

UN ELEMENTO PARA EL ANALISIS DE PROPAGACION DE ONDAS
EN UN MEDIO DE BIOT

Victorio E. Sonzogni
Sergio R. Idelsohn

INTEC(*)-CONICET - UNL
Guemes 3430 , 3000 Santa Fe , Argentina.

En esta comunicacion se discute la formulacion de un elemento finito para el estudio de propagacion de ondas en un medio poroso saturado con un fluido. El problema es considerado bidimensional y las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinamico del medio corresponden a la teoria de Biot. Se trabaja con dos campos de desplazamientos superpuestos. Uno de ellos correspondiendo a los desplazamientos del solido y el otro a los del liquido intersticial. Se presentan algunos resultados obtenidos hasta el presente y se mencionan los pasos que se estan aun desarrollando.

(*) Instituto de Desarrollo Tecnologico para la Industria Quimica

1. INTRODUCCION

En problemas de prospeccion sismica, asi como tambien en problemas de interaccion dinamica entre estructuras y suelos, es importante para su analisis poder realizar una representacion numerica de la propagacion de ondas elasticas en el suelo. En el primer caso, cuando se efectua una prospeccion sismica destinada a detectar y ubicar yacimientos de petroleo, aparece en Juedo un material solido poroso embebido en petroleo y eventualmente gases. En el segundo tipo de problemas, pueden encontrarse suelos saturados con napas freaticas, o estructuras de materiales sueltos como en el caso de diaques de embalse.

En este trabajo se estudia numericamente el comportamiento dinamico de un medio poroso saturado y la propagacion de ondas en el. El estudio esta actualmente en realizacion por lo que aqui se presenta un estado del mismo, indicandose los pasos efectuados y los que aun estan realizandose.

La teoria sobre la que se basa este estudio fue desarrollada por M.A.Biot en 1955 [1]. Esta puede ser reconocida como perteneciente a una teoria mas general de medios multifase [2,3,4].

Sobre ese modelo matematico se esta desarrollando un modelo numerico. Antecedentes del modelado numerico de este problema puede hallarse en trabajos de Shaboussi y Wilson [5], quienes estudiaron por el metodo de elementos finitos la respuesta sismica de presas de materiales sueltos. Santos [6] propone la adaptacion de un elemento mixto de Brezzi, Douglas y Marini [7], para este problema. A continuacion se resenara la teoria de Biot y las ecuaciones de campo del problema bidimensional. Luego se presentara el desarrollo de un modelo en desplazamientos utilizando las funciones de forma usuales en elasticidad plana. Se muestra un ejemplo numerico a fin de observar su desarrollo en relacion con los resultados teoricos esperados para las velocidades de propagacion de ondas. Finalmente se mencionan las caracteristicas del elemento propuesto basado en ref.6, del cual aun no se disponen resultados en esta etapa del estudio. Se mencionan brevemente tambien otros aspectos a solucionar para poder utilizar el modelado numerico como herramienta para fines practicos.

2. TEORIA DE BIOT PARA PROPAGACION DE ONDAS ELASTICAS EN UN MEDIO POROSO SATURADO

El comportamiento mecanico de un solido elastico poroso saturado con un fluido fue descrito matematicamente por M.A.Biot [8,9]. El mismo autor propuso en 1955 una teoria para el problema de propagacion de ondas de baja frecuencia en ese tipo de material [1]. El termino 'baja frecuencia' circunscribe el estudio al caso en que el flujo entre los poros es del tipo de Poiseuille. La frecuencia limite de este caso es

$$f_1 = \pi v / (4 d^2) \quad (1)$$

siendo v la viscosidad cinematica del fluido y d el diametro de los poros. Esta teoria sera seguida en el presente trabajo. La extension para frecuencias superiores a (1) fue dada por el mismo autor en ref. 10.

Se considera un liquido compresible que puede fluir entre los poros del solido. El solido es elastico, con poros de diametro aproximadamente constante y la porosidad se supone tambien constante. El flujo produce fuerzas de friccion debido a la viscosidad del liquido que proporciona una fuente de disipacion de energia. No se consideran en esta teoria efectos termelásticos.

Este modelo matematico puede situarse dentro de una teoria mas general de mezclas o medios multifase [2,3,4]. En estas teorias multifase se supone que cada punto del material compuesto esta ocupado simultaneamente por varias fases (el caso que trataremos se reduce al de dos fases: solido y fluido). Las propiedades de cada fase son promediadas sobre el volumen total del material compuesto. Se obtiene así un modelo continuo, sin describir los fenomenos microscopicos que se producen en las particulas componentes de la mezcla.

a) Propiedades de cada fase:

La fraccion de volumen ocupada por la fase α se define como:

$$n^\alpha = V^\alpha / V \quad (2)$$

donde V es el volumen de un elemento del material compuesto y V^α la parte de ese volumen ocupada por la fase α . Las cantidades n^α estan comprendidas entre 0 y 1, y

$$\sum_{\alpha} n^\alpha = 1 \quad (3)$$

En la mecanica de suelos, la fraccion de volumen n^f ocupada por el liquido, en condiciones de saturacion, se denomina porosidad y se representa simplemente por la letra n . Así:

$$n^f = n \quad (4)$$

$$n^s = 1 - n \quad (5)$$

donde n^s es la fraccion de volumen del solido. De aqui en adelante, con los superindices s y f se hara referencia a las fases solida y fluida respectivamente.

Si se denomina ρ_α a la densidad intrinseca del material que constituye la fase α , la masa de ese componente por unidad de volumen de la mezcla sera:

$$\rho^\alpha = n^\alpha \rho_\alpha \quad (6)$$

y en nuestro caso, las masas por unidad de volumen total del solido y del fluido seran:

$$\rho_1 = \rho^s = (1 - n) \rho_s \quad (7)$$

$$\rho_2 = \rho^f = n \rho_f \quad (8)$$

La densidad global del compuesto esta dada por:

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} = \rho_1 + \rho_2 \quad (9)$$

b) Desplazamientos y deformaciones:

En el medio poroso saturado consideramos dos campos de desplazamientos superpuestos. Designaremos con u_i al vector de desplazamientos en el sólido y con w_i al vector de desplazamientos en el fluido. El vector w_i no representa el desplazamiento real del fluido entre los poros del sólido, sino un desplazamiento medio definido de modo tal que el volumen de fluido que pasa a través de una sección unitaria, cuya normal exterior tiene la dirección x_i es $n w_x$ (y análogamente para las componentes y y z).

El tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy, para el sólido es:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

y la deformación volumétrica:

$$\epsilon = u_{i,i} \quad (11)$$

donde la coma indica derivación parcial y el índice repetido, una sustracción sobre su rango. Análogamente, la deformación volumétrica del fluido es:

$$\bar{\epsilon} = w_{i,i} \quad (12)$$

c) Tensiones:

Definimos el vector tensión parcial sobre el sólido, t_i^s , de la manera habitual en mecánica del continuo, donde la fuerza de contacto considerada es la que actúa sobre la fracción sólida y el área es la del material compuesto. Puede escribirse:

$$t_i^s = n^s t_{si} = (1 - n) t_{si} \quad (13)$$

siendo t_{si} el vector tensión intrínseca sobre el sólido, esto es, la tensión que microscópicamente actúa sobre la fase sólida. Análogamente puede definirse el vector de tensión parcial sobre el fluido t_i^f .

Para cada fase α puede definirse un tensor de tensiones parciales σ_{ij}^{α} tal que:

$$t_i^{\alpha} = v_j \sigma_{ij}^{\alpha} \quad (14)$$

Esta es la fórmula de Cauchy, en la cual v_j representa el vector unitario normal exterior a la superficie sobre la que actúa el vector tensión parcial t_i^{α} .

El tensor de tensiones parciales sobre el fluido σ_{ij}^f puede escribirse:

$$\sigma_{ij}^f = n \sigma_{fij} \quad (15)$$

siendo σ_{fij} la tension intrinseca en el fluido, que es a su vez:

$$\sigma_{fij} = -p \delta_{ij} \quad (16)$$

En esta expresion p es la presion de poros (en valor absoluto) y δ_{ij} el delta de Kronecker ($\delta_{ij}=1$ si $i=j$, $\delta_{ij}=0$ si $i \neq j$). Dado que la tension sobre el fluido corresponde a un tensor esferico, escribiremos el valor de esa presion parcial como:

$$\sigma^f = -n p \quad (17)$$

El tensor de tensiones parciales sobre el solido σ_{ij}^s es tal que el tensor de tensiones globales sobre el material compuesto σ_{ij} se obtiene:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^f \quad (18)$$

Debe hacerse notar que la tension parcial σ_{ij}^s no corresponde a la tension efectiva $\sigma_{ij}^{i's}$ que se utiliza en la mecanica de suelos, dado que esta ultima se define como:

$$\sigma_{ij}^{i's} = \sigma_{ij} - \sigma_{fij} \quad (19)$$

de donde

$$\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^{i's} + (1 - n) \sigma_{fij} \quad (20)$$

En lo que sigue trabajaremos con las tensiones parciales σ_{ij}^s y σ_{ij}^f (o σ^f).

d) Ecuaciones constitutivas:

Las ecuaciones constitutivas, tales como fueron presentadas por Biot [1], para un material isotropo, son:

$$\sigma_{ij}^s = 2N \epsilon_{ij} + \delta_{ij} (A\epsilon + Q\bar{\epsilon}) \quad (21)$$

$$\sigma^f = Q\epsilon + R\bar{\epsilon} \quad (22)$$

En este caso hay 4 constantes elasticas: A, N, Q y R. Su significado fisico es el siguiente:

La constante N es el modulo de elasticidad transversal, que habitualmente se designa con la letra G (N > 0)

La constante R es una medida de la presión que es necesario ejercer sobre el fluido para que un cierto volumen de él penetre en el material compuesto; mientras el volumen total permanece constante. ($R > 0$)

El coeficiente Q representa un acoplamiento elástico entre el cambio de volumen del sólido y el del fluido. Si se anula la presión de poros en la ecuación (22), se obtiene:

$$\bar{\epsilon} = -\epsilon \frac{Q}{R}$$

Q debe ser positivo.

La constante A es

$$A = \lambda + \frac{Q^2}{R}$$

donde λ es la constante de Lamé.

Ha sido indicada la manera de calcular esos 4 coeficientes elásticos a partir de 4 magnitudes determinadas por ensayos y la porosidad del sólido [11]. Mas aun, se han publicado valores de esos coeficientes determinados para algunos tipos de suelo [12,13].

e) Expresiones de la energía y ecuaciones de movimiento:

La energía potencial elástica por unidad de volumen del material puede escribirse:

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^s \epsilon_{ij} + \sigma^f \bar{\epsilon}) \quad (27)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (21), (22), (10) y (12) puede obtenerse una expresión de U en términos de los desplazamientos u_i y w_i .

La energía cinética por unidad de volumen de material está dada por:

$$T = \frac{1}{2} [\rho_{11} \dot{u}_i \dot{u}_i + 2\rho_{12} \dot{u}_i \dot{w}_i + \rho_{22} \dot{w}_i \dot{w}_i] \quad (24)$$

(Vale la pena recordar aquí que el índice repetido, en un término, indica sumatoria) El primero y tercer término representan la contribución a la energía cinética, del movimiento del sólido y del fluido, respectivamente. El segundo término representa un acoplamiento entre el movimiento del suelo y del fluido. Los coeficientes ρ_{ij} pueden escribirse:

$$\rho_{11} = \rho^s + \rho_a \quad (25)$$

$$\rho_{22} = \rho^f + \rho_a \quad (26)$$

$$\rho_{12} = -\rho_a \quad (27)$$

siendo ρ_a una masa aparente adicional. Para comprender su significado, se puede indicar que si v.d. el desplazamiento del

fluido se hace cero en una dirección x ; una aceleración del sólido \ddot{u}_x , provoca en el mismo una fuerza $\rho_{11} \ddot{u}_x$ y debe aplicarse sobre el fluido una fuerza $\rho_{12} \ddot{u}_x$ (de sentido contrario) para evitar su movimiento. Los coeficientes dinámicos ρ_{ij} deben verificar las siguientes condiciones a fin de que la energía cinética sea definida positiva:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &> 0 \\ \rho_{22} &> 0 \\ \rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2 &> 0 \end{aligned} \quad (28)$$

condiciones que son automáticamente satisfechas si los coeficientes se calculan con las expresiones (25), (26) y (27).

Puede escribirse una función de disipación viscosa, cuadrática, definida positiva, de la forma:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} b [(\dot{u}_1 - \dot{w}_1) (\dot{u}_1 - \dot{w}_1)] \\ &= \frac{1}{2} b [(\dot{u}_x - \dot{w}_x)^2 + (\dot{u}_y - \dot{w}_y)^2 + (\dot{u}_z - \dot{w}_z)^2] \end{aligned} \quad (29)$$

Esta función depende de la velocidad de movimiento relativo entre el sólido y el fluido. El coeficiente b es:

$$b = \mu n^2/k \quad (30)$$

siendo μ la viscosidad del fluido, n la porosidad y k el coeficiente de permeabilidad.

Las ecuaciones del Lagrange se escriben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial U}{\partial u_i} = q_{ei} \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{w}_i} - \frac{\partial U}{\partial w_i} = q_{fi} \quad (32)$$

este es un sistema de 6 ecuaciones diferenciales. Los términos q_{ei} y q_{fi} son fuerzas externas por unidad de volumen. En lo que sigue supondremos que ellas son nulas. Siendo así las ecuaciones (31)-(32) resultan:

$$\sigma_{ij,j}^s = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_i + \rho_{12} w_i) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - w_i) \quad (33)$$

$$\sigma_{,i}^f = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} u_i + \rho_{22} w_i) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - w_i) \quad (34)$$

Suponiendo los ρ_{ij} independientes del tiempo y escribiendo las tensiones en función de los desplazamientos (ec. (10)-(12) y (21)-(22)):

$$N(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + A u_{j,ji} + Q w_{j,ji} = \rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{w}_i + b(\dot{u}_i - \dot{w}_i) \quad (35)$$

$$Q u_{j,ji} + R w_{j,ji} = \rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{w}_i - b(\dot{u}_i - \dot{w}_i) \quad (36)$$

Este sistema de ecuaciones rige el comportamiento dinámico del medio saturado, en ausencia de fuerzas de volumen.

3. FORMA DEBIL DEL PROBLEMA Y APROXIMACION POR ELEMENTOS FINITOS

En el método de los elementos finitos se aproximan las funciones incógnitas u_i y w_i por:

$$u_i = \phi_i U \quad (37)$$

$$w_i = \psi_i W \quad (38)$$

siendo \underline{U} el vector que contiene las incógnitas nodales u_x y u_y y \underline{W} el vector que contiene las incógnitas w_x y w_y . Los vectores ϕ_i y ψ_i contienen las funciones de interpolación. Aplicando el método de Galerkin, se reemplazan las aproximaciones (37) y (38) en (35) y (36); se multiplica (35) por ϕ_i^T y (36) por ψ_i^T y se integra sobre el dominio total Ω . Así se obtiene:

$$\int_{\Omega} [(N(\phi_i^T \phi_{i,jj} + \phi_i^T \phi_{j,ij}) + A \phi_i^T \phi_{j,ji}) U + Q \phi_i^T \psi_{j,ji} W] d\Omega = \underline{B}_i^1$$

$$\int_{\Omega} (Q \psi_i^T \phi_{j,ji} U + R \psi_i^T \psi_{j,ji} W) d\Omega = \underline{B}_i^2 \quad (40)$$

con

$$\underline{B}_i^1 = \int_{\Omega} (\rho_{11} \phi_i^T \phi_i \ddot{U} + \rho_{12} \phi_i^T \psi_i \ddot{W} + b \phi_i^T \phi_i \dot{U} - b \phi_i^T \psi_i \dot{W}) d\Omega \quad (41)$$

$$\underline{B}_i^2 = \int_{\Omega} (\rho_{12} \psi_i^T \phi_i \ddot{U} + \rho_{22} \psi_i^T \psi_i \ddot{W} - b \psi_i^T \phi_i \dot{U} + b \psi_i^T \psi_i \dot{W}) d\Omega \quad (42)$$

Integrando por partes los primeros miembros de (39) y (40) según la fórmula:

$$\int_{\Omega} f_{,i} g d\Omega = - \int_{\Omega} f g_{,i} d\Omega + \int_{\Gamma} f g v_i d\Gamma \quad (43)$$

siendo v_i el vector normal exterior sobre el contorno Γ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{B}_i^1 + \int_{\Omega} [N(\phi_{i,j}^T \phi_{i,j} + \phi_{i,j}^T \phi_{j,i}) + A \phi_{i,i}^T \phi_{j,j}] \underline{U} \, d\Omega + \\ + \int_{\Omega} Q \phi_{i,i}^T \underline{V}_{j,j} \underline{W} \, d\Omega = \underline{C}_i^1 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\underline{B}_i^2 + \int_{\Omega} (Q \underline{V}_{i,i}^T \phi_{j,j} \underline{U} + R \underline{V}_{i,i}^T \underline{V}_{j,j} \underline{W}) \, d\Omega = \underline{C}_i^2 \quad (45)$$

donde

$$\underline{C}_i^1 = \int_{\Gamma} \phi_{i,j}^T \sigma_{ij}^s v_j \, d\Gamma \quad (46)$$

$$\underline{C}_i^2 = \int_{\Gamma} \underline{V}_{i,i}^T \sigma^f v_i \, d\Gamma \quad (47)$$

estos vectores serán iguales por condición de contorno, a las fuerzas de superficie aplicadas sobre el modelo.

4. UN MODELO EN ELEMENTOS FINITOS

En este modelo se utilizó un elemento cuadrilátero isoparamétrico (fig.1). Las incógnitas nodales son los dos componentes del desplazamiento en el sólido (u_x, u_y) y los dos componentes del desplazamiento en el fluido (w_x, w_y). Las funciones de interpolación son bilineales de modo que los desplazamientos en un punto interior del elemento se escriben:

$$\begin{aligned} u_x &= \phi_x \underline{U} \\ u_y &= \phi_y \underline{U} \\ w_x &= \phi_x \underline{W} \\ w_y &= \phi_y \underline{W} \end{aligned} \quad (48)$$

Las incógnitas nodales están contenidas en los vectores \underline{U} y \underline{W} :

$$\begin{aligned} \underline{U}^T &= [u_x^1, u_x^2, u_x^3, u_x^4, u_y^1, u_y^2, u_y^3, u_y^4] \\ \underline{W}^T &= [w_x^1, w_x^2, w_x^3, w_x^4, w_y^1, w_y^2, w_y^3, w_y^4] \end{aligned} \quad (49)$$

Los superíndices hacen referencia aquí al número del nodo. Los vectores de funciones de interpolación son:

$$\begin{aligned} \phi_x &= [\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4, 0, 0, 0, 0] \\ \phi_y &= [0, 0, 0, 0, \phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4] \end{aligned} \quad (50)$$

siendo

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \\ \phi^2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\ \phi^3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \\ \phi^4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)\end{aligned}\tag{51}$$

Colocando todas las incógnitas elementales en el vector X :

$$\underline{X} = \left[\begin{array}{c} \underline{U} \\ \underline{W} \end{array} \right]\tag{52}$$

el conjunto de ecuaciones (44)-(45) se escribe:

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{C} \dot{\underline{X}} + \underline{K} \underline{X} = \underline{P}\tag{53}$$

donde \underline{M} , \underline{C} y \underline{K} son, respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez.

5. EJEMPLO

La solución analítica para las velocidades de propagación de ondas en un medio poroso saturado fue dada en ref.1. Tal como sucede en un medio elástico homogéneo se reconocen dos soluciones independientes; una corresponde a ondas compresionales (deformaciones de dilatación - compresión) y otra a ondas de corte. La velocidad de las ondas de corte es:

$$v_s = \left[\frac{H}{\rho_{11} (1 - \rho_{12}^2 / \rho_{11} \rho_{12})} \right]^{1/2}\tag{54}$$

Se desarrollan dos ondas compresionales cuyas velocidades de propagación son:

$$\begin{aligned}v_1 &= v_c / z_1 \\ v_2 &= v_c / z_2\end{aligned}\tag{55}$$

En esas fórmulas v_c es una velocidad de referencia:

$$v_c = [H/\rho]^{1/2}\tag{56}$$

siendo

$$\begin{aligned}H &= A + 2M + R + 2Q \\ \rho &= \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}\end{aligned}\tag{57}$$

Los números z_1 y z_2 de las ecuaciones (55) se obtienen como raíces de la ecuación característica:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (58)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= [(A + 2N) R - Q^2] / H^2 \\ b &= - [(A + 2N) \rho_{22} + R \rho_{11} - 2Q \rho_{12}] / (H\rho) \\ c &= (\rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2) / \rho^2 \end{aligned} \quad (59)$$

Las raíces de la ecuación (58) son reales y positivas.

Con el objeto de probar el elemento se analizó un medio unidimensional representado según se muestra en la figura 2. La longitud total es 60 unidades y el tamaño de cada elemento es 2 x 2. El módulo de Young es 46813, el coeficiente de Poisson 0.3. Los coeficientes Q y R valen 34720 y 17280. La densidad intrínseca del sólido se tomó igual a 2.14E-4, la del fluido 0.9326 E-4 y la masa adicional nula. La porosidad es 0.24. Las unidades son libras, pulgadas y segundos.

En la figura 3 se muestra el desplazamiento en el sólido, en función del tiempo, de los nodos 61, 51 y 41 (ver figura 2 para la numeración de nodos). En la figura 4 se grafica el desplazamiento en el sólido y en el fluido, correspondientes al nodo 51. Allí se han marcado los tiempos analíticos correspondientes al arribo a ese nodo, de las ondas que viajan con velocidades $v_1 = 16753$, y $v_2 = 32584$. Los tiempos que corresponden a la onda más rápida están representados con una flecha simple y los de la onda más lenta, con una flecha doble. Se observa allí también la llegada de la onda que se refleja en el empotramiento y luego la que lo hace en el extremo libre. Como se ve en esa figura, estos hitos se manifiestan en la curvas de respuesta y la concordancia entre los valores previstos y calculados puede ser juzgada aceptable, teniendo en cuenta la dispersión inherente a las discretizaciones en el espacio y en el tiempo del método utilizado.

6. TAREAS EN DESARROLLO

Como puede verse en las ecuaciones (44) y (45), las funciones que aproximan a los desplazamientos del sólido u_i y sus derivadas primeras deben ser de cuadrado integrable. Sin embargo, las funciones que aproximan los desplazamientos del fluido w_i no precisan esa condición sobre las derivadas sino apenas ser tales que su divergencia sea de cuadrado integrable. Esto relaja los requerimientos de continuidad de la función \bar{v}_i . Basado en esto, J.Santos [6] propone utilizar funciones del espacio de los elementos mixtos de Brezzi, Douglas Y Marini [7]. Se está procediendo a la implementación de un elemento con esas características, del cual aun no se disponen resultados.

Otras tareas paralelas a esta se están realizando a fin de tornar útil el método de los elementos finitos para este problema. Por un lado, la implementación de elementos de borde. Al representar con un dominio finito un problema en un medio semiinfinito, se introducen fronteras artificiales en las cuales las ondas son reflejadas y distorsionan la solución numérica. Para evitar esto se han propuesto

varios elementos absorbentes de borde [15]. Se procedera en este estudio a la implementacion de un elemento que produce una disipacion viscosa de las ondas que lleguen al borde.

Otro aspecto a ser encarado es el del algoritmo para la integracion temporal. El tamano computacional de un problema practico es grande y cobra importancia la estrategia que se pueda seguir para reducir los tiempos de procesado. El tamano del paso de integracion es generalmente pequeno ya que debe ser compatible con el tamano de los elementos finitos y con la frecuencia de las ondas que se desean reproducir numericamente. Esta circunstancia sugiere utilizar un metodo explicito. No obstante, la naturaleza de las ecuaciones presenta un acortamiento entre los terminos de masa del solido y del fluido, con lo cual la matriz de masa no es diagonal, perdiendose de esta manera la ventaja de los metodos explicitos. Por lo tanto esta es otra de las tareas que deben ser encaradas, ya sea en la validacion de algun procedimiento para diagonalizacion de la matriz de masa, o en la utilizacion de algun metodo para reduccion de las matrices del sistema.

REFERENCIAS

- [1] M.A.Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid - I. Low frequency range", *J. Acoustical Soc. of America*, V.28, N.2, p.168-178, 1956
- [2] C.Truesdell and R.Toupin, "The classical field theories", *Handbuch der Physik*, Ed.S.Flügge, V.III/1, Springer Verlag, Berlin 1960.
- [3] R.J. Atkin and R.E. Crane, *Q. Journal Mechanics Applied Mathematics*, V.29, p.209, 1976. (citado en [4]).
- [4] J.H. Prevost, "Mechanics of continuous porous media", *Int. Journal of Engineering Science*, V.18, p.787-800, 1980.
- [5] J. Ghaboussi and E.L. Wilson, "Seismic analysis of earthquake dam reservoir systems", *J. Soil Mech. Foundation Div.*, V.99, N. SM10, p.849-862, 1973.
- [6] J. Santos and E.J. Orens, "Elastic wave propagation in fluid saturated porous media", *Math. and Comp. Methods in Seismic Explor. and Reservoir Modeling*, Jan 21-24, 1985, Houston, Texas.
- [7] F. Brezzi, J. Douglas Jr. and L.D. Marini, "Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems", en prensa.
- [8] M.A. Biot, "General theory of three dimensional consolidation", *J. App. Physics*, V.12, p.155-165, 1941.
- [9] M.A. Biot, "Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media", *J. Applied Physics*, V.33, N.4, p.1482-1498, 1961.
- [10] M.A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid - II. Higher frequency range", *J. Acoustical Soc. of America*, V.28, N.2, p.179-191, 1956.
- [11] M.A. Biot and B.G. Willis, "The elastic coefficients of the theory of consolidation", *J. Applied Mechanics*, V.24, p.594-601, 1957.
- [12] I. Fatt, "The compressibility of sandstones to moderate pressures", *Bull. Amer. Assoc. Petroleum Geologists*, V.42, p.1924-1957, 1958.
- [13] I. Fatt, "The Biot-Willis elastic coefficients for a sandstone", *J. Applied Mechanics*, V.26, p.296-297, 1959.
- [14] K.D. Ye and R.J. Rogers, "Control of elastic plane wave dispersion in two dimensional finite element meshes", *Computers & Structures*, V.21, N.6, p.1145-1151, 1985.
- [15] M. Cohen and P.C. Jennings, "Silent boundary methods for transient analysis", *Comp. Methods for Transient Analysis*, Ed. T. Belutschko and T.J.R. Hughes, Chap.7, p.301-340, Elsevier Science Publ., 1983.

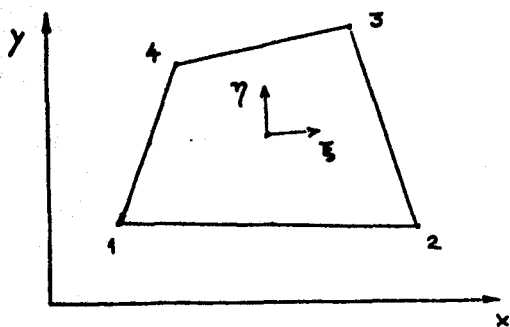


Figura 1. Cuadrilátero isoparamétrico lineal.

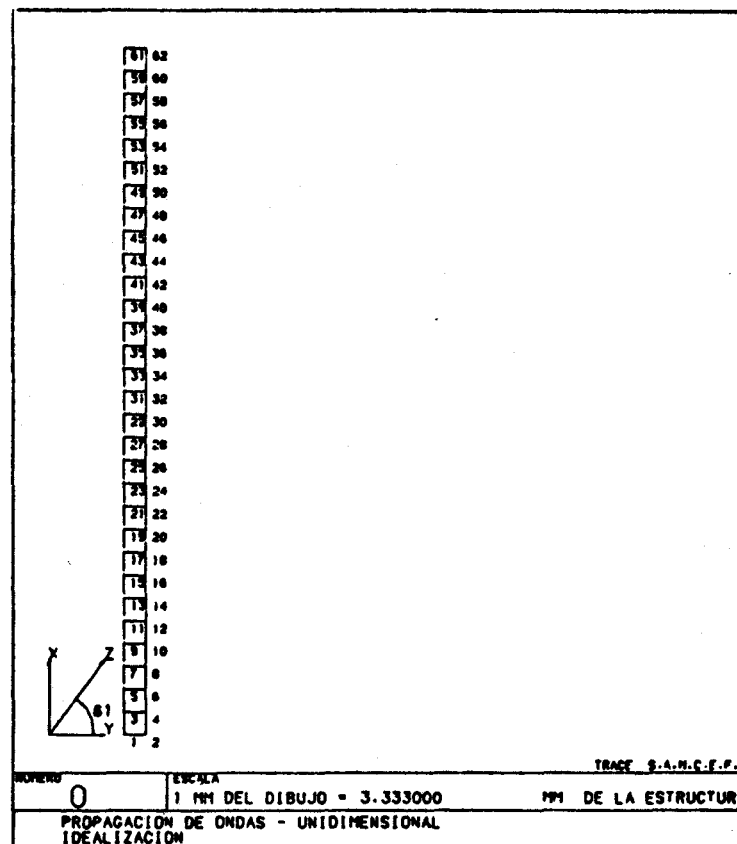


Figura 2. Malla de elementos finitos.

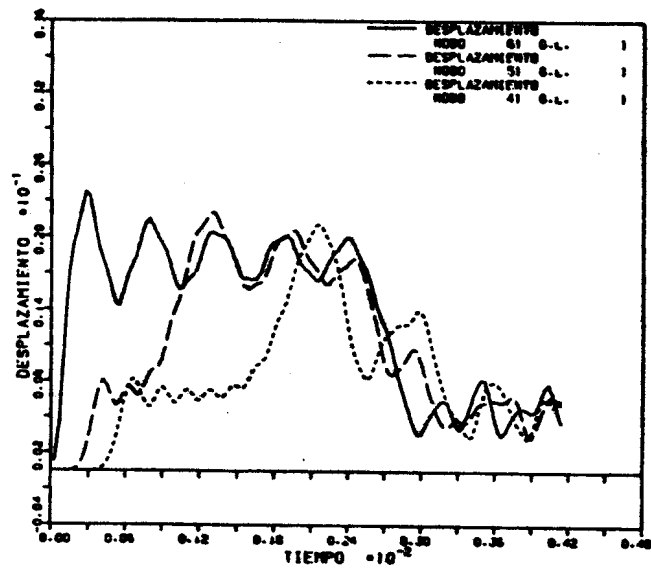


Figura 3. Desplazamientos en el sólido. Nodos 61, 51 y 31.

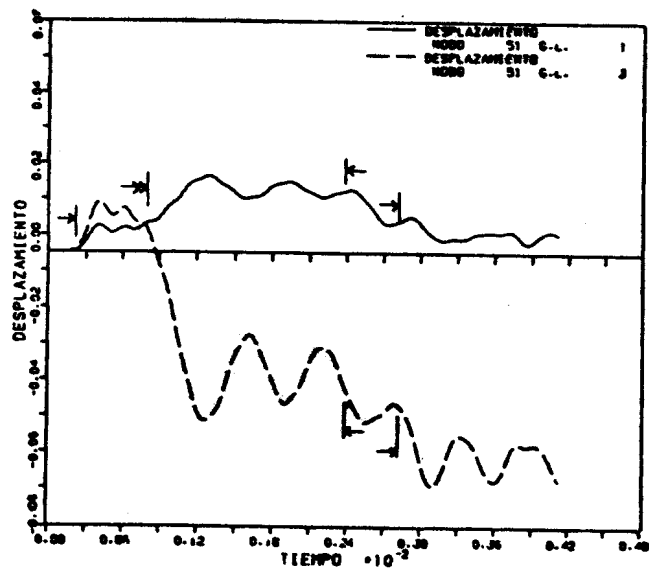


Figura 4. Desplazamientos en el sólido y en el fluido. Nodo 51.
(Sólido: G.L. 1 ; Fluido: G.L. 3)