

**UN MÉTODO DE CONTORNO PARA ESTUDIAR LA PROPAGACIÓN  
DE ONDAS EN MEDIOS CON ESTRATIGRAFÍA IRREGULAR**

**Francisco J. Sánchez-Sesna**

Instituto de Ingeniería, UNAM  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Cd. Universitaria, Apdo. 70-472  
Coyoacán 04510, México, D.F. - MÉXICO

**RESUMEN**

Se presenta un método de contorno para el cálculo de funciones de transferencia en depósitos estratificados bidimensionales de forma arbitraria en la superficie de un semiespacio elástico ante incidencia de ondas elásticas. El método considera una familia completa de soluciones para la región estratificada usando una representación en términos de números de ondas horizontales discretos. Para el exterior la solución de los campos difractados se construye con funciones de Green. Las condiciones de frontera se satisfacen con un criterio de error cuadrático mínimo. Se comparan resultados de desplazamientos superficiales con los obtenidos con el método de elementos finitos para un depósito semicircular en el que el módulo de elasticidad en cortante varía linealmente con la profundidad. El acuerdo es excelente.

**ABSTRACT**

Boundary method for computation of transfer functions of two-dimensional layered deposits of arbitrary shape on the surface of a half-space is presented. The method consists of forming a complete family of solutions for the stratified region. For the exterior one, solutions are constructed with Green's functions. Boundary conditions are satisfied in the least-square error sense. Results are compared with those of the finite element method for a semi-circular deposit with linear variation of shear modulus with depth. The agreement is excellent.

## INTRODUCCIÓN

Las amplitudes y formas de las ondas sísmicas generadas en un temblor dependen del mecanismo focal y de la cantidad de energía liberada en la zona de ruptura. El mecanismo focal controla la manera en que las ondas son irradiadas en el espacio y en el tiempo. No obstante, las ondas sísmicas una vez emitidas por la fuente sufren modificaciones en su trayecto que dependen de las propiedades mecánicas de los medios en que se propagan y de las dimensiones de las inhomogeneidades o irregularidades con que se encuentran. Si los cambios de las propiedades en una interfase son grandes o si el tamaño de las irregularidades es comparable o mayor que la longitud de onda predominante de las ondas incidentes se generarán cambios significativos en el movimiento debidos a reflexión, refracción y difracción de las ondas.

Interesa entender la naturaleza de esos cambios porque pueden ocasionar grandes amplificaciones locales y variaciones significativas del movimiento del terreno en distancias relativamente pequeñas. Este efecto es de particular importancia en la respuesta sísmica de estructuras grandes como presas, puentes o líneas de transmisión. Se trata de estructuras en las que los movimientos diferentes en los apoyos pueden ser muy peligrosos. Existe evidencia del papel que juegan los efectos de las condiciones locales en estudios de la distribución espacial del daño en temblores. Si bien el daño depende de la calidad de las construcciones, en muchos casos los daños severos están asociados a fenómenos de amplificación. En muchos casos se han utilizado con éxito modelos de propagación unidimensionales de ondas de cortante cuando la configuración del sitio en estudio esta formada por estratos aproximadamente horizontales. Debe notarse, sin embargo, que el uso indiscriminado de modelos unidimensionales puede dar lugar a errores de importancia cuando las irregularidades locales son significativas pues no se toma en cuenta la naturaleza física del problema.

En este escrito se describen las bases de un nuevo método para calcular la función de transferencia en depósitos estratificados de forma arbitraria en la superficie de un semiespacio elástico. La descripción será breve y está basada en el trabajo de Bravo *et al* [2]. Se trata de una extensión del método de Haskell (ver p Ej. Aki y Richards, [3]) en la que se forman soluciones para diferentes números de ondas horizontales, es decir, se forma una familia completa de soluciones para la parte estratificada. Las soluciones para el exterior se construyen mediante el uso de fuentes y las condiciones de contorno se satisfacen de manera que el error cuadrático asociado sea mínimo (ver p Ej. refs [4], [5] y [6]).

Se dan algunos ejemplos y se discuten las ventajas y limitaciones del método así como sus aplicaciones y posibles extensiones.

## FORMULACIÓN DEL PROBLEMA Y SOLUCIÓN

Considérese el depósito elástico estratificado  $R$  que se muestra en la Fig. 1. La frontera de contacto  $\partial R$  con el semies

pacio  $E$  es de forma arbitraria. Supóngase incidencia de ondas de cortante polarizadas horizontalmente (ondas SH). En cada me

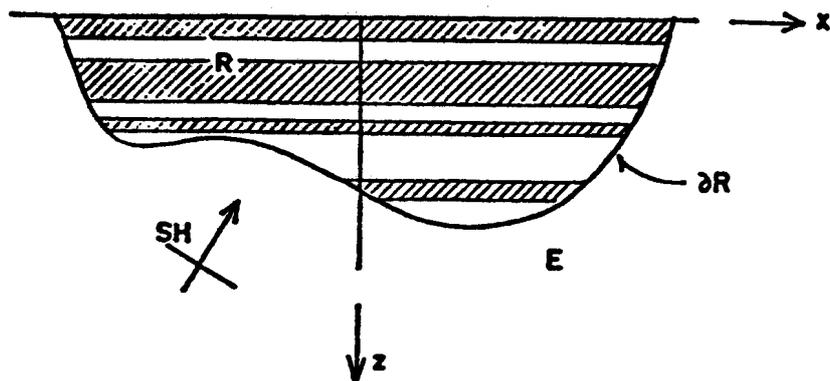


Fig. 1. Depósito elástico estratificado de forma arbitraria en la superficie de un semiespacio. Incidencia de ondas SH.

dio los desplazamientos satisfarán la ec reducida de onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} v = 0 \quad (1)$$

donde  $v(x, z)$  = desplazamientos en la dirección del eje  $y$ ,  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$  = velocidad de propagación de las ondas  $S$  en un medio  $\mu$  = módulo de rigidez en cortante,  $\rho$  = densidad de masa y  $\omega$  = frecuencia circular. Se ha supuesto dependencia armónica del tiempo dada por  $\exp(i\omega t)$  donde  $i = \sqrt{-1}$ .

Los campos de desplazamiento en el semiespacio y en la irregularidad se escriben mediante

$$v_E = v^{(0)} + \sum_{n=1}^N A_n G_n \quad (2)$$

y

$$v_R = \sum_{m=-M}^M B_m \ell_1(k_m, z) e^{ik_m x}, \quad (3)$$

respectivamente. En la Ec. 2,  $v^{(0)}$  = solución de campo libre (en ausencia de irregularidad),  $G_n$  = solución para una fuente localizada en  $(x_n, z_n)$  fuera del semiespacio y que satisface la condición de frontera libre ( $\partial/\partial z = 0$ ) en  $z=0$  y la condición de irradiación al infinito; está dada por

$$G_n = H_0^{(2)}(\omega r_n / \beta_E) + H_0^{(2)}(\omega r'_n / \beta_E) \quad (4)$$

donde  $H_0^{(\beta)}$  (\*) = función de Hankel de segunda especie y orden  $\beta$   
 ro,  $\beta_E = \beta$  en la región E,

$$r_n = [ (x-x_n)^2 + (z-z_n)^2 ]^{1/2} \quad (5)$$

y

$$r'_n = [ (x-x_n)^2 + (z+z_n)^2 ]^{1/2} \quad (6)$$

Los puntos  $(x_n, z_n)$  se localizarán en la región R para re-  
 presentar con las funciones  $G_n$  las ondas difractadas por la  
 irregularidad en la región E. En la Ec. 3,  $\mathcal{L}_1$  es sólo un com-  
 ponente del vector desplazamiento-esfuerzo  $\mathcal{L}_j$ ,  $j = 1, 2$ , el cual  
 es solución de la ecuación matricial

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\mu \\ k_m^2 \mu - \omega^2 \rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

que es una forma modificada de la Ec. 1. Tanto en las Ec. 3 co-  
 mo en la 7,  $k_m$  = número de onda horizontal.

En medio estratificado con estratos homogéneos y superfi-  
 cie libre, se puede escribir [3].

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}_z = P(z, z_j) P(z_j, z_{j-1}) \dots P(z_1, z_0) \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{z_0=0} \quad (8)$$

para  $z_j \leq z \leq z_{j+1}$  es decir para  $z$  en el estrato  $j+1$  ( $j=0, 1, \dots$ ).  
 La matriz  $P(z, z_j)$  es la matriz propagadora de Haskell y está  
 dado por

$$P(z, z_j) = \begin{bmatrix} \cos \eta_j (z-z_j) & (\eta_j \mu_j)^{-1} \text{sen } \eta_j (z-z_j) \\ -\eta_j \mu_j \text{sen } \eta_j (z-z_j) & \cos \eta_j (z-z_j) \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde

$$\eta_j = \sqrt{\omega^2 / \beta_j^2 - k_m^2} \quad (10)$$

Con la forma dada a la Ec. 8 se satisfacen automáticamente  
 las condiciones de frontera libre y las de continuidad de des-  
 plazamientos y esfuerzos en las interfaces de los estratos. Así,  
 para construir soluciones bastará a plicar la Ec. 8 haciendo  
 $\mathcal{L}_1 = i$  en  $z = 0$ . Todo ello para diferentes números de ondas ho-  
 rizontales  $k_m$ .

Faltará satisfacer la continuidad de desplazamientos y trac-  
 ciones en el contorno irregular  $\partial R$ . En ella se requerirá que

$$v_R = v_E \quad \text{en } \partial R \quad (11)$$

y que

$$\mu_R \frac{\partial v_R}{\partial n} = \mu_E \frac{\partial v_E}{\partial n} \quad \text{en } \partial R \quad (12)$$

donde  $\mu_R = \mu_j$  en el estrato  $j$ ,  $\mu_E = \mu$  en la región  $E$  y  $n = \underline{\text{normal}}$  al contorno  $\partial R$ .

Los coeficientes  $A_n$  y  $B_m$  de las Ecs. 2 y 3 se obtendrán de manera que el error cuadrático,  $\epsilon$ , en la satisfacción de las ecs 11 y 12 sea mínimo. Este está dado por

$$\epsilon = \int_{\partial R} (|v_E - v_R|^2 + c |\mu_E \frac{\partial v_R}{\partial n}|^2) ds \quad (13)$$

donde  $c = \text{coeficiente de normalización}$ . Para minimizar  $\epsilon$  se requiere que

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial A_n^*} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

y

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial B_m^*} = 0, \quad m = -M, -M+1, \dots, M \quad (15)$$

donde el asterisco significa complejo conjugado. Así se obtiene un sistema de ecuaciones lineales de orden  $N+2M+1$  para  $A_n$  y  $B_m$  de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde las submatrices  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  y  $a_{22}$  son de órdenes  $N \times N$ ,  $N \times (2M+1)$ ,  $(2M+1) \times N$  y  $(2M+1) \times (2M+1)$ , respectivamente, y están dadas por

$$a_{11} = \int_{\partial R} (G_\ell^* G_n + c \mu_E^2 \frac{\partial G_\ell^*}{\partial n} \frac{\partial G_n}{\partial n}) ds, \quad \ell, n = 1, \dots, N \quad (17)$$

$$a_{12} = (a_{21}^*)^T = - \int_{\partial R} [G_\ell^* \ell_1(z, k_m) e^{ik_m x} + c \mu_E \mu_R \frac{\partial G_\ell^*}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} (\ell_1 e^{ik_m x})] ds, \\ \ell = 1, \dots, N \\ m = -M, \dots, M \quad (18)$$

y

$$a_{22} = \int_{\partial R} (\ell^* \ell + c \mu_R^2 \frac{\partial \ell^*}{\partial n} \frac{\partial \ell}{\partial n}) dS, \quad q, m = -M, \dots, M. \quad (19)$$

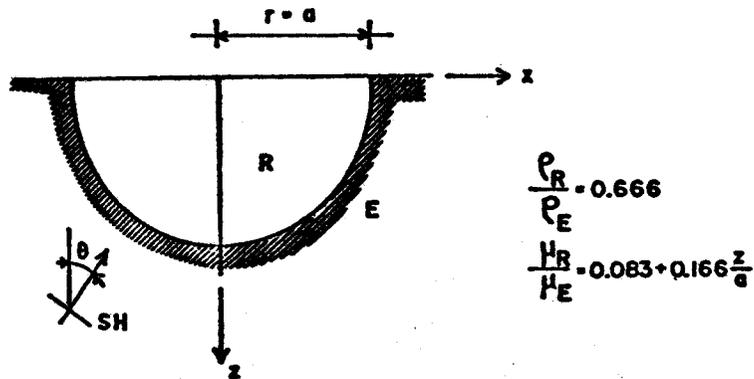


Fig. 2. Modelo utilizado para comparación de resultados con el MEF. Depósito semicircular con variación lineal de la rigidez al cortante.

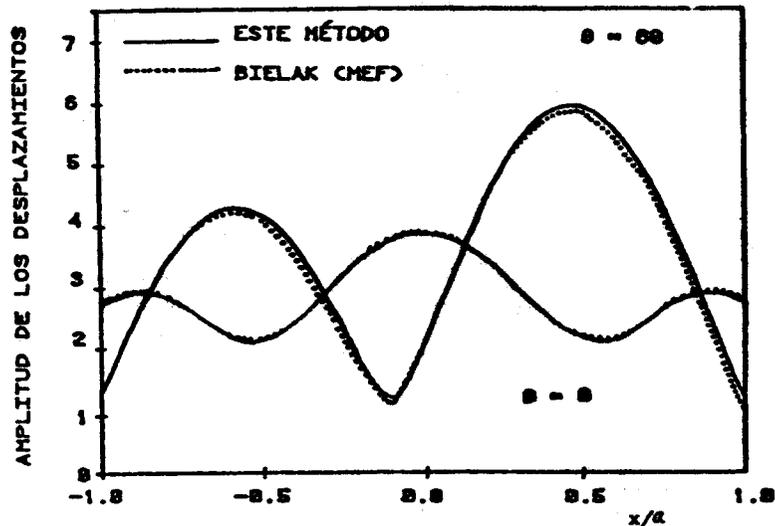


Fig. 3. Amplitudes de los desplazamientos para incidencia de ondas SH en un depósito semi-circular con una variación lineal del módulo de rigidez al cortante. Frecuencia normalizada  $\eta = 0.25$  y ángulos de incidencia  $\theta = 0^\circ$  y  $60^\circ$ . Comparación de resultados con los obtenidos por Bielak (ref 7).

Por otra parte  $b_1$  y  $b_2$ , submatrices de órdenes  $N \times 1$  y  $(2M+1) \times 1$ , respectivamente, están dadas por

$$b_1 = - \int_{\partial R} \left( G_{\ell}^{*} v + c \mu_E^2 \frac{\partial G_{\ell}^{*}}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS, \quad \ell = 1, \dots, N \quad (20)$$

y

$$b_2 = \int_{\partial R} \left( L_q^{*} v + c \mu_E^2 \frac{\partial L_q^{*}}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS \quad q = -M, \dots, M \quad (21)$$

en las ecs 19 y 21 se escribió  $L_q^{*}$  y  $L_m$  en lugar de  $L_1^{*}(z, k_q) e^{-ik_q x}$  y  $L_1(z, k_m) e^{ik_m x}$ , respectivamente.

Una vez resuelta la ec 16, con las Ecs. 2 y 3 se calculan los campos de desplazamientos. Los coeficientes de las Ecs. 16 a 21 se calculan numéricamente usando una regla gaussiana de integración. Los números de onda horizontales se construyen de manera que en el estrato de menor velocidad todas las ondas en él superpuestas sean homogéneas. (Para detalles adicionales consultar [2]).

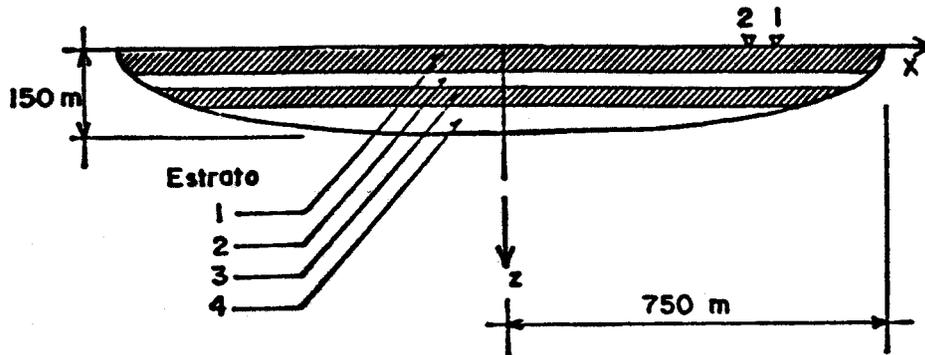


Fig. 4. Modelo utilizado para la obtención de funciones de transferencia. Depósito semielíptico compuesto de cuatro estratos horizontales. El espesor de cada estrato y sus propiedades mecánicas así como las del semiespacio E se presentan en la tabla I

#### EJEMPLOS

Con objeto de mostrar la bondad del método aquí descrito, se comparan resultados con los obtenidos por Bielak [7], con el método de elementos finitos para un depósito semicircular. En la Fig. 2 se muestra el modelo estudiado. La variación para  $\mu$  en la región R está dada por la siguiente expresión

$$\frac{\mu_R}{\mu_E} = \mu_0 + \mu_1 \frac{z}{a}, \quad 0 \leq z \leq a$$

donde  $\mu_0 = 0.08333$  y  $\mu_1 = 0.1666$ . Se tomó la relación de densidades  $\rho_R/\rho_E = 0.666$  como constante y la frecuencia adimensional  $\eta = 0.25$ , donde  $\eta = \omega a/\pi \beta E$  y  $a =$  radio de depósito.

Se aproximó la variación lineal de  $\mu$  con 50 estratos homogéneos de igual espesor. Se usaron  $N=20$  y  $M=21$  para los desarrollos de soluciones en las regiones E y R, respectivamente. Las fuentes se distribuyeron igualmente espaciadas en una circunferencia de radio  $0.85a$ . Para las integraciones numéricas se usaron 10 intervalos y una regla de integración gaussiana de tres puntos [8].

T A B L A I  
ESPEORES Y PROPIEDADES MECÁNICAS

PROFUNDIDAD (m)	CAPA	ESPEOR (m)	$\mu$ [x $10^4$ ton/m <sup>2</sup> ]	$\rho$ [ton seg <sup>2</sup> /m <sup>3</sup> ]	$\xi$	$\beta$ [m/seg]
11.5	1	11.50	25.4	0.254	0.04	1000
16.0	2	4.50	25.5	0.163	0.03	1250
41.0	3	25.00	82.4	0.285	0.02	1700
92.0	4	max 51.0	16.5	0.183	0.04	950
	SEMIES PACIO		51.75	0.230	0.02	1500

En la Fig. 3 se presentan los resultados obtenidos con ambos métodos para ángulos de incidencia  $\theta = 0^\circ$  y  $60^\circ$ , respectivamente. La concordancia es excelente. No se hizo un análisis exhaustivo de las diferencias debido a que los resultados del método de elementos finitos son aun preliminares.

Se presentan también dos funciones de transferencia y un espectro de respuesta para el modelo de depósito semielíptico de cuatro estratos horizontales mostrado en la Fig. 4. El espesor de cada estrato y sus propiedades mecánicas así como las del semiespacio E se presentan en la Tabla I. Los valores de amortiguamiento  $\xi$  que ahí aparecen se han incluido en el análisis mediante la definición de módulos de rigidez complejos.

En las Figs. 5 y 6 se muestran las funciones de transferencia para incidencia vertical evaluados en los puntos 1 y 2 del modelo, respectivamente; el rango de frecuencias analizado es 0-10 Hertz.

Para estos resultados se calculó el error cuadrático medio de la Ec. 13, normalizado con respecto a valores de referencia dados por los desplazamientos y esfuerzos máximos en la solución de campo libre. Este error se promedió aritméticamente para las frecuencias analizadas y es menor de 7%.

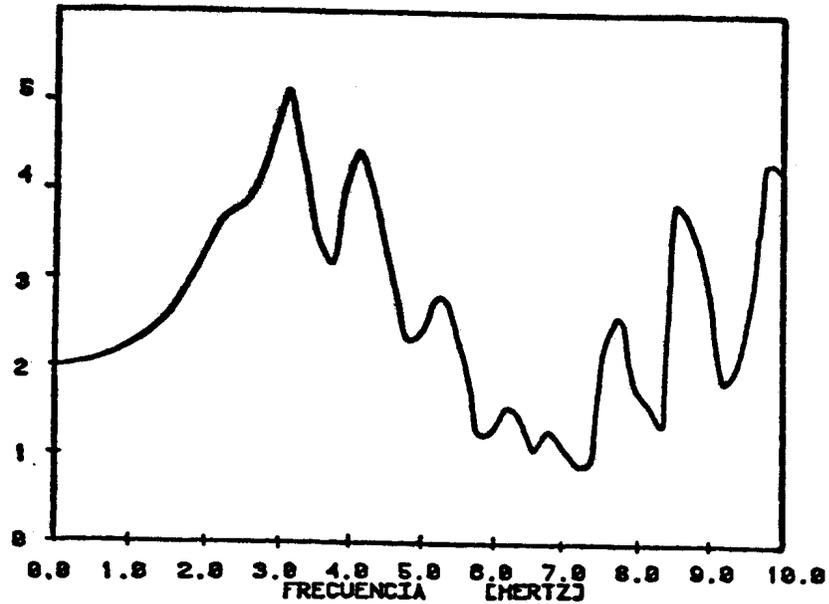


Fig. 5. Función de transferencia para incidencia vertical evaluada en el punto 1 del modelo del depósito semielíptico de la Fig. 4.

Los espectros de respuesta mostrados en la fig 7 corresponden a los eventos de la Tabla II para ello se usó la función de transferencia de la Fig. 6. Se obtuvieron usando un modelo sísmológico de la fuente y la teoría de vibraciones casuales que se describen con detalle en [1].

T A B L A II

DATOS PARA LOS EVENTOS SUPUESTOS

EVENJO	MAGNITUD ( $M_s$ )	DISTANCIA HIPOCENTRAL (km)	$a_{max}/g$
1	5.1	16.8	0.073
2	6.7	55.9	0.087
3	7.6	134.5	0.171
4	8.3	400.3	0.030

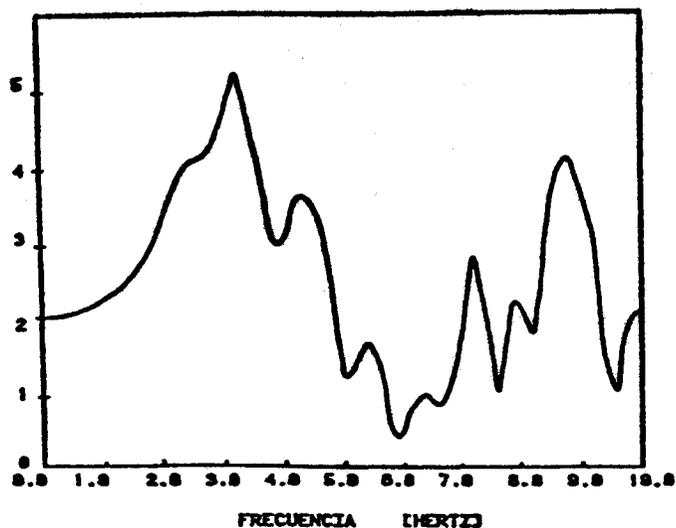


Fig. 6. Función de transferencia para incidencia vertical evaluada en el punto 2 del modelo del depósito semielíptico de la Fig. 4.

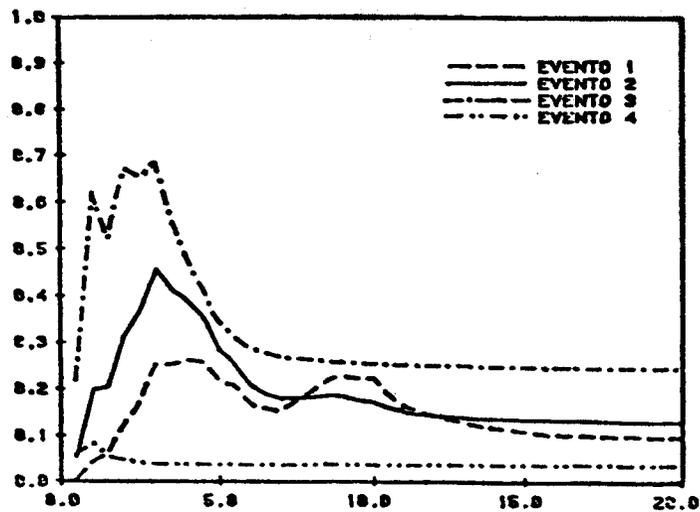


Fig. 7. Espectros de respuesta obtenidos usando un modelo sísmológico de la fuente y la teoría de vibraciones casuales (ref 1), correspondientes a los eventos de la tabla 2; se utilizó la función de transferencia de la Fig. 6.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha presentado un nuevo método de solución del problema de amplificación dinámica en medios estratificados irregulares. La descripción del método está basada en el trabajo de Bravo et al [2] para incidencia de ondas SH. El método es una generalización del método de Haskell y es una extensión del procedimiento presentado en [4] y [5].

La comparación de resultados con los obtenidos por Bielak [7] con el método de elementos finitos muestra un excelente acuerdo.

Como ejemplos se han calculado funciones de transferencia de configuraciones estratificadas bidimensionales y éstas se usaron para obtener espectros de respuesta, los cuales se han calculado con el procedimientos descrito en [1].

A pesar de los excelentes resultados que produce el método que he descrito quedan por resolverse algunos problemas. El más apremiante es el cálculo de la duración del movimiento pues cuando los contrastes de impedancias son grandes, la energía atrapada en una formación estratificada puede alargar la duración de manera considerable. Esto es muy importante al calcular espectros de respuesta y considerar la respuesta de sistemas evolutivos. Para calcular la duración es necesario resolver el problema en el tiempo haciendo uso de la transformada de Fourier. Ello requerirá optimar el algoritmo de solución que aquí he presentado.

## RECONOCIMIENTOS

Muchas de las ideas expresadas en este escrito han tomado forma a partir de innumerables discusiones con M A Bravo, F J Chávez G y E Rosenblueth. J Bielak proporcionó resultados inéditos de su estudio del problema con elementos finitos. Se agradece la colaboración de M. Suárez. Parte de esta investigación ha sido patrocinada por la Comisión Federal de Electricidad, México y por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México (Proy. FCCBBNA-021963).

## REFERENCIAS

- [1] Boore, D.M., "Stochastic simulation of high frequency ground motions based on seismological models of the radiated spectra", *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 73, 1983, págs. 1865-1894
- [2] Bravo, M.A., Sánchez-Sesma, F.J. y Chávez-García, F.J., "Ground motion on stratified alluvial deposits under incidence of elastic SH waves", en preparación
- [3] Aki, K. y Richards, P.G., *Quantitative Seismology*, W H Freeman, San Francisco, 1980
- [4] Sánchez-Sesma, F.J. y Rosenblueth, E., "Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves", *Int. J. Earthq. Engng. Stral. Dyn.* Vol. 7, 1979, págs. 441-50

- [5] Sánchez-Sesma, F.J. y Esquivel, J.A., "Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves", *Bull Seism. Sic. Am. Vol. 69*, 1979, págs. 1107-20
- [6] Chávez-García, F.J. y Sánchez-Sesma, F.J., "Programas fortran para estudiar incidencia de ondas SH en irregularidades superficiales bidimensionales", *Instituto de Ingeniería*, proy 3749, Noviembre, 1984
- [7] Bielak, J. comunicación personal
- [8] Abramowitz, M. y Stegun, I.A., *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Inc Nueva York, 1970