interactiva.

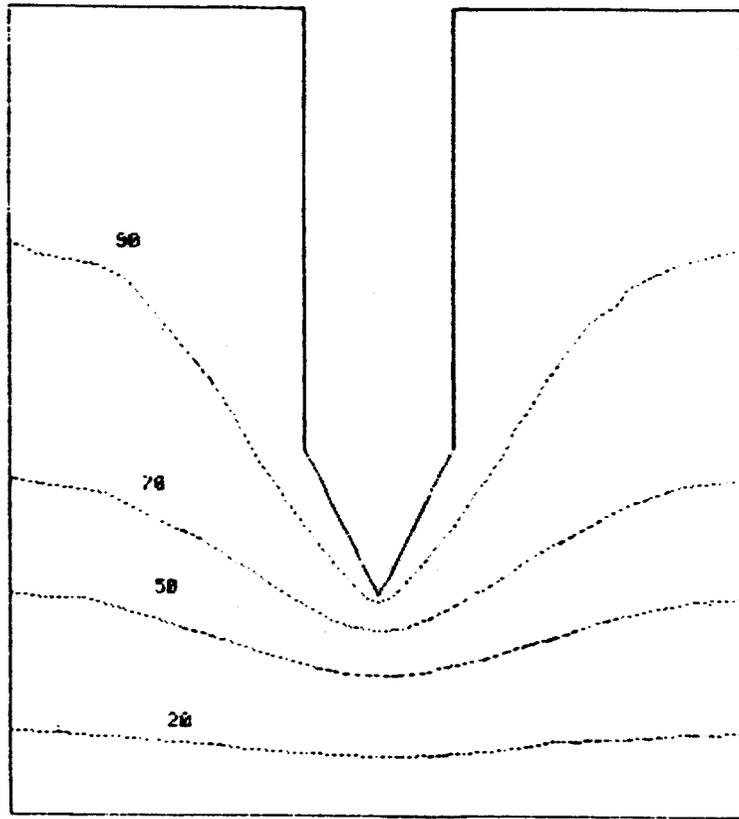


Figura 5 - Líneas equipotenciales obtenidas a partir de la malla de la figura 4.

El método permite, por un lado, postergar los instantes de manejo del gran volumen de información propio de la región (coordenadas de los nodos creados en su discretización) a transmitir a la etapa de resolución numérica del problema de campo planteado, hasta el último momento de la tarea de representación, una vez construida la malla.

Por otra parte, el método de los árboles cuaternarios potencializa todas las posibilidades de diseño, permitiendo:

- a) determinar arbitrariamente distintas subregiones (caracterizadas a partir de sus grados de discretización, sus medios constitutivos y sus contornos).
- b) determinar arbitrariamente "agujeros" en las regiones a representar.

#### 4.2. Descripción general del método

##### Conceptos

Sea  $R$  una región a representar por el método de los árboles cuaternarios, y sea  $C$  una cuadrícula de referencia de  $2^n \times 2^n$  cuadrados que la cubre en su totalidad (para una mejor comprensión del método, se supondrá que el contorno de  $R$  no posee trazos curvos ni oblicuos, es decir, que está formado sólo por segmentos verticales y horizontales).

El algoritmo de representación divide inicialmente la cuadrícula en sus 4 cuadrantes constitutivos, que por convención serán denominados noroeste (NO), nordeste (NE), sudeste (SE) y sudoeste (SO). Luego selecciona entre estos cuadrantes a los que contienen en su interior tanto una parte de la región como así también una parte de la cuadrícula ajena a la región, y los divide en sus propios 4 cuadrantes. El algoritmo vuelve a seleccionar a los cuadrantes que cumplen con la condición ya descripta, los vuelve a dividir, y reitera este proceso de selección y división de cuadrantes cuantas veces sea necesario hasta obtener bloques (los cuadrantes generados durante el proceso de división de cuadrantes) completamente interiores o completamente exteriores a la región, es decir, bloques que contienen exclusivamente o bien una parte de la región o bien una parte de la cuadrícula ajena a la región, respectivamente.

Las divisiones sucesivas pueden ser representadas por un árbol cuaternario, en el que su nodo raíz corresponde a la cuadrícula completa, los nodos hijos de la raíz a los 4 cuadrantes constitutivos de la cuadrí-

cula; y en general, los hijos de un nodo p dado a los 4 cuadrantes constitutivos del bloque representado por p. De este modo, las hojas (nodos terminales) del árbol corresponden a los bloques completamente interiores o completamente exteriores a la región.

Las hojas del árbol serán "negras" o "blancas" según representen a bloques completamente interiores o completamente exteriores a la región. Los nodos que representen a los cuadrantes con partes tanto propias como ajenas a la región serán "grises". En cuanto a la "numeración" de los nodos, ella resulta de asignar los dígitos 1, 2, 3 y 4 a los cuadrantes NO, NE, SE y SO, respectivamente, en cada nivel de división. De esta manera el número asociado a cada nodo indica la ubicación, en la región, del bloque que representa.

La descripción de la región R se basa sólo en su contorno, y se expresa a través de un código de 4 direcciones que, también por convención, se denominarán norte (N), sur (S), este (E) y oeste (O). El código establece cuántas unidades deben ser recorridas en cada dirección, a partir de un punto cualquiera, para contornear totalmente a R.

La figura 6 muestra una región R a representar y la cuadrícula base que la cubre. La figura 7 muestra la descomposición en bloques de la cuadrícula de la figura 6. En la figura 8 se describe el árbol cuaternario correspondiente a las divisiones mostradas en la figura 7. Finalmente, un ejemplo de los posibles códigos de 4 direcciones que sirven para describir la región mostrada en la figura 6 sería:

ZE2S3E3S6O3N1E2N

El método de los árboles cuaternarios tal como se lo ha explicado, presenta dos características que lo hacen poco apto para su aplicación directa en la resolución de problemas de campos por el M.E.F.. Ellas son:

- (a) El interior de las regiones representadas queda dividido en bloques de tamaño máximo.
- (b) Los bordes de las regiones son necesariamente paralelos a los ejes coordenados canónicos de la cuadrícula básica.

No obstante ello, ambas dificultades pueden ser resueltas dentro del marco de la idea original en que se basa el método. A continuación se ex-

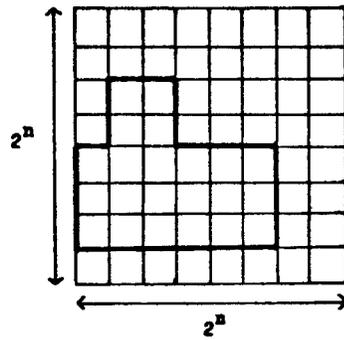


Figura 6 - Región R a representar por el método de los árboles cuaternarios, y su cuadrícula asociada.

1.1.		1.2.		2			
1.4.1	1.4.2	1.3.1	1.3.2				
1.4.4	1.4.3	1.3.4	1.3.3				
4.1.		4.2.		3.1.		3.2.	
4.4.1	4.4.2	4.3.1	4.3.2	3.4.1	3.4.2	3.3.	
4.4.4	4.4.3	4.3.4	4.3.3	3.4.4	3.4.3		

Figura 7 - Descomposición en bloques de la cuadrícula de la figura 6 por sucesivas divisiones en cuadrantes.

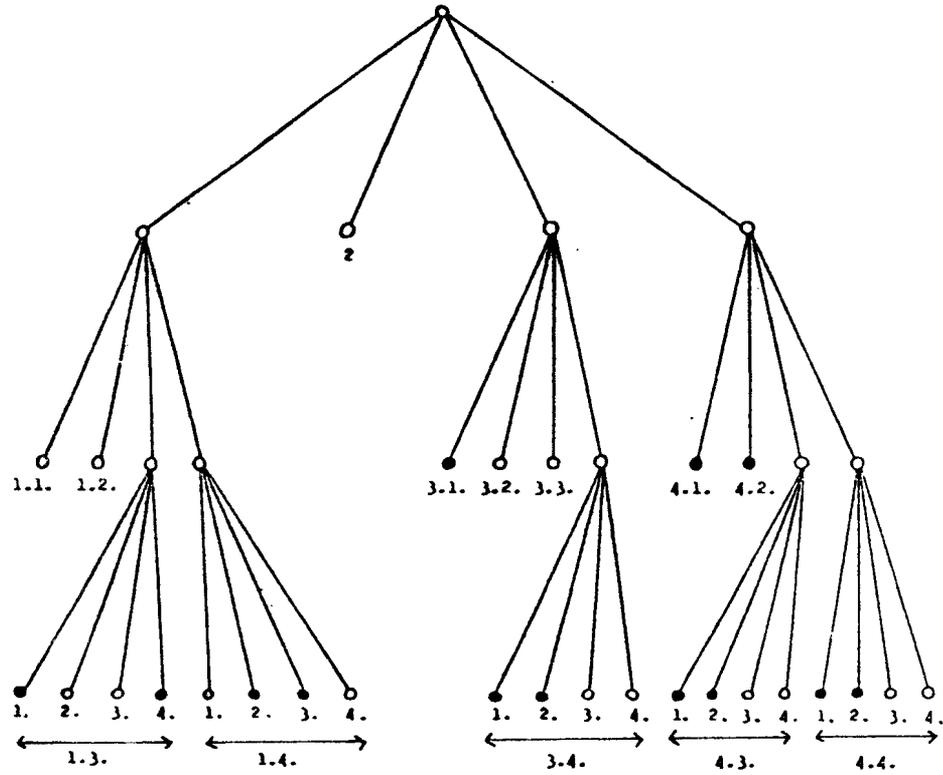


Figura 8 - Arbol correspondiente a las divisiones mostradas en la figura 7.

plica el modo en que se han resuelto diversas situaciones especiales.

#### 4.2.1.- Regiones con distinto grado de discretización

El problema de determinar subregiones conformadas por bloques de tamaño arbitrario, se reduce al de encontrar en el árbol cuaternario constituido, el conjunto de hojas "negras" que las representan, y dividir las ulteriormente hasta alcanzar el tamaño deseado.

El árbol asociado a la región es idéntico al previo, salvo que ahora algunos de sus subárboles (los correspondientes a la representación de las nuevas discretizaciones) suplen a anteriores nodos "negros" (los nodos representantes de los bloques de las subregiones a ser discretizadas).

#### 4.2.2.- Agujeros en el dominio

La generación de "agujeros" en el dominio se efectúa de manera análoga a la determinación de subregiones con grados de discretización arbitrarios.

De este modo, el árbol obtenido es el mismo que el que se construye de acuerdo al problema planteado en la determinación de regiones con distinto grado de discretización, a excepción de que ahora los subárboles asociados a los agujeros tienen hojas blancas (no pertenecen al dominio considerado).

#### 4.2.3.- Triangulación

El proceso de triangulación consiste sencillamente en dividir a cada uno de los bloques cuadriláteros de las regiones representadas, en sus 4 triángulos constitutivos, trazando sus diagonales (esto permite mantener la estructura del árbol cuaternario).

Sin embargo, la triangulación no siempre resulta tan simple. En la mayoría de los casos se requiere un proceso previo denominado "suavización", el cual asegura que la región no tenga bloques con más de dos vecinos por lado (rediscretizando las áreas que así lo requieran). Ello se debe a que de lo contrario, se generarían nodos con elevado grado de adyacencia, lo que resulta indeseable desde el punto de vista del cálculo posterior.

#### 4.2.4.- Fronteras no paralelas a los ejes coordenados canónicos

##### Contorno general del dominio

Las formas que puede adoptar el contorno de las regiones a representar por el algoritmo implementado corresponden a secuencias de segmentos de recta, arcos de circunferencia y arcos de parábola.

La generación del contorno de las regiones se efectúa en dos tiempos:

- a) Construcción de un primer contorno compuesto solamente por trazos horizontales y verticales.
- b) Modificación del contorno original por inserción de segmentos de recta, arcos de circunferencia y arcos de parábola en donde fuere necesario.

Así, la tarea mencionada en b) consiste simplemente en la "extensión" de la discretización establecida dentro de las fronteras construidas en a) a las subregiones limitadas por aquéllas y las fronteras que se construyen en b).

##### Contorno de las subregiones

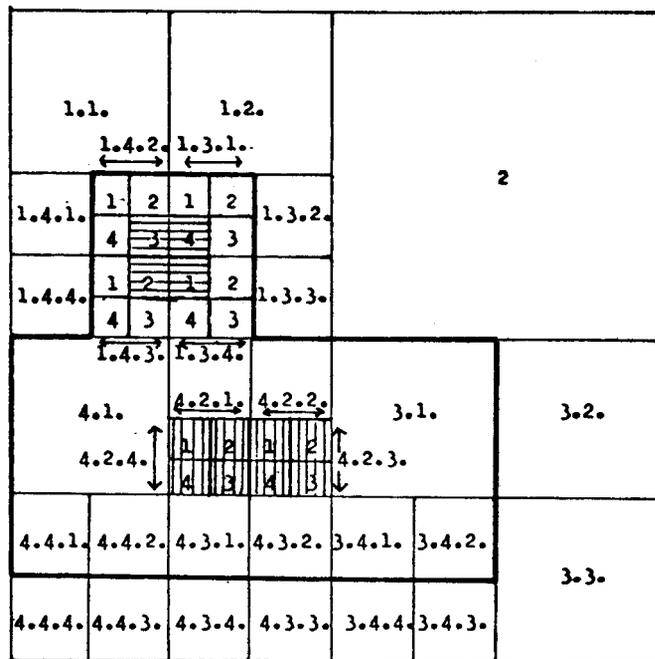
En general, los dominios a estudiar están formados por subregiones cada una de las cuales presenta características físicas particulares, es decir, constituyen un medio distinto.

La representación de distintos medios ha sido resuelta a partir de las ideas presentadas anteriormente: en principio, se le asigna al dominio completo un único medio (dominio uniforme). Luego, si existe una subregión con características físicas diferentes, se la define a través de un contorno y se le asocia un nuevo medio.

Por otra parte, se presenta el problema de que las fronteras entre distintos medios pueden no ser paralelas a los ejes coordenados canónicos. En estos casos, lo que se hace es ir generando dichas fronteras de a trazos, como antes, asignándose a uno y otro lado de las curvas el medio correspondiente a sus entornos asociados.

#### 4.2.5.- Ejemplo

La figura 9 muestra cómo se modifica la cuadrícula básica de la figura 7, luego de la generación de una subregión con un grado de discretización y un medio determinados y la de un agujero, en la región de la figura 6.



**Figura 9** - Generación de un agujero (en rayas horizontales) y de una subregión con un grado de discretización determinado (en rayas verticales) en la región de la figura 6.

La figura 10 describe el árbol asociado a la cuadrícula mostrada en la figura 9.

Finalmente, en la figura 11 se ilustra la construcción de las fronteras definitivas de la región de la figura 6, y la de una nueva subregión, esta vez con bordes no paralelos a los ejes coordenados.

#### 4.3. Análisis de aspectos computacionales

El método ha sido programado en lenguaje FORTRAN, desarrollado sobre un sistema de ordenador IBM-4331 de la Universidad Nacional de La Plata.

El programa requiere para su ejecución unos 550 K-bytes de memoria.

El número de operaciones elementales del método de los árboles cuaternarios para la generación de la malla es proporcional al producto del perímetro de la región a representar y el logaritmo de su diámetro [Refs. 2,3].

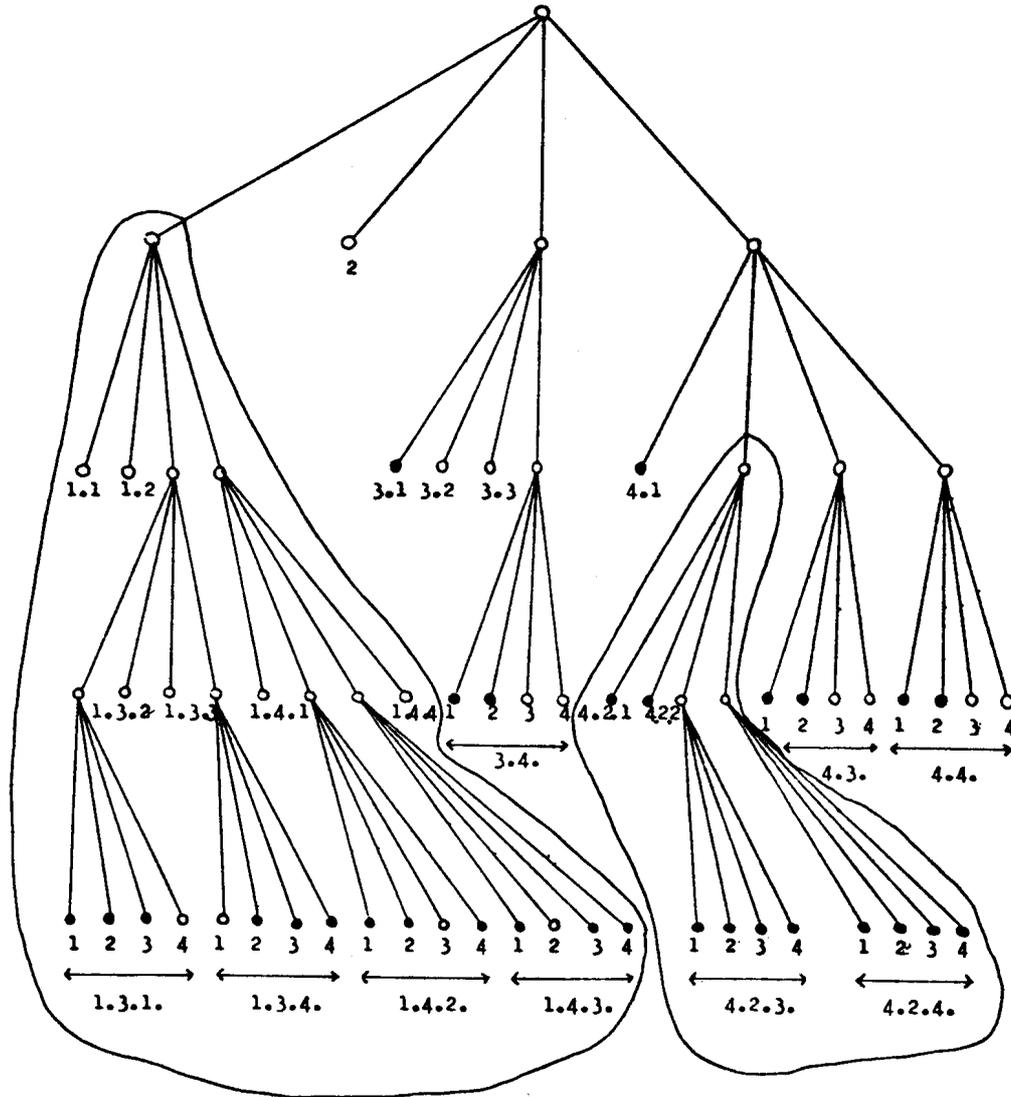
En las pruebas realizadas, el método ha demostrado ser eficiente en cuanto a su velocidad de ejecución en la generación de la malla.

A modo de ejemplo, se ha representado a los efectos de comparación, el caso presentado en la [Ref. 8], que se muestra en la figura 12. Se trata de un sistema de electrodos de simetría axial sometidos a una diferencia de potencial dada, con diferentes medios dieléctricos, indicados con sus respectivos valores de constante dieléctrica  $\epsilon$ , como puede verse en la figura 12.

La figura 13, tomada de la [Ref. 8], muestra el aspecto de la malla generada "manualmente" mediante el ingreso de coordenadas, lo que requirió de acuerdo a la citada referencia, tres jornadas de trabajo. La malla está compuesta por 1424 nodos (118 de ellos sobre la frontera) y 575 elementos (150 cuadriláteros y 421 triángulos).

La figura 14 presenta la malla generada "automáticamente" mediante el método de los árboles cuaternarios. La misma consta de 3291 elementos triangulares y 1732 nodos (180 sobre la frontera). La elaboración y el ingreso de datos requeridos por el programa requirió aproximadamente tres horas y la generación de la malla por programa requirió 25 s de tiempo de CPU en la citada computadora.

A modo de resumen de los estudios realizados de los distintos métodos, se ha preparado la Tabla I.



**Figura 10** - Arbol asociado a la descomposición en bloques mostrada en la figura 9.

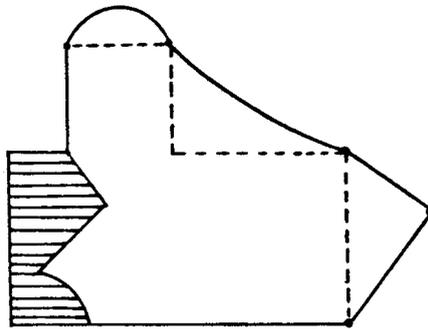


Figura 11 - Construcción de la región definitiva a partir de la mostrada en la figura 6, y generación de una subregión con contorno arbitrario.

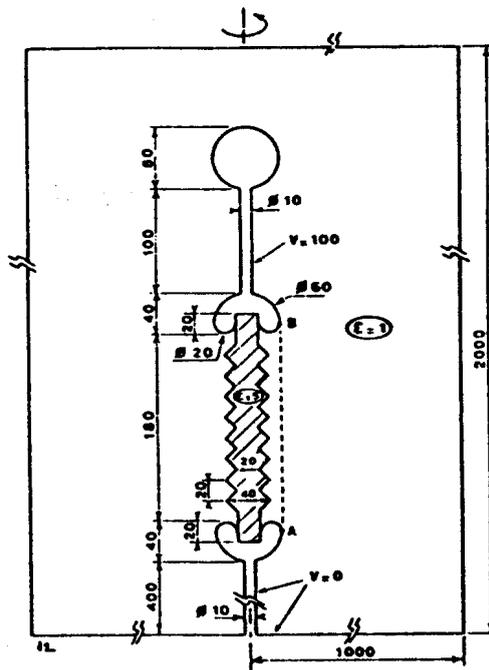


Figura 12 - Sistema de electrodos con simetría axial elegido para la comparación del método "de los árboles de cuadrantes" con el método manual de generación de la malla.

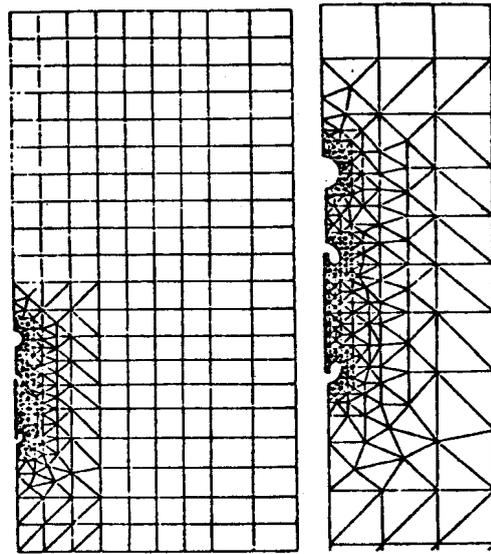


Figura 13 - Malla generada para el ejemplo de la figura 12 por ingreso manual.

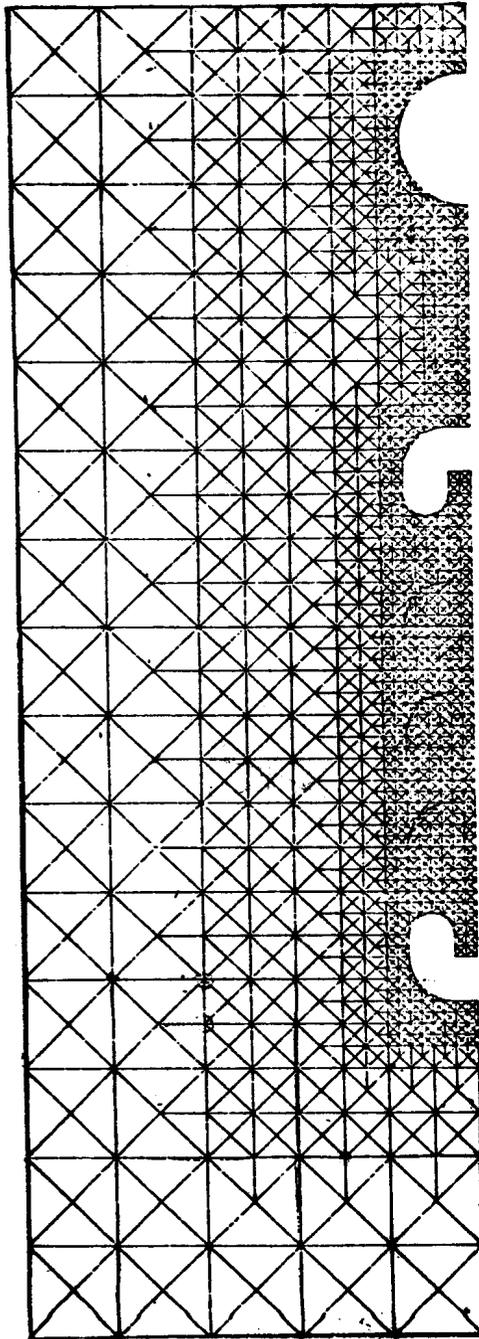


Figura 14

Malla generada para el ejemplo de la figura 12 por el método de los "árboles cuaternarios".

En la misma se muestran, genéricamente, las cantidades de operaciones necesarias para definir y construir una malla de  $n$  nodos y con  $c$  nodos de contorno.

Debe notarse que, en la columna donde se indican las operaciones necesarias para la preparación e ingreso de los datos, las mismas deben evaluarse en términos de operaciones humanas, cada una en el orden de los min. , mientras que el procesamiento deberá evaluarse en operaciones elementales cuya duración es del orden de los ms.

Orientativamente, puede considerarse como una operación elemental típica de preparación, realizada con intervención directa del usuario, la secuencia consistente en: asignación de un código de identificación de un nodo, especificación de sus coordenadas, e ingreso de los datos correspondientes al computador (tarjeta perforada, consola, etc.).

En forma similar, puede estimarse como una operación elemental típica de procesamiento de máquina, la consistente en identificar un nodo y calcular sus coordenadas por un procedimiento relativamente sencillo (ej: resolver un sistema algebraico de dos ecuaciones con dos incógnitas).

En el método "manual" el volumen de operaciones humanas es directamente proporcional al total de nodos de la malla a construir. Con respecto a los demás métodos, la etapa de preparación muestra que ésta depende básicamente del número de nodos del contorno  $c$  (o más exactamente, de la complejidad y exactitud con que se quiere representar el contorno), y del grado de discretización que se desee obtener en las regiones de mayor interés.

Es notorio que el método de los árboles cuaternarios requiere menor esfuerzo de preparación de datos, ya que sólo necesita la descripción de los contornos de dichas regiones.

Desde el punto de vista del procesamiento de máquina, nuevamente aparece el método de los árboles cuaternarios como el más eficiente. Puede observarse que el orden de magnitud del número de operaciones de máquina es una función lineal del número de nodos de los contornos de la región y sus subregiones.

METODO	Cantidad de operaciones elementales (órdenes de magnitud)	
	PREPARACION (operaciones/hombre)	PROCESAMIENTO (operaciones/máquina)
Manual	n	-----
Dibujo interactivo	c + n'	n <sup>2</sup>
Malla "elástica" deformable	c + n'	c.n
Arbol de cuadrantes	c + c'	c + c' + n

n : número total de nodos de la malla final.

c : número de nodos del contorno.

n' : número de nodos pertenecientes a subregiones que requieren tratamiento singular.

c' : número de nodos de los contornos de subregiones que contienen los n' nodos.

Tabla I - Comparación de órdenes de magnitud del número de operaciones elementales requeridas por distintos métodos para generar la malla de cálculo aplicable al M.E.F.

METODO	Cantidad de operaciones elementales (órdenes de magnitud)	
	PREPARACION (operaciones/hombre)	PROCESAMIENTO (operaciones/máquina)
Manual	2000	-----
Dibujo interactivo	700	4.10 <sup>6</sup>
Malla "elástica" deformable	700	4.10 <sup>5</sup>
Arbol de cuadrantes	250	2.10 <sup>3</sup>

Tabla II - Ejemplo de estimación de la eficiencia relativa de los distintos métodos de generación de la malla de discretización en un caso típico: n = 2000; c = 200; n' = 500; c' = 50.

En la Tabla II se presenta la cantidad de operaciones estimadas según el esquema de la Tabla I para un caso típico caracterizado por:

$$n = 2000 ; c = 200 ; n' = 500 ; c' = 50$$

Es evidente la mayor eficiencia del método de los árboles cuaternarios en el caso ejemplificado.

#### 4.4. Otras consideraciones

- \* Existen descripciones óptimas para cada malla en relación al problema ulterior del cálculo numérico (problema de la estructura nodal de la malla). Resulta entonces necesario estudiar dichas descripciones, a los efectos de poder aprovechar con el máximo de eficiencia la potencialidad del método de los árboles cuaternarios.
- \* Otro objetivo de estudio es la generalización del método de los árboles cuaternarios a dominios tridimensionales.
- \* La implementación del método sobre un equipo de cómputo con posibilidades gráficas aumentaría su potencia, en tanto facilitaría la descripción de los contornos, agujeros y subregiones al eliminar el uso de los códigos de 4 direcciones. En este sentido, la actual implementación prácticamente no requeriría cambio para adaptarse a tal equipamiento.

#### 5.- Conclusiones

- 5.1. Se han estudiado y experimentado tres métodos de generación de mallas para la descripción de regiones planas para la aplicación del M.E.F.:
  - (a) Por "deformación elástica" de una malla regular.
  - (b) En forma manual interactiva.
  - (c) Por el método de los "árboles cuaternarios".La experiencia recogida ha puesto en evidencia las múltiples ventajas que ofrece el método mencionado en último lugar.
- 5.2. Las ventajas más destacables del método de los árboles cuaternarios son:
  - (a) Los dominios a representar se describen tan sólo a partir de su contorno.

- (b) Su tiempo de ejecución es proporcional al producto del perímetro y el logaritmo del diámetro de las regiones representadas, por lo que resulta muy eficiente en comparación con los otros métodos.
  - (c) Obtiene automáticamente las características geométricas de los elementos en que se discretizan los dominios.
  - (d) Permite asignar fácilmente las propiedades de medio y las condiciones de contorno, como así también facilita el diseño de distintas subregiones con contornos y grado de discretización singulares.
- 5.3. Dos líneas ulteriores de este estudio para extender el "método de los árboles cuaternarios" son:
- (a) Generalización a dominios tridimensionales.
  - (b) Implementación del método sobre un equipo de cómputo con posibilidades gráficas.

#### 6.- Referencias bibliográficas

- Ref. 1 - "Un procedimento per la generazione automatica di reticoli triangolari piani per applicazione al metodo degli elementi finiti". L'Energia Elettrica, Vol. XLVIII, N° 7, 1971.
- Ref. 2 - "Region representation: quadrees from boundary codes". Hanan Samet (University of Maryland). Communications of the ACM. Marzo 1980, Vol. 23, N° 3.
- Ref. 3 - "Region representation: boundary codes from quadrees". Charles R. Dyes, Azriel Rosenfeld, Hanan Samet (University of Maryland). Communications of the ACM, Marzo 1980, Vol. 23, N° 3.
- Ref. 4 - "Connected component labeling using quadrees". Hanan Samet. Journal of the ACM. Junio 1981, Vol. 28, N° 3.
- Ref. 5 - "An effective way to represent quadrees". Irene Gargantini. Communications of the ACM. Diciembre 1982, Vol. 25, N° 12.

- Ref. 6 - "Representación de regiones planas por el método de los árboles cuaternarios". G. Baum, R. Rosenfeld, M. Sauval Benada. Informe Técnico IITREE, IT 296, La Plata, Marzo 1985.
- Ref. 7 - "Generalización del algoritmo de los árboles (de relaciones) cuaternarios para la representación de cualquier región plana". G. Baum, R. Rosenfeld, M. Sauval Benada. Informe Técnico IITREE, IT 297, La Plata, Marzo 1985.
- Ref. 8 - "Etude comparative de trois méthodes de calcul automatique du champ électrostatique". M.D.R. Beasley, H.H. Pickles (Central Electricity Generating Board - CEGB); G. Gallet, J.P. Gregoire, M. Morin (Electricité de France - EDF); G. D'Amico, L. Beretta, A.Di Mónaco, M. Fanelli, G. Giuseppetti (Ente Nazionale per l'Energia Elettrica - ENEL). "RGE", Vol. 88, n.1, 1979.