PROBLEMA DE VALORES DE CONTORNO SOBRE DOMINIOS INFINITOS Y SU SOLUCION NUMERICA

María de los Angeles Morelli
Departamento de Computación. Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires.
Buenos Aires-Argentina

RESUMEN

Dado el problema de valores de contorno con intervalo infinito $[t_o,\infty)$ se presenta aquí un método para poder resolver este problema numericamente mediante la transformación de la ecuación primitiva en un problema de valores de contorno con límites finitos $[t_o,t_*]$ basado en calcular la condición de contorno en t_* anulando la proyección de la solución en el complemento de S_B, dónde S_B es el espacio de soluciones acotadas. Se presenta un estudio del error.

ABSTRACT

We present a numerical method for the solution of a boundary value problem in the semi-infinite domain $[t_o,\infty)$ via the transformation of the primitive equation into a boundary value problem in the finite domain $[t_o,t_*]$. This is based upon the obtention of the boundary condition in t_* by annihilating the projection of the solution into the complement of S_B, where S_B is the space of bounded solutions. An error analysis is also presented.

1. INTRODUCCION

El problema de valores de contorno se presenta en todas las ramas de la ciencia y de la ingeniería.

En muchos problemas importantes el límite del dominio de integración es infinito (ejemplos:en ingeniería del petróleo para la fundación de plataformas de exploración sobre el fondo del océano, deflacción de tuberías, problemas de autovalores provenientes de la ecuación de Schrödinger para el ión de hidrógeno molecular con núcleo fijo, ver Lentini-Keller [1]).

Aquí vamos a tratar el siguiente problema lineal con coeficientes variables y condiciones de contorno no separadas.

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \qquad t_0 \leq t < \infty \tag{1.1a}$$

$$B_0 y(t_0) + \lim_{t \to \infty} B_\infty y(t) = \beta \tag{1.1b}$$

$$\sup_{t \geq t_0} \|y(t)\| < \infty \tag{1.1c}$$

donde $y(t)$ es un vector de n funciones
$f(t)$ es un vector de n funciones
β es un vector de m elementos
$B_0, B_\infty \in R^{m \times n}$

Lo primero que estudiaremos es bajo qué condiciones este problema tiene solución acotada.

2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES ACOTADAS

Primero se demuestra que todas las soluciones acotadas se pueden escribir como $y(t)=y_H(t)+w(t)$ donde
$y_H(t)$ es solución acotada de la ecuación homogénea y
$w(t)$ es solución acotada de la ecuación no homogénea

Para estudiar las soluciones acotadas de la ecuación homogénea escribimos (1.1) de la siguiente forma:

$$y'(t) = A_\infty y(t) + (A(t) - A_\infty)\, y(t) \qquad (2.2a)$$

$$B_0 y(t_0) + \lim_{t\to\infty} B_\infty y(t) = \beta \qquad (2.2b)$$

$$\sup_{t \geq t_0} \| y(t) \| < \infty \qquad (2.2c)$$

La solución de (2.2) se puede escribir como

$$y^+(t) = -\int_t^\infty e^{-A^+(\tau-t)} P^+ \{[A(\tau) - A_\infty]\, y(\tau)\}\, d\tau \qquad (2.3a)$$

$$y^0(t) = e^{A^0(t-t_\infty)} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^s \end{pmatrix} - \int_t^\infty e^{-A^0(\tau-t)} P^0 \{[A(\tau) - A_\infty]\, y(\tau)\}\, d\tau \qquad (2.3b)$$

$$y^-(t) = e^{A^-(t-t_\infty)} \xi^- + \int_{t_\infty}^t e^{-A^-(\tau-t)} P^- \{[A(\tau) - A_\infty]\, y(\tau)\}\, d\tau \qquad (2.3c)$$

luego precisaremos $t_\infty,\ t_a \geq t_0$

donde

$$A_\infty = \begin{pmatrix} A^+ & 0 & 0 \\ 0 & A^0 & 0 \\ 0 & 0 & A^- \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, p \\ \}\, r \\ \}\, q \end{matrix} \qquad A_\infty \in R^{m \times n} \qquad (2.4)$$

$$A_\infty \neq 0$$

$A^+ \varepsilon R^{pxp}$ y sus autovalores tienen la parte real positiva

$A^- \varepsilon R^{qxq}$ y sus autovalores tienen la parte real negativa

$A^o \varepsilon R^{rxr}$ y sus autovalores tienen la parte real cero

A^+, A^- se encuentran en la forma normal de Jordan

A^o se obtiene intercambiando algunas filas y columnas de la forma normal de Jordan.

Las matrices P^+, P^-, P^o son matrices de restricción. Seleccionan un conjunto de filas de la matriz que premultiplican. Por ejemplo P^+A selecciona las p primeras filas de A, P^-A selecciona las q últimas filas de A y P^oA selecciona las r filas del medio.

Si las integrales (2.3) convergen entonces el problema de la ecuación diferencial (1.1) es equivalente al problema de la ecuación integral (2.3).

Lema 2.1

Supongamos que A(t) satisface

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = A_\infty \qquad\qquad \lim_{t\to\infty} \frac{dA(t)}{dt} = 0$$

A(t) es diferenciable a trozos en (t_o, ∞) donde A_∞ es como en (2.4).

Para algún $t_\infty \geqslant t_o$ sean $\delta_o(t)$, $\delta_\pm(t)$ dados tal que

$$\| P^\pm [A(t) - A_\infty] \| \leq \delta_\pm(t) \qquad t \geqslant t_\infty$$

$$\| P^o [A(t) - A_\infty] \| \leq \delta_o(t) \qquad t \geqslant t_\infty$$

Los autovalores de A^+, A^- satisfacen que para algún $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} R_e\, \lambda(A^+) &> \varepsilon \\ R_e\, \lambda(A^-) &< -\varepsilon \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Para algún $\theta \in (0,1)$ y un $\delta > 0$ vale:

$$\delta_{\pm}(t) \leq \theta \left(\frac{t_\infty}{t}\right)^{\delta} \frac{M_0}{e\left(\varepsilon^{M_0-1} + (M_0-1)!\right)}$$

$$\delta_0(t) \leq \frac{\theta\delta}{2e} \left(\frac{t_\infty}{t}\right)^{\delta} \frac{1}{t^{m_0}} \tag{2.6}$$

donde M_0 es la dimensión del bloque de Jordan más grande de A^+, A^- y m_0 es la dimensión del bloque de Jordan más grande de A^0.

Entonces las ecuaciones integrales tienen $m=q+s$ soluciones acotadas linealmente independientes sobre $[t_\infty, \infty)$.

Para la demostración se aplica el método de iteraciones de Picard a las ecuaciones integrales para lo cual se demuestra que $\{y^{\nu}(t)\}$ converge y está acotada uniformemente.

Así se obtienen soluciones acotadas sobre $[t_\infty, \infty)$. Para prolongar en forma continua la solución sobre $[t_0, t_\infty]$ se considera

$$y' = A(t)y = A_\infty y + (A(t) - A_\infty)y$$

como problema de valores iniciales sobre t_∞ y como $A(t) \in C[t_0, t_\infty]$ entonces existe una solución única sobre $[t_0, t_\infty]$

Ahora pasaremos al estudio de la solución acotada de la ecuación no homogénea (1.1).

Lema 2.2

Sea

$$f(t) = \begin{pmatrix} f^+(t) \\ f^0(t) \\ f^-(t) \end{pmatrix} \qquad \text{diferenciable en } [t_0, \infty)$$

f(t) satisface

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \frac{d f(t)}{dt} \right\| = 0$$

$$\| f^{+}(t) \| = O(1) \qquad \| f^{-}(t) \| = O(1) \qquad t \to \infty$$

$$\| f^{0}(t) \| = O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{m_0+\delta} \right) \qquad \delta > 0 \qquad t \to \infty$$

Supongamos que se satisfagan también las hipótesis del Lema 2.1.

Entonces la solución de la siguiente ecuación integral es acotada y es solución de la ecuación no homogénea.

$$w^{+}(t) = -\int_{t}^{\infty} e^{-A^{+}(\tau-t)} P^{+} \{ [A(\tau) - A_\infty] w(\tau) + f(\tau) \} d\tau$$

$$w^{0}(t) = -\int_{t}^{\infty} e^{-A^{0}(\tau-t)} P^{0} \{ [A(\tau) - A_\infty] w(\tau) + f(\tau) \} d\tau$$

$$w^{-}(t) = \int_{t_\infty}^{t} e^{-A^{-}(\tau-t)} P^{-} \{ [A(\tau) - A_\infty] w(\tau) + f(\tau) \} d\tau$$

Se demuestra la existencia de w(t) sobre $[t_\infty, \infty)$ usando las iteraciones de Picard $\left(w^{\nu+1}(t) = T w^{\nu}(t)\right)$ y la unicidad de w(t) se obtiene usando que T es una contracción.

Además se demuestra que

(i) w(t) satisface

$$\lim_{t\to\infty} \left(A^{I} w^{I}(t) + f^{I}(t) \right) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \| w^{0}(t) \| = 0$$

(ii)

$$\|w(t)\| \leq \frac{M}{1-\theta} \sup_{\tau \geq t_\infty} \left(\| \tau^{m_0+\delta/3} f^{0}(\tau)\|, \| f^{\pm}(\tau)\| \right)$$

donde

$$M = \max \left\{ \frac{e}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^{M_0-1} + (M_0-1)!}{\varepsilon^{M_0-1}} \right), \frac{e}{1+\delta} \right\}$$

θ, m_0, δ, ε como en (2.5) y en (2.6)

(iii) Cada solución satisface

I) $\lim_{t\to\infty} P^{+} \{ A(t) y(t) + f(t) \} = 0$

II) $\lim_{t\to\infty} P^{-} \{ A(t) y(t) + f(t) \} = 0$

III) $\lim_{t\to\infty} y^{r-s}(t) = 0$

Cada solución que tenga límite para $t \to \infty$ satisface

IV) $\lim_{t\to\infty} y^{s-k}(t) = 0$

Teorema 2.1

Sean válidas las hipótesis del Lema 2.1 y del Lema 2.2.

Sea $Y(t)$ la solución fundamental del problema homogéneo.

Sea $B_\infty = (\overbrace{0}^{p+r-k} \; \overbrace{X}^{k} \; \overbrace{0}^{3}) \in R^{m\times n}$ $\qquad X \in R^{m\times k}$

Entonces la ecuación (1.1) tiene una única solución si y sólo si la matriz B_R es no singular, donde

$B_R = \left[B_0 Y(t_0) + \lim_{t\to\infty} B_\infty Y(t) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ I_m \end{pmatrix} \in R^{m\times m}$ donde k es la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda = 0$ de A^0.

3. REDUCCION ALINTERVALO FINITO PARA EL PROBLEMA

Usando los resultados del lema 2.2 podemos escribir la condición(1.1 c) de tal forma que el problema original que llamaremos "problema infinito" quede de la siguiente forma:

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \tag{3,1a}$$

$$B_0 y(t_0) + \lim_{t\to\infty} B_\infty y(t) = \beta \tag{3,1 b}$$

$$\lim_{t\to\infty} A^+ y^+(t) + f^+(t) = 0 \tag{3,1c}$$

$$\lim_{t\to\infty} y^{r-s}(t) = 0$$

A los efectos del cálculo numérico se reemplaza este problema por otro que llamaremos el "problema finito"

$$v' = A(t)v + f(t) \qquad t_0 \le t \le t_* \tag{3,2a}$$

$$B_0 v(t_0) + B_\infty v(t_*) = \beta$$

$$A^+ v^+(t_*) + f^+(t_*) = 0$$

$$v^{r-s}(t_*) = 0$$

Nos interesa ver qué error se comete al reemplazar el "problema infinito" por el "problema finito".

Para ello usaremos otro problema ,el llamado "problema de la cola constante" definido como sigue:

$$w' = \hat{A}(t)w + \hat{f}(t) \tag{3.3a}$$

$$B_0 w(t_0) + \lim_{t\to\infty} B_\infty w(t) = \beta \tag{3.3b}$$

$$\lim_{t\to\infty} A^+ w^+(t) + f^+(t_*) = 0 \tag{3.3c}$$

$$\lim_{t\to\infty} w^{r-s}(t) = 0$$

donde

$$\hat{A}(t) = \begin{cases} A(t) & t_0 \le t \le t_* \\ A_\infty & t > t_* \end{cases}$$

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t) & t_0 \le t \le t_* \\ \begin{pmatrix} f^+(t_*) \\ 0 \end{pmatrix} & t > t_* \end{cases}$$

Lema 3.1

Supongamos que A_∞ tenga todos los autovalores distintos y que $A(t)$ se pueda desarrollar alrededor del ∞ en una serie de potencias

$$A(t) = A_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^k} A_k$$

Bajo estas hipótesis se afirma que si el "problema infinito" tiene una única solución entonces el "problema de la cola constante" tiene una única solución para un t_* suficientemente grande.

Estas hipótesis tan restrictivas permiten conocer la forma explícita de la solución fundamental de $y'=A(t)y$ (ver Coddington & Levinson [4]) necesaria para la demostración del lema.

Lema 3.2

El "problema de la cola constante" tiene una solución $w(t)$ si y sólo si el "problema finito" tiene una solución.

Cuando estas soluciones existen entonces $w(t)=v(t)$ sobre $t_0 \leq t \leq t_*$. En lo que sigue nos ocuparemos del error que se origina cuando se calcula $v(t)$ en lugar de $y(t)$.

Teorema 3.1

Sean las hipótesis del Teorema 2.1. Supongamos que el problema infinito tenga la solución única $y(t)$. Sea t_* suficientemente grande de tal manera que el problema de la cola constante y por lo tanto el problema finito tengan una única solución.

Entonces vale:

$$e(t) = y(t) - v(t) = Y(t)\, N_*^{-1} \begin{pmatrix} B_\infty y(t_*) - \lim\limits_{t\to\infty} B_\infty y(t) \\ \int_\infty^t e^{-A^+(\tau - t_*)} h^+(\tau)\, d\tau \\ P^{r-s} \int_\infty^{t_*} e^{-A^0(\tau - t_*)} h^0(\tau)\, d\tau \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, p \\ \}\, r-s \end{array}$$

donde $Y(t)$ es una solución fundamental de $y'=A(t)y$ cuyas últimas $q+s=m$ columnas están acotadas sobre $[t_0; \infty)$

$$N_* = \begin{pmatrix} B_0 Y(t_0) + B_\infty Y(t_*) \\ P_{p+r-s}\, Y(t_*) \end{pmatrix} \qquad N_* \in R^{n\times m}$$

$$h(s) = \begin{cases} 0 & t_0 \le s \le t_* \\ [A(s) - A_\infty]\, y(s) + f(s) - \begin{pmatrix} f^+(t_*) \\ 0 \end{pmatrix} & s > t_* \end{cases}$$

Corolario 3.1

Sean las hipótesis del lema 3.1 y del teorema 3.1 satisfechas.

Entonces para todo $t \in [t_0, \infty)$ se cumple

$$\lim_{t_* \to \infty} | y(t) - v(t, t_*) | = 0$$

Ejemplo:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(0 \quad 1)\, y(0) = 1$$

$$\lim_{t \to \infty} \left[(1 \quad 0)\, y(t) + e^{-t} \right] = 0$$

Solución exacta

$$y_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-t}$$

$$y_2(t) = e^{-t}$$

Problema finito

$$v' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2(0) = 1$$

$$v_1(t_*) = -e^{-t_*}$$

Solución del problema finito

$$V_1(t, t_*) = \frac{1}{2}\, e^{-2t_*} e^{t} - \frac{1}{2}\, e^{-t}$$

$$V_2(t, t_*) = e^{-t}$$

Error

$$e_1(t) = \frac{1}{2}\, e^{-2t_*} \cdot e^{t}$$

$$e_2(t) = 0 .$$

REFERENCIAS

1 Lentini, M. and Keller, H.B., "Boundary value problems on semi-infinite intervals and their numerical solution", Siam J. Numer. Anal. V.17, N°4, August 1980, pp 577-604.

2 Lentini, M., "Boundary value problems over semi-infinite intervals", Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, printed May 1978.

3 Keller, H.B., "Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems, Regional Conference Series in Applied Mathematics, no. 24, SIAM, Philadelphia, Pa., 1976.

4 Coddington and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, Mc. Graw-Hill, New York, 1955.

5 Knobloch, H.W. and Kappel, F., "Gewöhnliche Differentialgleichungen ". B.G. Teubner Stuttgart, 1974.

6 Walter, "Gewöhnliche Differentialgleichungen", Springer Verlag, 1976.

7 Lentini, M. and Keller, H.B., "The von Karman swirling Flows", Siam J. Appl. Math, Vol. 38, N°1, February 1980, p pp 52-64.

8 Keller, H.B. "Approximation Methods for Nonlinear Problems with Application to Two-Point Boundary Value Problems, Mathematics of Computation, Vol. 29, N° 130, April 1975, pp 464-474.

9 Hoog, F.R. and Weiss, "An Approximation Theory for Boundary Value Problems on Infinite Intervals. Computing 24, pp 227-239 (1980).

10 Hoog, F.R. and Weiss, R. "On the Boundary value problem for systems of ordinary differential equations with a singularity of second kind", Siam J. Math. Anal., Vol. 11 N° 1, January 1980, pp 41-60.

11 Chang, K.W. "Pertubation of Nonlinear Differential Equations", Journal of Mathematical Analysis and Applications 34, pp 418-428 (1971).

12 Hoog,F.R. and Weiss,R. "The Numerical Solution of Boundary Value Problems with an Essential Singularity Siam J. Numerical Analysis,Vol.16,N°4,August 1979,pp 637-669.

13 Ince,E.L. "Ordinary Differential Equations",Dover,New York,1956.

14 Fox,L. "The Numerical Solution of Two-Point Boundary Problems in Ordinary Differential Equations",Oxford at the Clarendon Press,1957.

15 Jain,M.K.,"Numerical Solutions of Differential Equations ",Willy Eastern Limited.New Delhi-Bangalore-Bombay-Calcutta,1979

16 Collatz,L., "The Numerical Treatment of Differential Equations",Springer-Verlag,1960.

17 Conte,S.D.,"The Numerical Solution of Linear Boundary Value Problems",Siam Review,8 (1966),pp 309-321.