

PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS CURVAS

RAUL D. BERTERO, JORGE BIANCHI, ROBERTO S. CARNICER,
ALFREDO E. VILLAGGI

Empresa Nuclear Argentina de Centrales Electricas S.A.
Avda. Leandro N. Alem 712 -(1001) Capital Federal.

RESUMEN

Se desarrolla un programa de elementos finitos para el cálculo de placas curvas de forma cualquiera referidas a un sistema de coordenadas planas, aproximando la superficie con elementos triangulares planos. Se utiliza una formulación con incógnitas mixtas, siendo éstas los desplazamientos de los nodos y los momentos flexores de los lados. Las funciones de forma son lineales para los desplazamientos y constantes para los momentos flexores de cada elemento.

El desarrollo de la formulación se basa en el teorema variacional mixto de Reissner y se utiliza la notación tensorial a los fines de poder expresar las relaciones esfuerzos-deformaciones en las coordenadas oblicuas que se emplean para cada elemento.

1. INTRODUCCION

Durante el rápido desarrollo del método de los Elementos Finitos en la década del '60, el intento de aplicar la formulación convencional de desplazamientos a problemas de placas tropezó con un inconveniente: los requerimientos de continuidad exigidos por el teorema de la Mínima Energía Potencial Total (o su equivalente el

teorema de los Desplazamientos Virtuales).

Los elementos rectangulares o triangulares en los cuales se definen como incógnitas w , Q_x y Q_y solamente en los vértices, resultan no-conformes, ya que no es posible satisfacer los requerimientos de continuidad de la derivada primera en los bordes entre elementos, [1], [2].

Por otra parte los elementos compatibles obtenidos incrementando el número de grados de libertad del elemento por el agregado de nodos intermedios proporcionan aproximaciones tan mediocres que no justifican su utilización [1].

El reconocimiento de que el método de los Elementos Finitos consiste básicamente en la minimización de un funcional abrió el camino al desarrollo de otras formulaciones, los posteriormente llamados modelos híbridos y mixtos.

En la formulación con el mínimo de la Energía Potencial Total la única variable es el campo de desplazamientos del elemento.

Una fuente para formulaciones variacionales adicionales es considerar como variable el campo de tensiones en los bordes y el interior del elemento o combinaciones de tensiones y desplazamientos [6],[7].

Por otra parte, si las variables asumidas en la formulación no satisfacen los requerimientos de continuidad, se pueden introducir variables adicionales en la forma de multiplicadores de Lagrange, para minimizar las violaciones en las continuidades requeridas [5].

Los teoremas variacionales utilizados en general [3] son: el teorema de los Desplazamientos Virtuales, el teorema de las Tensiones Virtuales y el teorema Variacional Mixto de Hellinger-Reissner.

El teorema de los Desplazamientos Virtuales se utiliza como base para los modelos de Elementos Finitos que toman los desplazamientos como variables.

El teorema dual del anterior es el de las Tensiones Virtuales (o su equivalente el teorema de la Mínima Energía Complementaria), en el cual la variable es el campo de tensiones en lugar del campo de desplazamientos; su uso resulta en un modelo de Elementos Finitos de equilibrio basado en las tensiones.

Un teorema más general es el de Reissner [4], en el cual las variables primarias son el campo de tensiones y el de desplazamientos.

La aplicación de éste teorema, que lleva a un modelo mixto, resulta

de una discretización en Elementos Finitos cuyas variables son desplazamientos y tensiones nodales.

Las formulaciones híbridas en cambio, se obtienen, si además de un campo de variables de desplazamientos o tensiones, se introducen otras variables adicionales (tensiones o desplazamientos), cuyos parámetros son eliminados a nivel del elemento antes del ensamblaje global.

En este trabajo se desarrolla un modelo con incógnitas mixtas utilizando el teorema de Hellinger-Reissner, presentado en la manera de la referencia [3] que juzgamos más clara y ágil que en su forma clásica [8].

Para definir el tipo de elemento a utilizar se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

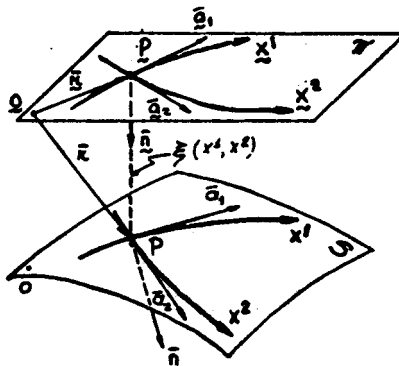
- a) La aproximación de la superficie de la cáscara por elementos planos, conduce a la utilización de elementos triangulares.
- b) Dado que la superficie se aproxima por elementos planos, no es conveniente la utilización de pocos elementos con funciones de interpolación complejas, ya que la cáscara es mejor aproximada por gran cantidad de elementos pequeños con funciones de interpolación simples, para la misma cantidad de incógnitas.
- c) Las funciones de interpolación de desplazamientos deben ser polinomios del mismo orden para los desplazamientos u y v en el plano del elemento y w en la dirección normal.

Si elegimos el elemento más simple posible, (el triángulo de deformación constante para el plano), los desplazamientos w lineales conducen a la necesidad de optar por una formulación mixta a los fines de tener elementos que no violen requisitos de continuidad.

Siguiendo los desarrollos de Herrmann de las referencias [9], [10] y [11], pero utilizando un sistema de referencia en coordenadas planas fueron obtenidas aproximaciones muy buenas que se resumen en las conclusiones de éste trabajo.

2. SISTEMA DE COORDENADAS PLANAS

Dado un sistema de coordenadas x^1 y x^2 definido sobre una superficie S , cuya coordenada x^3 coincide con la normal a la superficie \bar{n} , el sistema de coordenadas planas ($\underline{x}^1, \underline{x}^2$) es aquel que se obtiene de proyectar x^1 y x^2 sobre un plano \mathcal{T} , con \underline{x}^3 coincidente con la normal al plano \mathcal{T} : \bar{n} .



A un punto cualquiera P de la superficie S de coordenadas x^1 y x^2 , le corresponde en el sistema de coordenadas sobre el plano, un punto \underline{P} de las mismas coordenadas \underline{x}^1 y \underline{x}^2 . Siendo $\xi(x^1, x^2)$ la función que define la distancia entre los puntos P y \underline{P} , y \bar{r} y \underline{r} los vectores posición, respecto del origen de coordenadas planas \underline{o} , de los puntos P y \underline{P} ; la ecuación que relaciona a ambos vectores es:

$$\bar{r} = \bar{r} + \xi(x^1, x^2) \cdot \bar{n} \quad (2.1)$$

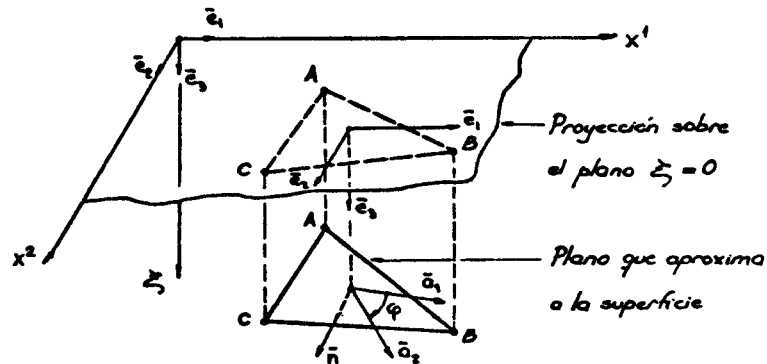
De donde surgen las ecuaciones de transformación de coordenadas siguientes:

$$\begin{cases} \underline{x}^1 = x^1 \\ \underline{x}^2 = x^2 \\ \underline{x}^3 = \xi(x^1, x^2) \end{cases} \quad (2.2)$$

Para el presente trabajo se adopta como sistema de coordenadas locales al sistema de coordenadas sobre la cáscara \bar{a}_1, \bar{a}_2 y \bar{n} , y como sistema de coordenadas globales al de coordenadas planas \bar{a}_1^r, \bar{a}_2^r , $\bar{a}_2 = \bar{e}_2$ y $\bar{n} = \bar{e}_3$.

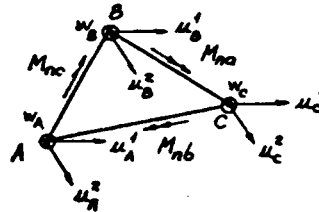
3. TIPO DE ELEMENTO, INCOGNITAS Y FUNCIONES DE FORMA ELEGIDAS

La superficie general de la cáscara en estudio, es aproximada mediante un conjunto de elementos triangulares planos.



Las incógnitas serán los momentos flexores en los lados del triángulo y los desplazamientos de sus vértices, que expresados en coordenadas locales corresponden al vector $\{M_n\}$ y al vector $\{\mu\}$, respectivamente.

$$\{\mu\} = \begin{Bmatrix} \mu_A^1 \\ \mu_A^2 \\ \mu_B^1 \\ \mu_B^2 \\ \mu_C^1 \\ \mu_C^2 \\ \mu_C^3 \\ \mu_C^4 \end{Bmatrix}, \quad \{M_n\} = \begin{Bmatrix} M_{na} \\ M_{nb} \\ M_{nc} \end{Bmatrix}$$



Análogamente a $\{u\}$ se define $\{\underline{u}\}$ en coordenadas globales

$$\{\underline{u}\} = \begin{Bmatrix} u_A^1 \\ u_A^2 \\ u_A^3 \\ u_B^1 \\ u_B^2 \\ u_B^3 \\ u_C^1 \\ u_C^2 \\ u_C^3 \end{Bmatrix}$$

Como funciones de forma, se adoptan funciones lineales de x^1 y x^2 para las componentes del vector desplazamiento $\{u\}$,

$$u^1 = a_1 + a_2 \cdot x^1 + a_3 \cdot x^2$$

$$u^2 = b_1 + b_2 \cdot x^1 + b_3 \cdot x^2$$

$$w = c_1 + c_2 \cdot x^1 + c_3 \cdot x^2$$

mientras que las componentes del vector $\{M_n\}$ son constantes a lo largo de los lados. Como consecuencia las componentes del tensor de momentos flexores $M^{\alpha\beta}$ son constantes en el interior del elemento, $M^{11} = \text{cte.}$, $M^{22} = \text{cte.}$ y $M^{12} = \text{cte.}$,

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M^{11} \\ M^{22} \\ M^{12} \end{Bmatrix}$$

4. PLANTEO DE LAS ECUACIONES DE LA ENERGIA DE DEFORMACION EN TERMINOS DE LAS SOLICITACIONES Y DESPLAZAMIENTOS INCOGNITAS (M_n , u_i)

Para ello previamente discriminaremos entre las energías de deformación asociadas a las sollicitaciones membranales, y a las sollicitaciones de flexión. La energía de deformación membranar está compuesta por las componentes del tensor de sollicitaciones membranales $N^{\alpha\beta}$ y las del tensor de deformaciones membranales asociado $\gamma_{\alpha\beta}$.

$$\frac{1}{2} \int_A N^{\alpha\beta} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \cdot dA \quad , \quad dA = \text{d'área} \quad (4.1)$$

La energía de deformación flexional depende de las componentes del vector $\{M_n\}$ (momentos flexores en cada lado) y de los giros de los lados ψ_n asociados, del elemento.

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 l_j \cdot M_{nj} \cdot \psi_{nj} \quad l_j = \text{longitud del lado del elemento}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_A N^{qp} \cdot \chi_{qp} \cdot dA - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 l_n \cdot M_n \cdot \psi_n \quad (4.2)$$

4.1.-PARTE MEMBRANAL

A partir de las funciones de forma de los desplazamientos u_α :

$$u_1 = a_0 + a_1 \cdot x' + a_2 \cdot x'^2 \quad (4.3)$$

$$u_2 = b_0 + b_1 \cdot x' + b_2 \cdot x'^2$$

que expresada matricialmente es:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x' & x'^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x' & x'^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

se obtienen las componentes del tensor de deformaciones membranales χ_{qp} :

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= u_{1,1} = a_1 \\ \chi_{22} &= u_{2,2} = b_2 \\ 2\chi_{12} &= u_{1,2} + u_{2,1} = b_1 + a_2 \end{aligned} \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2\chi_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

expresados en términos de los coeficientes de las funciones de forma, de manera que:

$$\{\chi\} = [C] \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Definiendo como vector $\{\mu_n\}$ a las componentes u_α del vector de desplazamientos nodales, y aplicando las ecuaciones en cada nodo, la relación entre coeficientes y desplazamientos de los nodos de cada

elemento es:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = [D] \cdot \begin{Bmatrix} u_{1A} \\ u_{1B} \\ u_{1C} \\ u_{2A} \\ u_{2B} \\ u_{2C} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{u_n\}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [A]^{-1} [0] \\ [0] [A]^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_A^1 & x_A^2 \\ 1 & x_B^1 & x_B^2 \\ 1 & x_C^1 & x_C^2 \end{bmatrix}$$

el vector $\{\gamma\}$ se puede expresar como,

$$\{\gamma\} = [C] \cdot [B] \cdot \{u_n\} \quad (4.8)$$

y llamando $[D]$ a la matriz que permite obtener los desplazamientos de los nodos de coordenadas globales en locales, (ver Apéndice I):

$$\{u_n\} = [D] \cdot \{u\}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_{,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_{,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_{,1} \\ 0 & 1 & \xi_{,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_{,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_{,2} \end{bmatrix}$$

$$\{\gamma\} = [C] \cdot [B] \cdot [D] \cdot \{u\} \quad (4.9)$$

La relación entre tensiones y deformaciones para un material isotropo elástico lineal es:

$$[N] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} (a^m)^2 \nu a^n a^{zz} + (1-\nu) (a^{zz})^2 & 0^n \cdot a^{zz} \\ (a^{zz})^2 & a^{zz} \cdot a^n \\ \sin & \frac{(1+\nu)}{2} (a^m)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} a^n a^{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{zz} \\ 2\gamma_{nz} \end{Bmatrix}$$

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N^{11} \\ N^{22} \\ N^{12} \end{Bmatrix} = [E] \cdot \{\gamma\} \quad (4.10)$$

donde E es el módulo de elasticidad, ν el coeficiente de Poisson, h el espesor de cada elemento y $a^H, a^V, a^{H'}$ y $a^{V'}$ las componentes del tensor métrico contravariante para el sistema de coordenadas sobre la cáscara. De manera que la expresión de la energía de deformación de la parte membranal es, siendo A = área del elemento:

$$\frac{1}{2} \int_A N^T \cdot \gamma_{\alpha\beta} \cdot dA = \frac{1}{2} \int_A \{\gamma\}^T \cdot \{N\} \cdot dA = \frac{1}{2} \int_A \{\gamma\}^T \cdot [E] \cdot \{\gamma\} \cdot dA = (4.11)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{\underline{u}\}_A^T \cdot \underbrace{[D]^T \cdot [B]^T \cdot [C]^T \cdot [E] \cdot [C] \cdot [B] \cdot [D]}_{[K]} \cdot \{\underline{u}\} = \frac{1}{2} \cdot \{\underline{u}\}^T \cdot [K] \cdot \{\underline{u}\}$$

ya que $\{\gamma\}$ y $[E]$ son constantes en el elemento.

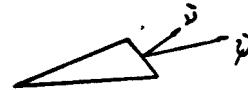
4.2.-PARTE FLEXIONAL

La función de forma del desplazamiento w normal al elemento es,

$$w = c_0 + c_1 \cdot x' + c_2 \cdot x'^2 \quad (4.12)$$

Siendo $\gamma_{\alpha} = -w_{,\alpha}$ las componentes del vector rotación, el giro del elemento en la dirección del lado cuya normal saliente es \bar{v} , es:

$$\gamma_n = \gamma_{\alpha} \cdot \gamma^{\alpha} = -w_{,\alpha} \cdot \gamma^{\alpha} \quad (4.13)$$



Las componentes de γ_n en cada lado $\gamma_{na}, \gamma_{nb}, \gamma_{nc}$ se pueden expresar a partir de las funciones de forma, siendo $\gamma_a^{\alpha}, \gamma_b^{\alpha}, \gamma_c^{\alpha}$ las componentes de los vectores $\bar{v}_a, \bar{v}_b, \bar{v}_c$ normales a los lados a, b, c respectivamente.

$$\{\gamma_n\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{na} \\ \gamma_{nb} \\ \gamma_{nc} \end{Bmatrix} = -[\hat{B}] \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}, \quad [\hat{B}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_a^1 & \gamma_a^2 \\ 0 & \gamma_b^1 & \gamma_b^2 \\ 0 & \gamma_c^1 & \gamma_c^2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Teniendo presente la función de forma, la relación entre coeficientes y desplazamientos w de los nodos de cada elemento es:

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

de manera que el vector $\{\psi_n\}$, se expresa como

$$\{\psi_n\} = -[\hat{B}].[A]^{-1}.\{w\} \quad (4.16)$$

y pasando de coordenadas locales a globales, mediante la matriz de transformación $[\hat{D}]$, (ver Apéndice I)

$$\{\psi_n\} = -[\hat{B}].[A]^{-1}[\hat{D}].\{u\} \quad (4.17)$$

$$[\hat{D}] = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} -\xi_{11} - \xi_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_{21} - \xi_{22} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi_{11} - \xi_{12} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

De manera que la expresión de la energía de deformación de la parte flexional es,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 l_j \cdot M_{nj} \cdot \psi_{nj} &= -\frac{1}{2} \cdot \{M_n\}^T \cdot \begin{bmatrix} l_a & 0 & 0 \\ 0 & l_b & 0 \\ 0 & 0 & l_c \end{bmatrix} \cdot \{\psi_n\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{M_n\}^T \cdot \underbrace{[E].[\hat{B}].[A]^{-1}[\hat{D}]}_{[R]} \cdot \{u\} = \frac{1}{2} \cdot \{M_n\}^T \cdot [R] \cdot \{u\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por lo tanto la energía total:

$$U(M_n, u) = \frac{1}{2} \cdot \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\} + \frac{1}{2} \cdot \{M_n\}^T \cdot [R] \cdot \{u\} \quad (4.20)$$

5. PLANTEO DE LAS ECUACIONES DE LA ENERGÍA DE DEFORMACION COMPLEMENTARIA EN TERMINOS DE LAS SOLICITACIONES INCOGNITAS M_n .

También aquí discriminaremos la energía complementaria asociada a las solicitaciones membranales,

$$U_c(N^{cp}) = \frac{1}{2} \cdot \int_A N^{cp} \cdot \chi_{cp} \cdot dA = \frac{1}{2} \cdot \{N\}^T \cdot [E]^{-1} \cdot \{N\} \cdot A \quad (5.1)$$

de la energía complementaria asociada a las solicitaciones de flexión,

$$U_c(M_n) = \frac{1}{2} \cdot \int_A M_n^{cp} \cdot \chi_{cp} \cdot dA \quad (5.2)$$

donde χ_{cp} son las curvaturas en el elemento. Estas pueden ser ex-

presadas en función de las sollicitaciones de flexión M^{ab} , a partir de las relaciones entre tensiones y deformaciones, como,

$$\begin{Bmatrix} \chi_{yy} \\ \chi_{zz} \\ 2\chi_{yz} \end{Bmatrix} = [S] \cdot \begin{Bmatrix} M^{yy} \\ M^{zz} \\ M^{yz} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

siendo

$$[S] = \frac{12}{Eh^3} \cdot \begin{bmatrix} (a_y)^2 & -\gamma a_y a_{zz} + (1+\gamma)(a_{zz})^2 & 2a_y a_{yz} \\ -\gamma a_y a_{zz} + (1+\gamma)(a_{zz})^2 & (a_{zz})^2 & 2a_{zz} a_{yz} \\ 2a_y a_{yz} & 2a_{zz} a_{yz} & 2[(1+\gamma)a_y a_{zz} + (1-\gamma)(a_{zz})^2] \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Siendo constantes en el elemento las componentes de $\{M\}$ y de $[S]$ también lo son las de la $\{\chi\}$, por lo tanto reemplazando en la ecuación (5.2) e integrando:

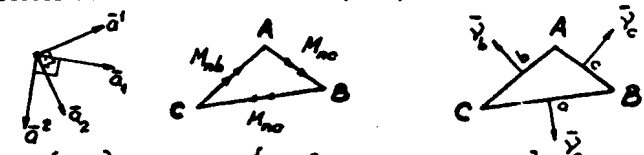
$$U_c(M_n) = \frac{A}{2} \cdot \{M\}^T \cdot \{\chi\} = \frac{A}{2} \cdot \{M\}^T \cdot [S] \cdot \{M\} \quad (5.5)$$

Las relaciones entre los momentos flexores en los lados y las componentes del tensor de flexión en el elemento, son:

$$M_n = M^{ab} \cdot \gamma'_a \cdot \gamma'_b \quad (5.6)$$

donde γ'_a , son las componentes covariantes del vector normal al lado considerado. En este caso particular, tenemos $\{\bar{\gamma}'_a\}, \{\bar{\gamma}'_b\}$ y $\{\bar{\gamma}'_c\}$, vectores normales a los lados a , b y c .

entonces



$$\begin{Bmatrix} M_{no} \\ M_{nb} \\ M_{nc} \end{Bmatrix} = [V] \cdot \begin{Bmatrix} M^{yy} \\ M^{zz} \\ M^{yz} \end{Bmatrix}, \quad [V] = \begin{bmatrix} (\gamma'_{na})^2 & (\gamma'_{na})^2 & 2\gamma'_{na} \cdot \gamma'_{na} \\ (\gamma'_{nb})^2 & (\gamma'_{nb})^2 & 2\gamma'_{nb} \cdot \gamma'_{nb} \\ (\gamma'_{nc})^2 & (\gamma'_{nc})^2 & 2\gamma'_{nc} \cdot \gamma'_{nc} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\{M\} = [V]^{-1} \cdot \{M_n\} \quad (5.8)$$

Expresando la energía complementaria flexional en función de las incógnitas, es decir los momentos flexores en los lados, mediante las ecuaciones (5.5/5.8), es:

$$U_0(M_n) = \frac{1}{2} \cdot \int_A M_{\alpha\beta}^0 \cdot \chi_{\alpha\beta} \cdot dA = \frac{A}{2} \cdot \{M\}^T \cdot \{x\} = \frac{A}{2} \cdot \{M\}^T \cdot [S] \cdot \{M\}$$

$$U_c(M_n) = \frac{1}{2} \cdot \{M_n\}^T \cdot \underbrace{A \cdot ([V]^{-1})^T \cdot [S] \cdot [V]^{-1}}_{[H]} \cdot \{M_n\}$$

$$U_c(M_n) = \frac{1}{2} \cdot \{M_n\}^T \cdot [H] \cdot \{M_n\}$$

y la energía complementaria total,

$$U_c(M_n) = \frac{A}{2} \cdot \{N\}^T \cdot [E]^{-1} \cdot \{N\} + \frac{1}{2} \cdot \{M_n\}^T \cdot [H] \cdot \{M_n\} \quad (5.9)$$

6. APLICACION DEL TEOREMA VARIACIONAL MIXTO O PRINCIPIO DE REISSNER

El teorema establece el cumplimiento de las siguientes igualdades,

$$\delta_{\underline{u}} U(\underline{u}, M_n) = \delta_{\underline{u}} W(P, \underline{u}) \quad (6.1)$$

$$\delta_{M_n} U_c(\underline{u}, M_n) = \delta_{M_n} U_c(M_n) \quad (6.2)$$

Si expresamos las energías y los trabajos en forma matricial, de acuerdo a las ecuaciones obtenidas anteriormente (4.20/5.9) se tiene:

ENERGIA DE DEFORMACION EN TERMINOS DE $\{M_n\}$ Y $\{\underline{u}\}$:

$$U(\underline{u}, M_n) = \frac{1}{2} \cdot \{\underline{u}\}^T \cdot [K] \cdot \{\underline{u}\} + \frac{1}{2} \cdot \{M_n\}^T \cdot [R] \cdot \{\underline{u}\} \quad (4.20)$$

ENERGIA DE DEFORMACION COMPLEMENTARIA EN TERMINOS DE $\{M_n\}$:

$$U_c(M_n) = \frac{A}{2} \cdot \{N\}^T \cdot [E]^{-1} \cdot \{N\} + \frac{1}{2} \cdot \{M_n\}^T \cdot [H] \cdot \{M_n\} \quad (5.9)$$

TRABAJO DE LAS FUERZAS EXTERIORES EN TERMINOS DE $\{P\}$ Y $\{\underline{u}\}$:

$$W(P, \underline{u}) = \frac{1}{2} \cdot \{P\}^T \cdot \{\underline{u}\} \quad (6.3)$$

ENERGIA DE DEFORMACION COMPLEMENTARIA EN TERMINOS DE $\{M_n\}$ Y $\{\underline{u}\}$:

$$U_c(\underline{u}, M_n) = U_c(M_n) \quad (6.4)$$

cuyas variaciones resultan

$$\delta_{\underline{u}} \mathcal{U}(\underline{u}, M_n) = \delta \{\underline{u}\}^T \cdot [K] \cdot \{\underline{u}\} + \delta \{\underline{u}\}^T \cdot [R]^T \cdot \{M_n\} \quad (6.5)$$

$$\delta_{\underline{u}} W(P, \underline{u}) = \delta \{\underline{u}\}^T \cdot \{P\} \quad (6.6)$$

$$\delta_{M_n} \mathcal{U}_c(M_n) = \delta \{M_n\}^T \cdot [H] \cdot \{M_n\} \quad (6.7)$$

$$\delta_{M_n} \mathcal{U}_c(\underline{u}, M_n) = \delta \{M_n\}^T \cdot [R] \cdot \{\underline{u}\} \quad (6.8)$$

De acuerdo al Teorema de Reissner,

$$[K] \cdot \{\underline{u}\} + [R]^T \cdot \{M_n\} = \{P\} \quad (6.9)$$

$$[R] \cdot \{\underline{u}\} - [H] \cdot \{M_n\} = \{0\} \quad (6.10)$$

se obtiene un sistema de ecuaciones para cada elemento, expresado en coordenadas globales,

$$\begin{bmatrix} [K] & [R]^T \\ [R] & -[H] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\underline{u}\} \\ \{M_n\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

Ensamblando finalmente para todos los elementos se obtiene el sistema de ecuaciones final, cuya resolución proporciona:

- a) desplazamientos $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ y \underline{w} de todos los nodos según coordenadas globales, y
- b) momentos flexores M_n según los lados de los elementos.

7. CALCULO DE LAS SOLICITACIONES

7.1.-SOLICITACIONES MEMBRANALES

De las ecuaciones (4.9) y (4.10), resultan las componentes tensoriales de las sollicitaciones membranales, a partir de las incógnitas.

$$\{N\} = [E] \cdot [C] \cdot [B] \cdot [D] \cdot \{\underline{u}\} \quad (7.1)$$

Para obtener las componentes físicas (que indicaremos con $\{\Delta\}$), se recurre a la siguiente expresión:

se recurre a la siguiente expresión:

$$\hat{N}^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} \cdot \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a^{nn}}} \quad (\alpha, \beta = e/s) \quad (7.2)$$

de manera tal que:

$$\begin{Bmatrix} \hat{N}^n \\ \hat{N}^{22} \\ \hat{N}^{12} \end{Bmatrix} = \sqrt{a} \cdot \begin{Bmatrix} N^n \cdot \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} \\ N^{22} \cdot \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \\ N^{12} \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

7.2.-SOLICITACIONES DE FLEXION

De la ecuación (5.8) resultan las componentes tensoriales de las solicitaciones de flexión a partir de las incógnitas.

$$\{M\} = [v]^{-1} \cdot \{M_n\} \quad (7.4)$$

Para obtener las componentes físicas se recurre a la siguiente expresión:

$$\hat{M}^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} \cdot \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a^{nn}}} \quad (\alpha, \beta = e/s) \quad (7.5)$$

de manera tal que:

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}^n \\ \hat{M}^{22} \\ \hat{M}^{12} \end{Bmatrix} = \sqrt{a} \cdot \begin{Bmatrix} M^{11} \cdot \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} \\ M^{22} \cdot \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \\ M^{12} \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

7.3.-SOLICITACIONES EN UN PUNTO CUALQUIERA

De las funciones de forma utilizadas en el desarrollo se obtienen solicitaciones $\hat{N}^{\alpha\beta}$, $\hat{M}^{\alpha\beta}$ constantes en el elemento, que son las aproximaciones de las solicitaciones, en el centro de gravedad del elemento triangular, obtenidas mediante elementos finitos. Para obtener las solicitaciones en un punto cualquiera $P[x^1, x^2, \bar{\eta}(x^1, x^2)]$ se ajustan las funciones solicitación con polinomios de segundo grado por el método de los cuadrados mínimos.

8. IMPLEMENTACION

Los pasos de implementación del programa son similares a los de los programas de E.F. con incógnitas geométricas, con la excepción de la necesidad de la identificación de los lados, puesto que los momentos flexores en los mismos son incógnitas del problema.

Los pasos seguidos son:

1. -Entrada de Datos

- 1.1) Información Geométrica
- 1.2) Condiciones de Borde
- 1.3) Propiedades físicas de los elementos
- 1.4) Acciones

2. -Proceso de Cálculo

- 2.1) Ensamble de la matriz de coeficientes
- 2.2) Obtención de las incógnitas mediante la resolución del sistema de ecuaciones
- 2.3) Cálculo de las componentes físicas de los tensores de sollicitaciones membranales y de flexión
- 2.4) Cálculo de las sollicitaciones en un punto cualquiera

9. EJEMPLOS

9.1.-VIGA DE GRAN ALTURA

Dada una viga de gran altura, de iguales dimensiones en alto y largo, sollicitada por una carga uniforme en su borde superior (fig. 1); se procedió al cálculo de sus sollicitaciones y desplazamientos (fig. 2), mediante este programa. Se comparó la sollicitación N_x en el centro de la viga y a lo largo de su altura con la solución teórica obtenida mediante series (fig. 3).

9.2.-PLACA PLANA EMPOTRADA

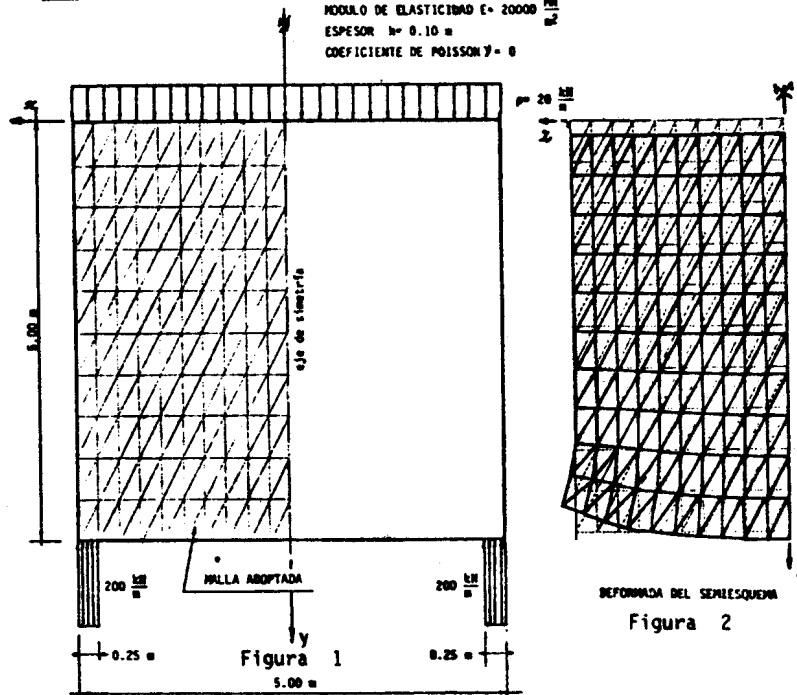
Dada una placa plana cuadrada empotrada en todos sus bordes, sollicitada por una carga uniformemente distribuida (fig. 4), se procedió al cálculo de sus sollicitaciones y desplazamientos (fig. 5) mediante este programa.

Se compararon los desplazamientos w , y las sollicitaciones M_x y M_y a lo largo del eje de simetría con la solución teórica obtenida mediante series dobles de Fourier (fig. 6).

EJEMPLO N° 1: VIGA DE GRAN ALTURA

DATOS

MODULO DE ELASTICIDAD $E = 20000 \frac{MN}{m^2}$
 ESPESOR $h = 0.10 \text{ m}$
 COEFICIENTE DE POISSON $\nu = 0$



COMPARACION EN VIGA PARED BAJO CARGA UNIFORME

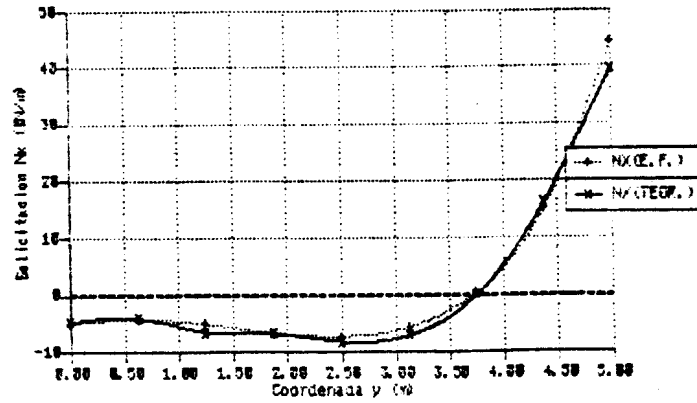


Figura 3

EJEMPLO Nº 2: LOSA CUADRADA EMPOTRADA EN TODOS SUS BORDES

DATOS

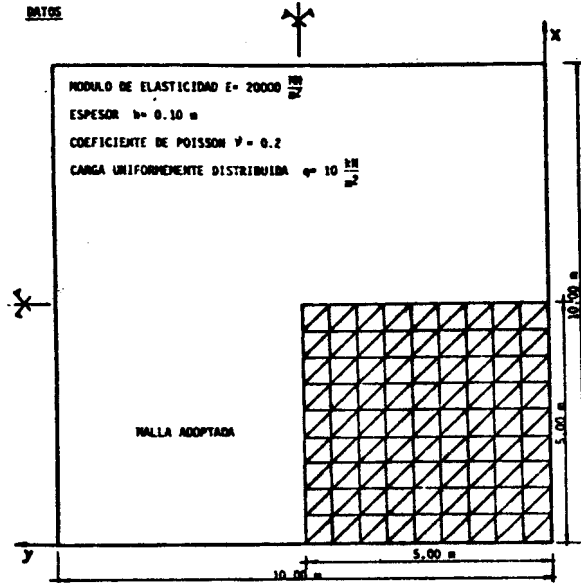


Figura 4

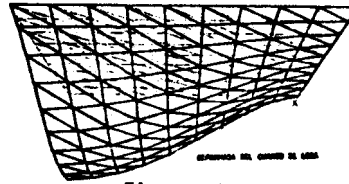
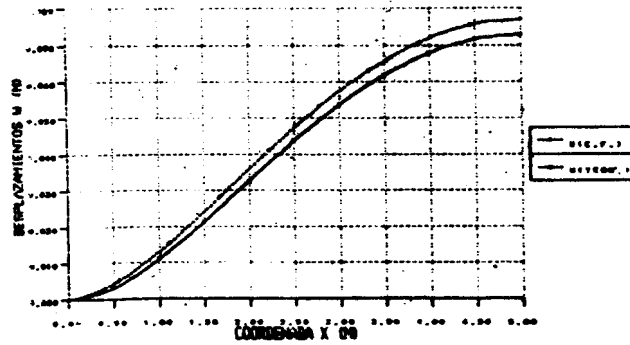
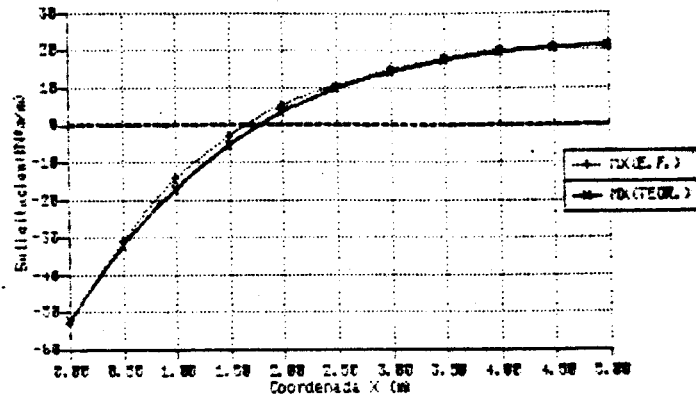


Figura 5

DESPLAZAMIENTOS DE LA PLACA CUADRADA EMPOTRADA



COMPARACION EN PLACA CUADRADA-EMPOTRADA BAJO CARGA UNIFORME



COMPARACION DE PLACA CUADRADA-EMPOTRADA BAJO CARGA UNIFORME

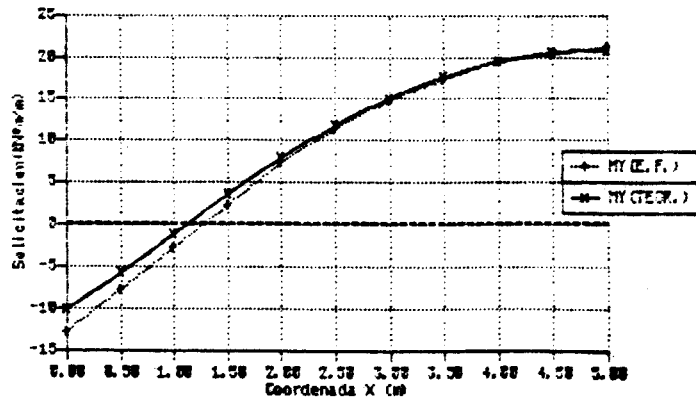


Figura 6

9.3.-CASCARA CILINDRICA ABIERTA

Se procedió al cálculo de solicitaciones y desplazamientos (fig. 7) de una cáscara cilíndrica abierta solicitada por su peso propio más el peso de un recubrimiento. Se compararon N_y y M_x en el centro de la cáscara a lo largo del arco con la solución aproximada (fig. 8).

10. CONCLUSIONES

La elección del sistema de coordenadas plano, cartesiano ortogonal, facilita la entrada de datos. Con un programa de generación automática de mallas en el plano, por ejemplo el "REDEF", y conociendo la función de la superficie, rápidamente se establecen las coordenadas de los nodos y sus conectividades.

Las funciones de forma adoptadas (lineales para los desplazamientos, y constantes para los momentos flexores), permiten obtener en el planteo de la energía, ecuaciones independientes de las coordenadas x^1 , x^2 , dentro de cada elemento, no siendo necesario una integración numérica.

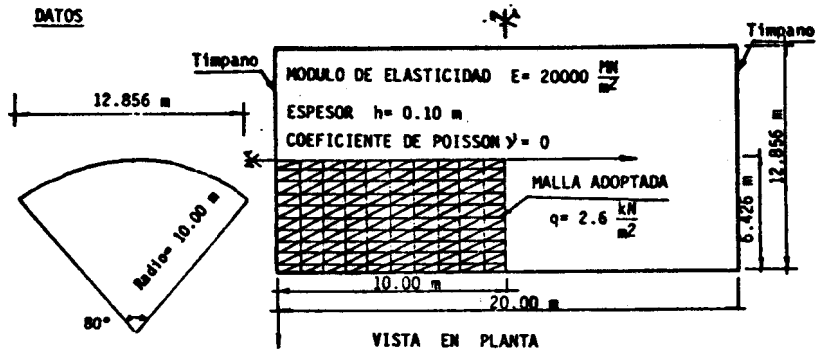
Como consecuencia de haber elegido entre las incógnitas a los momentos flexores en los lados, se obtiene una mejor aproximación de las flexiones, frente a los resultados que se hubieran obtenido en un programa de similares características, con sólo incógnitas geométricas.

La elección de las incógnitas, desplazamientos de los nodos, momentos flexores en los lados, permite expresar con sencillez las condiciones de borde del problema.

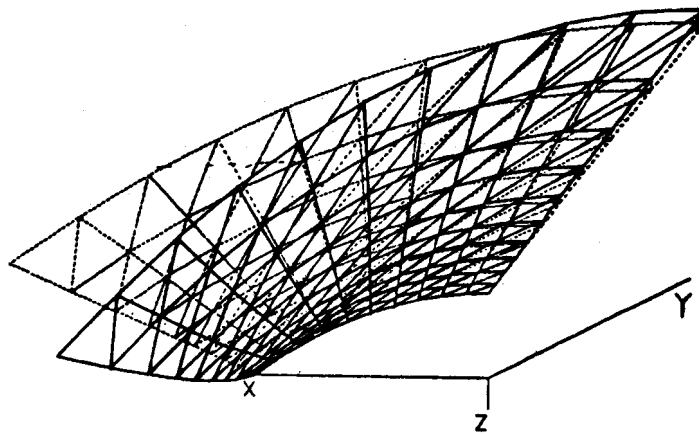
La formulación mixta de las incógnitas, facilita la combinación de elementos bidimensionales con elementos lineales, (por ejemplo paraboloide hiperbólico con viga de borde, cáscara cilíndrica abierta con vigas de borde, etc.), desarrollo que actualmente se halla en etapa de implementación.

EJEMPLO Nº 3: CASCARA CILINDRICA ABIERTA

DATOS



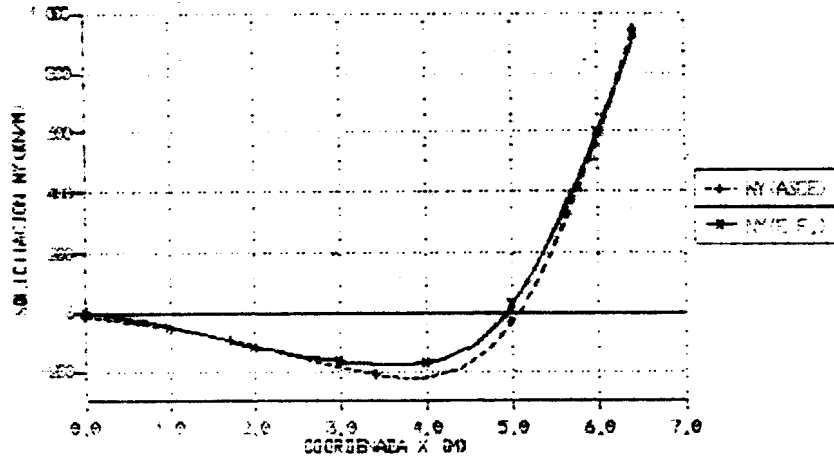
CORTE TRANSVERSAL



DEFORMADA DE LA MALLA ADOPTADA

Figura 7

SOLICITACION M_x EN EL CENTRO DE LA CASCA



SOLICITACION M_y EN EL CENTRO DE LA CASCA

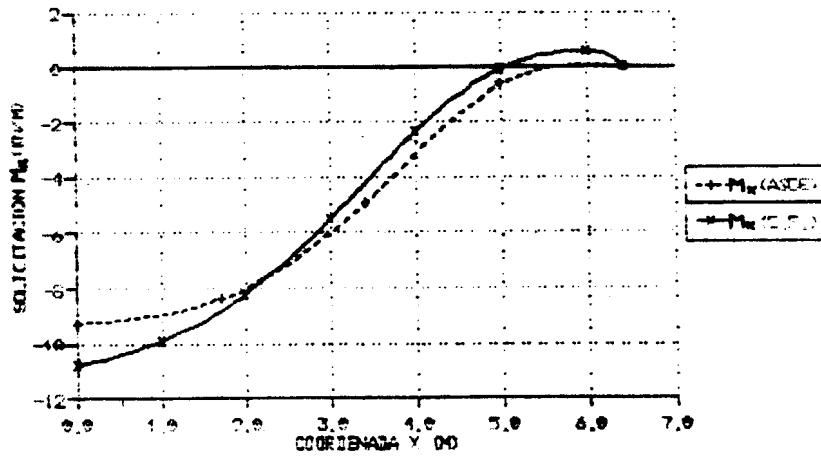


Figura 8

11. AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestro agradecimiento al Ing. Alberto Puppo, quien nos introdujo en el tema y orientó en el desarrollo teórico, al Lic. Gustavo Sanchez Sarmiento por su colaboración en la presentación de éste trabajo, y al Ing. Leon Simone por su ayuda en la implementación del programa.

12. BIBLIOGRAFIA

- [1] El Método de los Elementos Finitos - O.C.Zienkiewicz
Editorial: Reverte(1980)
- [2] Numerical Methods in Finite Element Analysis - Bathe-Wilson
- [3] Los Teoremas de la Energía en la Mecánica del Sólido -
Alberto H. Puppo - Anales de la Sociedad Científica Argentina
T.CXCIV Entrega V-VI (1972).
- [4] On a Variational Theorem in Elasticity - E. Reissner.
- [5] Generalized Variational Principles in the Finite Element
Method - B.E.Green, R.E.Jones, R.W.Meloy, D.R.Strome.
AIAA Journal VOL.7 - Nº 7
- [6] Strain-Energy Bounds in Finite Element Analysis by Slab
Analogy - B.Fraeijs de Veubeke-O.C.Zienkiewicz
Journal of Strain Analysis VOL.2 Nº 4 (1967)
- [7] Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis -Eduardo
Anderheggen.
Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE August,
(1969).
- [8] Foundations of Solid Mechanics - Y.C.Fung
Editorial: Prentice Hall (1968)
- [9] Finite Element Bending Analysis for Plates - Leonard
Herrmann.
Journal of the Engineering Mechanics División ASCE.
- [10] A Finite Element Analysis for Thin Shells - Herrmann-Campbell
AIAA Journal VOL.6 Nº 10
- [11] A Bending Analysis for Plates - L.R. Herrmann - Proceedings
of the Conference held at Wright Patterson Air Force Base
Ohio 26/28 October 1965

APENDICE I

RELACIONES ENTRE LAS COMPONENTES GLOBALES Y LOCALES DE LAS INCOGNITAS

-Incógnitas Cinemáticas: Desplazamientos de los nodos

Siendo el vector desplazamiento en coordenadas globales:

$$\bar{u} = \bar{u}_\alpha \cdot \bar{e}^\alpha + w \cdot \bar{e}^3$$

y su expresión en coordenadas locales:

$$\bar{u} = u_\alpha \cdot \bar{o}^\alpha + w \cdot \bar{n}$$

las ecuaciones que resultan para vincular a las componentes del vector \bar{u} entre ambos sistemas son:

$$u_\alpha = \bar{u}_\alpha + \bar{x}_{,\alpha} \cdot w$$
$$w = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot (-\bar{x}_{,\alpha} \cdot \bar{u}_\alpha + w)$$

con $\sqrt{a} = \sqrt{a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2}$ y $a_{\alpha\beta} = \bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_\beta$

Donde a es el determinante de la matriz del tensor métrico y $a_{\alpha\beta}$ son sus componentes a partir de los vectores base covariantes.

-Incógnitas Estáticas: Momentos flexores en los lados

Siendo éstos magnitudes escalares, son invariantes frente a transformaciones de coordenadas.